Sur la conjecture d'Atiyah-Floer (historique et approches)

Noé Aubin-Cadot

Université de Montréal, Département de Mathématiques et Statistiques,
C.P. 6128 Succ. Centre-ville, Montréal, QC H3C 3J7, Canada

9 septembre 2019

Résumé

La conjecture d'Atiyah-Floer consiste en un éventuel isomorphisme d'anneaux entre l'homologie de Floer d'instantons SU(2) d'une 3-sphère d'homologie entière orientée Y et l'homologie de Floer d'intersections de lagrangiennes dans l'espace de modules d'Atiyah-Bott des connexions plates sur la surface de Heegaard Σ d'un scindement de Heegaard de Y où les deux lagrangiennes en question sont les classes de jauge de connexions plates sur Σ qui s'étendent à des connexions plates respectivement de part et d'autre du scindement de Heegaard. Il existe plusieurs variantes de cette conjecture. Certaines sont résolues, d'autres non. Cette vaste littérature mathématique est ici esquissée.

Abstract

The Atiyah-Floer conjecture consists in an eventual ring isomorphism between the SU(2) instanton Floer homology of an oriented integral homology 3-sphere Y and the Lagrangian Floer homology in the Atiyah-Bott moduli space of flat connections over the Heegaard surface Σ of a Heegaard splitting of Y where the two considered Lagrangians are the gauge classes of flat connections on Σ that can be extended to flat connections respectively on either side of the Heegaard splitting. There are many variants of this conjecture. Some are solved, others are not. This vast mathematical literature is here sketched.

Table des matières

Contexte	Auteur/Années	Principaux acteurs	État actuel
SU(2)-fibré trivial. Scind. de Heegaard d'une $S^3H\mathbb{Z}$. Éq. ASD avec CBL.	Atiyah [6] 1987-(?)	Salamon [109] Wehrheim [111, 132, 133, 134] (Yoshida [154]) (Lee et Li [80]) (Taubes [123])	en cours
SO(3)-fibré non trivial. Tores d'applications.	Floer [35] 1991-1999	Dostoglou Salamon [35, 36, 37, 38, 110] Muñoz [95]	démontré (version forte)
SO(3)-fibré non trivial. Scind. de Heegaard d'une $S^3H\mathbb{Z}$. Éq. hybride ASD-CR.	Fukaya [55] 1993-(?)	Fukaya [55, 56, 57, 59, 60] Xu [151]	preuve annoncée en 2015 [57]
Théorie des champs de Floer 2+1+1. Cohomologie de Floer cuiltée.	Wehrheim [135] 2016-(?)	Wehrheim Woodward [135, 136, 138, 139]	en cours
SO(3)-fibré non trivial. Cobordisme cyclique. Cohomologie de Floer cuiltée.	Duncan [39] 2013-(?)	Duncan [39, 40, 41]	en cours
SU(2)-fibré trivial. Scind. de Heegaard d'une $S^3H\mathbb{Z}$. Esp. de mod. étendu de connexions plates. Homologie d'instantons symplectique.	Manolescu et Woodward [85] 2012-(?)	Manolescu et Woodward [85] Daemi et Fukaya [27]	en cours
U(2)-fibré non trivial. Paires $(u(s,t), A_{s,t})$.	Lipyanskiy [83] 2014-(?)	Lipyanskiy [83]	en cours

Certains vous parleront de physique mathématique. Déchiffrons ce grec de cuisine : physis = nature ; mathêma = connaissance. Ils se déclarent ouvertement limiers de la nature, ils suivent sa trace en reniflant. D'autres écarteront cette idée, horrifiés : ce sont ceux qui préfèrent humer l'ombre des ombres, abstraire du déjà abstrait. Abstrait par quelqu'un d'autre, forcément : mathématiciens cannibales, ils ne répugnent pas à se nourrir des idées de leurs prédécesseurs ; ils les assimilent quand elles leur paraissent suffisamment belles et savoureuses. Leur table est délicieusement et copieusement servie : pas étonnant s'ils trouvent les mathématiques idéales...

Jean-Marie Souriau [119], p.11.

1 Introduction

Alors qu'une présentation sur la théorie de jauge commence souvent par :

> *Soit $P \to B$, un G-fibré principal...*

une présentation sur la géométrie symplectique commence souvent par :

> *Soit (M, ω), une variété symplectique...*

À la confluence de la *théorie de jauge* et de la *géométrie symplectique* se trouve la conjecture d'Atiyah-Floer[1]. Elle suggère une possible équivalence entre certains invariants topologiques. Ces invariants sont respectivement l'homologie de Floer d'instantons SU(2) des 3-sphères d'homologies entières orientées et la cohomologie de Floer d'intersections de sous-variétés lagrangiennes.

Alors que l'homologie de Floer d'instantons fut motivée par la topologie de basse dimension et que la cohomologie de Floer lagrangienne et l'homologie de Floer hamiltonienne furent principalement motivées par la conjecture d'Arnol'd, les homologies de Floer subséquentes furent motivées par la conjecture d'Atiyah-Floer : homologie de Floer symplectique, homologie de Floer d'instantons avec conditions aux bords lagrangiennes (CBL), homologie de Floer d'instantons symplectiques et cohomologie de Floer cuiltée.

Cette conjecture est un sentier difficile miné de singularités : les lagrangiennes considérées sont, même après perturbations, immergées et singulières dans une variété symplectique singulière. Ce sont des conditions difficiles pour y définir une cohomologie de Floer d'intersections lagrangiennes.

Avant de sauter dans la conjecture et ses diverses variantes, je fais deux détours historiques.

[1]Bien que la paternité de la notion de *variété symplectique* (M, ω) reviendrait à Souriau en 1953, c'est Hermann Weyl qui a concocté le mot *symplectique* (voir [72] p.15). Weyl a de plus inventé la *théorie de jauge* [144, 145, 146]. C'est précisément dans un symposium en l'honneur de l'héritage mathématique de Weyl en 1987, en pleine confluence *jauge / symplectique* donc, qu'Atiyah [6] énoncera la conjecture d'Atiyah-Floer.

2 Les symplecticiens et les points fixes

En 1912 [4, 18, 21], Henri Poincaré conjecture que :

> *Tout homéomorphisme d'une couronne dans elle-même préservant son aire ainsi que son orientation et qui fait tourner les deux bords en sens opposés a au moins deux points fixes.*

La même année, George David Birkhoff en publie la preuve. Ce faisant, la conjecture devient le *théorème du point fixe de Poincaré-Birkhoff*, alias *dernier théorème géométrique de Poincaré*.

En 1965 [78, 114], Vladimir Igerovich Arnol'd [2, 3, 4] tente de généraliser ce dernier théorème via trois conjectures, dites *d'Arnol'd*. Ces conjectures s'intéressent au nombre minimal de points fixes que peut admettre un difféomorphisme hamiltonien d'une variété symplectique. Dénotons une variété symplectique par (M, ω), un difféomorphisme hamiltonien[2] par $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ et le nombre de points fixes de ϕ par $\#\mathrm{Fix}(\phi)$. En ordre croissant de difficulté, les conjectures s'énoncent comme suit :

- La *conjecture d'Arnol'd pour les tores* :

$$\forall \phi \in \mathrm{Ham}(T^{2n}, \omega), \quad \#\mathrm{Fix}(\phi) \geq 2n + 1$$

- La *conjecture d'Arnol'd faible* pour les variétés symplectiques fermées :

$$\forall \phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega), \quad \#\mathrm{Fix}(\phi) \geq \sum_{k=0}^{\dim(M)} b_k(M, \mathbb{Q})$$

- La *conjecture d'Arnol'd forte* pour les variétés symplectiques fermées :

$$\forall \phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega), \quad \#\mathrm{Fix}(\phi) \geq \min_f \#\{\mathrm{Crit}(f) \mid f \text{ Morse sur } (M, \omega)\}$$

[2]Voir [14] pour une description de $\mathrm{Ham}(M, \omega)$.

L'ordre *croissant* de difficulté mentionné ci-dessus vient du fait que[3] :

$$\begin{aligned} & \text{conjecture d'Arnol'd forte} \\ \implies & \text{conjecture d'Arnol'd faible} \\ \implies & \text{conjecture d'Arnol'd pour les tores} \\ \implies & \text{théorème de Poincaré-Birkhoff} \end{aligned}$$

Les conjectures d'Arnol'd sont intimement reliées aux *inégalités de Morse*. Un bref rappel s'impose [89]. Soient :

- M, une variété lisse fermée (i.e. compacte et sans bord) de dimension n ;
- $f : M \to \mathbb{R}$, une fonction réelle suffisamment différentiable sur M ;
- $\mathrm{Crit}(f) := \{x \in M : \mathrm{d}f|_x = 0\}$, l'ensemble des *points critiques* de f ;
- $H_{ij} := \partial_i \partial_j f$, la *hessienne* de f sur une carte locale ;
- $\lambda_x := \#\{\text{val. propres négatives de } H_{ij}|_x\}$, l'*indice de Morse* de $x \in \mathrm{Crit}(f)$.

Un point critique $x \in \mathrm{Crit}(f)$ est dit *non dégénéré* si la matrice hessienne $H_{ij}|_x$ est non dégénérée. L'indice de Morse et la non dégénérescence sont des notions indépendantes du choix de carte locale pour définir H_{ij}. La fonction f est dite *Morse* si tout $x \in \mathrm{Crit}(f)$ est non dégénéré. Posons $c_k := \#\{x \in \mathrm{Crit}(f) : \lambda_x = k\}$ le nombre de points critiques de f d'indice de Morse égal à k. Posons de plus $b_k := \mathrm{rang} H_k(M; \mathbb{Q})$ le k-ième nombre de Betti de M. Lorsque f est Morse sur M, nous avons les inégalités de Morse [91] :

$$\begin{gathered} c_k \geq b_k \qquad \text{pour } k = 0, \dots, \dim(M) \\ \sum_{k=0}^{\dim(M)} (-1)^k c_k = \chi(M) := \sum_{k=0}^{\dim(M)} (-1)^k b_k \\ \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} c_i \geq \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} b_i, \qquad \text{pour } k = 0, \dots, \dim(M) \end{gathered}$$

La première famille d'inégalités $c_k \geq b_k$ est connue sous le nom d'*inégalités de Morse faibles*. Il existe plusieurs preuves des inégalités de Morse : à la Marston Morse (1925) [91], à la René Thom (1949) [124] ($M \sim$ CW-complexe), à la Stephen Smale (1960) [118] ($M =$ CW-complexe), à la Edward Witten (1982) [147].

[3] Au lecteur impatient de démontrer cette suite d'implications : l'inégalité $2^{2n} \geq 2n + 1$ est trop drastique. Il faut distinguer un dénombrement des points fixes fait avec ou sans multiplicité. Pour plus de détails à ce sujet, voir [22] à la p.236-237 et [4] à la p.418.

Les conjectures d'Arnol'd sont soutenues par le fait que celle forte est vraie pour tout difféomorphisme hamiltonien ϕ qui provient d'un hamiltonien H autonome (i.e. indépendant du temps). En effet, puisque l'ensemble des fonctions de Morse est dense dans l'espace des fonctions réelles suffisamment différentiables, pour ϕ provenant d'un hamiltonien autonome, on a :

$$\begin{aligned} \#\mathrm{Fix}(\phi) &\geq \#\mathrm{Crit}(H) \\ &\geq \min_f \#\{\mathrm{Crit}(f) \mid f \text{ Morse sur } (M,\omega)\} \end{aligned}$$

En 1982[4], Charles C. Conley et Eduard Zehnder [24] démontrent la conjecture d'Arnol'd pour les tores T^{2n}. Pour ce faire, ils utilisent l'astuce suivante inspirée de l'approche variationnelle de Paul H. Rabinowitz [106]. L'évolution dynamique de $t = 0$ à $t = 1$ d'un système mécanique décrit par un lagrangien $L \in C^\infty(TQ \times \mathbb{R})$ est un chemin $\gamma \in C^\infty([0,1], Q)$ aux bouts fixés $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ dans l'espace de configuration Q qui extrémalise l'intégrale d'action :

$$S[\gamma] = \int_{[0,1]} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)\mathrm{d}t$$

Lorsque γ extrémalise S, il vérifie l'équation d'Euler-Lagrange. Par transformée de Legendre, un tel système dynamique lagrangien peut souvent s'exprimer de manière équivalente via un hamiltonien $H_t \in C^\infty(T^*Q \times \mathbb{R})$ comme extrémale $\gamma \in C^\infty([0,1], T^*Q)$ aux bouts fixés $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ dans l'espace des phases T^*Q de l'intégrale d'action d'Hamilton-Jacobi :

$$S_{\mathrm{HJ}}[\gamma] = \int_{[0,1]} \gamma^*\lambda_{\mathrm{can}} - H_t(\gamma(t))\mathrm{d}t$$

Lorsque γ extrémalise S_{HJ}, il décrit un segment d'orbite hamiltonienne. L'idée de Conley et Zehnder fut de restreindre cette intégrale d'action aux chemins γ qui sont *a priori* périodiques et contractiles. C'est-à-dire, ils définissent S_{CZ} comme restriction de S_{HJ} à l'ensemble $\mathcal{L}M := \left\{\gamma \in C^\infty(S^1, M) \middle| [\gamma] = 0 \in \pi_1(M)\right\}$ où $M = T^*Q$. Ce faisant, les extrémales de S_{CZ} sont les orbites périodiques de période 1 du flot hamiltonien ϕ_t de H_t. Ces orbites correspondent aux points fixes du difféomorphisme hamiltonien $\phi := \phi_1 \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$. Autrement dit, les chemins critiques de S_{CZ} sont les points fixes de ϕ. En généralisant cette construction à $M = T^{2n}$, qui n'est pas un fibré cotangent, ainsi qu'en remarquant que le gradient

[4] Et non 1983, voir [84], p.2.

de S_{CZ} est donné par $(\nabla S_{\mathrm{CZ}})|_\gamma = -J\dot{\gamma} - \nabla H_t(\gamma(t))$, ils arrivèrent à la preuve de la conjecture d'Arnol'd pour les tores. Ensuite, certains cas particuliers de la conjecture d'Arnol'd furent démontrés, entre autres, par Chaperon [22], Fortune et Weinstein [52], Sikorav [114], Weinstein [142], etc.[5].

Ouvrons une parenthèse. L'idée essentielle à retenir est la suivante : un problème de topologie symplectique fut résolu par un problème de type Morse en voyant une fonctionnelle d'action comme fonction de Morse. Par *type Morse* entendons la chose suivante. On considère une paire Morse-Smale (f, g) sur un espace X de dimension finie ou infinie. En dimension finie, les points critiques de f engendrent un complexe de chaîne (absolument) gradué par l'indice de Morse des points critiques. L'indice d'un point critique est le nombre de valeurs propres négatives de la matrice hessienne de f en ce point. Les courbes gradient de f relativement à la métrique g relient asymptotiquement les points critiques. La différentielle du complexe dénombre les courbes gradient reliant asymptotiquement deux points critiques dont l'indice diffère d'une unité. En dimension infinie, la situation est essentiellement la même à ceci près : la notion d'indice *absolu* perd son sens puisque le spectre du hessien de f n'est plus forcément borné. L'indice des points critiques (et donc la graduation) n'est plus *absolu* mais *relatif*. Ces indices relatifs sont définis à l'aide du concept de *flot spectral*[6] introduit en 1976 par Atiyah, Patodi et Singer [12]. Ce faisant, les indices de Morse relatifs sont périodiquement gradués sur $\mathbb{Z}_N$. L'idée d'utiliser des problèmes de type Morse en dimension infinie est à la base des homologies de Floer. ***Fermons la parenthèse***.

Avant de continuer, remarquons au passage l'approche *quantique* d'Edward Witten en 1982 [147] à la théorie de Morse[7]. À une fonction de Morse f correspond une famille à 1-paramètre de *potentiels classiques* $V_\tau = \|\tau\nabla f\|_g^2$ sur M. Witten pose une différentielle déformée $\mathrm{d}_\tau = e^{-\tau f}\mathrm{d}e^{\tau f}$ puis une co-différentielle de de Rham

[5]Voir les listes d'articles énumérés en [114] p.49, [44] p.280, [70] p.466, [84] p.2, [62] p.935.

[6]Le flot spectral $\mathrm{SF}(x_t)$ d'une courbe $\{x_t\}_{t\in[0,1]}$ en X est par définition la différence entre le nombre de v.p. strict. négatives de la hessienne (ou une variante auto-adjointe et Fredholm) de f en x_0 qui deviennent strict. positives en x_1 moins le nombre de v.p. strict. positives de la hessienne de f en x_0 qui deviennent strict. négatives en x_1. L'indice relatif $\mu(x_0, x_1)$ de $x_0, x_1 \in \mathrm{Crit}(f)$ est par définition $\mu(x_0, x_1) :\equiv \mathrm{SF}(x_t) \mod 2N$. Le *modulo* $2N$ découle du fait que le flot spectral dépend de la classe d'homotopie du chemin x_t considéré (e.g. $N = 4$ en homologie de Floer d'instantons, ou encore $N = c_1(\pi_2(M))$ en homologie de Floer symplectique de Dostoglou et Salamon). Voir [107] pour un formalisme plus précis du « *indice Fredholm = flot spectral* » de [12].

[7]Beaucoup de choses se sont dites sur la théorie de Morse version Witten, voir [49] p.208, [79] p.11, [90] p.90, [147] p.670, [19] p.107.

déformée $\delta_\tau = e^{\tau f}\delta e^{-\tau f}$ ainsi qu'un opérateur hamiltonien de type laplacien de Hodge-de Rham déformé $\hat{H}_\tau = \Delta_\tau = \mathrm{d}_\tau\delta_\tau + \delta_\tau\mathrm{d}_\tau$ qui ressemble à celui dans l'équation de Schrödinger. Dans l'approximation WKB[8] $\tau \to +\infty$, à un point critique de f d'indice de Morse k correspond une unique k-forme différentielle *propre* (au sens de *fonction d'onde propre*) d'énergie finie de l'opérateur $\hat{H}_\tau$. Les k-formes différentielles harmoniques sont des superpositions de ces états propres et sont des générateurs de la cohomologie de de Rham. Witten retrouve ainsi les inégalités de Morse faibles. Puis, il trouve aussi celles fortes en voyant son homologie de Morse de manière "quantique". La différentielle du complexe est, dans la limite $\tau \to \infty$, le flot gradient qui correspond à du *tunnellage quantique*.

En 1984[9], l'*oeuvre séminale de Mikhaïl Gromov* [66] introduit en symplectique la notion de *courbe pseudo-holomorphe*. Gromov définit l'invariant symplectique *de Gromov* qui consiste à dénombrer des courbes J-holomorphes en (M, ω) passant par certains points fixés en M. Il démontre alors que tout $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ admet au moins un point fixe lorsque $\pi_2(M) = 0$ ([44], p.280).

En 1987[10], soit trois ans après l'arrivée en topologie symplectique des courbes J-holomorphes de Gromov, Andreas Floer utilise ces courbes pour définir [46] une *cohomologie[11] (de Floer[12]) pour intersections de sous-variétés lagrangiennes[13] transverses* $L_0, L_1 \subset (M, \omega)$. Sa cohomologie est dénotée $\mathrm{HF}^*_{\mathrm{lag}}(M, L_0, L_1)$, ou plus simplement $\mathrm{HF}^*_{\mathrm{lag}}(L_0, L_1)$. Elle est de type Morse. Les générateurs du com-

[8]Dans l'approx. WKB usuelle c'est la phase et non l'amplitude de l'onde WKB qui est déformée.

[9]Et non en 1985. Voir [34], p.x.

[10]Et non 1988, voir [6], p.299.

[11]Son opérateur de cobord fait augmenter l'indice. Certains préfèrent parler de *cohomologie* de Floer pour intersections lagrangiennes [46, 88, 109], d'autres d'*homologie* de Floer pour intersections lagrangiennes [25, 55, 57, 61, 80].

[12]Ou bien *de Fredholm*, *de Fermi* ou *de Fock* [6], p.291. De manière générale, on entend par *(co-)homologie de Floer* une (co-)homologie de *type Morse* en dimension infinie.

[13]En [46], sa cohomologie est pour le cas particulier $\pi_2(M, L) = 0$, $L_0 = L$ et $L_1 = \phi(L)$ et $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$. Suivant [61], Yong-Geun Oh tentera de généraliser la construction de Floer à L_0 et L_1 arbitraires et monotones avec nombre de Maslov minimal ≥ 3 mais sa théorie ne satisfera pas la condition $\mathrm{HF}^{\mathrm{lag}}_*(M, L, L) \cong H_*(L; \mathbb{Z}_2)$. Viendra ensuite une théorie d'obstruction [61] à ce que l'homologie de Floer lagrangienne soit définie pour deux lagrangiennes $L_0, L_1 \subset M$ *relativement spin*. La dite obstruction est une limitation à ce que $\mu^1_{L,L} \circ \mu^1_{L,L} = 0$ où $\mu^1_{L,L} : \mathrm{CF}(M, L, L) \to \mathrm{CF}(M, L, L)$ est la différentielle du complexe. Une lagrangienne L est dite sans obstruction si elle admet un *bounding cochain* $b \in \mathrm{CF}(M, L, L)$ [1, 73]. En 2005, Octav Cornea et François Lalonde [25] définiront la *théorie des clusters* pour poser une certaine *homologie de Floer fine*, définie sans obstruction (en particulier dans un contexte non monotone [16]).

plexe de cochaîne sont les chemins critiques de S_{HJ} avec CBL L_0 et L_1. Ces chemins critiques sont les points d'intersections transverses $L_0 \pitchfork L_1$. L'opérateur de cobord du complexe dénombre les courbes gradient de S_{HJ}. Ces courbes gradient décrivent des *bandes J-holomorphes* bordées de part et d'autre par L_0 et L_1 qui relient asymptotiquement deux points d'intersections. Floer démontre d'abord que la différentielle du complexe vérifie bien $\partial^2 = 0$. Il démontre ensuite que $\mathrm{HF}^*_{\mathrm{lag}}(L, \phi(L)) \cong \mathrm{HF}^*_{\mathrm{lag}}(L, L) \cong H^*(L; \mathbb{Z}_2)$. Enfin, en posant $(N, \omega_N) = (M \times M, \omega_M \oplus (-\omega_M))$, il considère pour lagrangiennes le graphe diagonal $\Gamma_{\mathrm{id}} = \{(x, x) : x \in M\}$ et le graphe $\Gamma_\phi = \{(x, \phi(x)) : x \in M\}$ de $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega_M)$. Le graphe Γ_ϕ peut être vu comme étant $\Gamma_\phi = \tilde{\phi}(\Gamma_{\mathrm{id}})$ pour $\tilde{\phi}(x, y) = (x, \phi(y))$ de sorte que $\tilde{\phi} \in \mathrm{Ham}(N, \omega_N)$. Ce faisant :

$$\mathrm{HF}^*_{\mathrm{lag}}(\Gamma_{\mathrm{id}}, \Gamma_\phi) = \mathrm{HF}^*_{\mathrm{lag}}(\Gamma_{\mathrm{id}}, \tilde{\phi}(\Gamma_{\mathrm{id}})) \cong \mathrm{HF}^*_{\mathrm{lag}}(\Gamma_{\mathrm{id}}, \Gamma_{\mathrm{id}}) \cong H^*(\Gamma_{\mathrm{id}}, \mathbb{Z}_2) \cong H^*(M, \mathbb{Z}_2)$$

Puisque l'homologie de Floer lagrangienne $\mathrm{HF}^*_{\mathrm{lag}}(\Gamma_{\mathrm{id}}, \Gamma_\phi)$ est engendrée par les points d'intersections lagrangiennes $\Gamma_{\mathrm{id}} \cap \Gamma_\phi$ et que ces points d'intersections correspondent aux points fixes de ϕ sur M, il suit que :

$$\#\mathrm{Fix}(\phi) \geq \sum_k \mathrm{rang}\ \mathrm{HF}^k_{\mathrm{lag}}(\Gamma_{\mathrm{id}}, \Gamma_\phi) = \sum_k \mathrm{rang}\ H^k(M, \mathbb{Z}_2)$$

Floer démontre ainsi la conjecture d'Arnol'd faible à coefficients $\mathbb{Z}_2$ dans le cas $\pi_2(M) = 0$ qu'il avait annoncé l'année précédente en [44], ce qui généralise le résultat de Gromov [66].

En 1988-1989, Floer définit [47, 48] l'*homologie*[14] *(de Floer) pour difféomorphismes hamiltoniens* $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$. Son homologie est dénotée $\mathrm{HF}^{\mathrm{ham}}_*(M, \phi)$, ou encore $\mathrm{HF}^{\mathrm{ham}}_*(M, H)$. Il s'inspire de la fonctionnelle de Conley et Zehnder S_{CZ} sur l'espace $\mathcal{L}M$ des lacets contractiles en M. Au lieu de considérer des lacets, il considère des applications $\tilde{u} \in C^\infty(D^2, M)$ qui envoient un disque D^2 en M. L'image de la restriction $u \in C^\infty(S^1, M)$ de $\tilde{u}$ au bord S^1 du disque D^2 est le lacet contractile de Conley et Zehnder. Floer considère un difféomorphisme hamiltonien $\phi = \phi_1$ provenant d'un hamiltonien 1-périodique, i.e. $H_{t+1} = H_t$. Par le théorème de Stokes, la fonctionnelle S_{CZ} est équivalente à la *fonctionnelle d'action symplectique perturbée*[15] :

$$S_H(\tilde{u}) := \int_{D^2} \tilde{u}^* \omega - \int_{S^1} H_t(u(t))\mathrm{d}t$$

[14]Son opérateur de bord fait diminuer l'indice.

[15]La fonctionnelle d'action symplectique *non perturbée* correspond au cas $H = 0$.

Son homologie est de type Morse. Les générateurs du complexe de chaîne sont les (classes d'homotopie relative de) disques critiques de S_H dont le bord est une orbite hamiltonienne périodique de période 1. Ces (classes de) disques critiques sont identifiés aux points fixes de ϕ_1. L'opérateur de bord du complexe dénombre les courbes gradient de S_H. Ces courbes gradient décrivent des *tubes* J-holomorphe (i.e. une trajectoire de lacets) en (M, ω) dont les bouts relient asymptotiquement deux orbites hamiltoniennes périodiques de période 1. Floer démontre d'abord que la différentielle du complexe vérifie $\partial^2 = 0$. Il démontre ensuite que l'homologie de Floer hamiltonienne $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{ham}}(M, \phi)$ est invariante par isotopie hamiltonienne et que $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{ham}}(M, \mathrm{id}_M) \cong H_*(M; \mathbb{Z}_2)$. Il généralise ainsi sa preuve de la conjecture d'Arnol'd faible sur $\mathbb{Z}_2$ au cas des variétés symplectiques fermées et monotones.

En 1995, en formalisant quelques idées de physiciens [128, 149, 150] portant sur des modèles-sigma non linéaires généralisant les invariants de Gromov et vérifiant une équation de *Cauchy-Riemann (CR)* perturbée via un terme inhomogène, Yongbin Ruan et Gang Tian [108] définissent l'invariant symplectique *de Gromov-Witten (GW)* et la *cohomologie quantique (QH)*. La QH est la cohomologie entière modulo torsion tensorisée avec un anneau de Novikov [104]. Elle est munie d'un *cup produit quantique* qui en fait un anneau. À torsion près, bien que la QH et la l'HF hamiltonienne sont isomorphes à la cohomologie usuelle, leurs produits respectifs sont différents. La QH est munie du cup produit quantique alors que l'HF est munie du produit de Donaldson. Il sera plus tard démontré en [104] que le produit de Donaldson concorde avec le cup produit quantique via l'*isomorphisme PSS*. Bien que les invariants de GW sont le plus souvent utilisés pour étudier la conjecture de symétrie miroir homologique de Kontsevich [77], on verra plus bas qu'ils semblent aussi l'être pour étudier la conjecture d'Atiyah-Floer [134].

La conjecture d'Arnol'd faible sera démontrée dans le cas semi-positif par Helmut Hofer et Dietmar A. Salamon en 1995 [71]. Elle sera ensuite démontrée en toute généralités indépendamment par Kenji Fukaya et Kaoru Ono [62] en 1996 et par Gang Liu et Gang Tian [84] en 1998. Les deux preuves utilisent les invariants de GW. La conjecture d'Arnol'd forte est encore à ce jour une question ouverte.

3 Pendant ce temps chez les jaugistes

En 1918, Hermann Weyl [144] tente d'unifier l'électromagnétisme (ÉM) et la relativité générale (RG) d'Einstein. À la métrique pseudo-riemannienne d'espace-temps g sur M correspond une réduction structurelle $\mathrm{Fr}^{\mathrm{O}(1,3)}(M) \subset \mathrm{Fr}(M)$ du fibré des repères linéaires tangents $\mathrm{Fr}(M)$. L'idée de Weyl est de considérer plutôt une réduction structurelle moins forte $\mathrm{Fr}^{\mathrm{O}(1,3)\times(\mathbb{R}_+,\times)}(M) \subset \mathrm{Fr}(M)$ ayant pour groupe structurel $\mathrm{O}(1,3) \times (\mathbb{R}_+, \times)$ au lieu de seulement le groupe de Lorentz $\mathrm{O}(1,3)$. Le groupe ajouté $(\mathbb{R}_+, \times)$ donne lieu à une composante de plus à la connexion de Levi-Civita. Cette composante ajoutée est identifiée au 4-potentiel électromagnétique A. Le choix d'une réduction structurelle additionnelle $\mathrm{Fr}^{\mathrm{O}(1,3)}(M) \subset \mathrm{Fr}^{\mathrm{O}(1,3)\times(\mathbb{R}_+,\times)}(M)$ donne lieu à une métrique g sur M. Ce choix, Weyl l'appellera en 1919 *choix de jauge* [145]. Un changement de ce choix de jauge donne lieu à une *transformation de jauge*. Lors d'une transformation de jauge, la métrique g subit une transformation conforme et le *champ de jauge A* subit une transformation de jauge. La théorie de Weyl est enfin démantibulée par Einstein puisqu'elle prédit que le spectre atomique d'un atome dépend de son passé.

En 1921, puis en 1926, Kaluza [74] et Klein [75] utilisent aussi implicitement la théorie de jauge pour unifier l'ÉM et la RG. La théorie de Kaluza-Klein considère une métrique sur un $\mathrm{U}(1)$-fibré principal penta-dimensionnel (5D) dont la base est l'espace-temps 4D. L'équation d'Einstein sur la variété 5D se scinde en l'équation d'Einstein 4D couplée au tenseur énergie-impulsion ÉM et en les équations de Maxwell. De plus, l'équation d'une géodésique sur l'espace 5D correspond à l'équation du mouvement d'une particule électriquement chargée sur l'espace-temps 4D. Enfin, la théorie de Kaluza-Klein est aussi déboulonnée par Einstein puisqu'elle prédit que les particules sont approximativement 10^{20} trop lourdes.

En 1929, Weyl [146] pose les bases de la théorie électromagnétique couplée à une fonction d'onde ψ via sa théorie de jauge, mais avec un groupe structurel $\mathrm{U}(1)$. Pour Weyl [146], p.325 :

> *It seems to me that it is now hopeless to seek a unification of gravitation and electricity without taking material waves into account.*

Ce n'est alors plus la métrique g qui est couplée au champ de jauge A, c'est la matière ψ qui est couplée au champ de jauge A [105]. La théorie de jauge ÉM U(1) de Weyl est approfondie par Pauli en 1941 [103]. Entre temps, d'autres théories tentant d'unifier la RG et l'ÉM font le jour, dont une de Klein en 1938 qui semble contenir de la théorie de jauge non abélienne [101]. La théorie de jauge non abélienne fait officiellement son entrée avec la théorie de Yang et Mills (YM) en 1954 [152] et l'article d'Utiyama [127].

En 1975, Belavin, Polyakov, Schwarz et Tyupkin publient un article [15] portant sur certaines pseudo-particules, nommées *instantons de YM*, introduites la même année par 't Hooft dans le but de résoudre certains problèmes en physique nucléaire. Leur article fait un lien entre les instantons de YM[16] aux classes de Pontrjagin :

> *Formulas like (3) are known in topology by the name of "Pontryagin class".*

En 1977, Atiyah, Hitchin et Singer annoncent [10] une preuve à paraitre dans [11] démontrant que l'espace de modules des instantons modulo transformations de jauge[17] pour un SU(2)-fibré principal sur S^4 de classe de Pontrjagin $k \geq 1$ est de dimension $8k - 3$. Leur preuve va *grosso modo* comme suit. Ils se donnent un SU(2)-fibré trivial $P \to \mathbb{R}^4$ sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni de la métrique euclidienne canonique. Ils y définissent un *instanton de YM* comme étant une connexion[18] $A \in \mathcal{A}$ telle que :

1. la 2-forme de courbure F_A est *auto-duale* (SD), i.e. $\star F_A = F_A$;
2. l'énergie de YM de A est *finie*, i.e. $S_{\mathrm{YM}}[A] < \infty$;
3. la connexion s'*étend à l'infini*, i.e. s'étend[19] à une connexion sur S^4.

[16] Des minimums locaux de l'intégrale d'action de YM $S_{\mathrm{YM}}[A] = \int F_A \wedge^{\kappa} \star F_A$, à l'époque peu connue des géomètres (e.g. Atiyah n'a fait la connaissance des équations de YM qu'en 1976 [5]).

[17] Le groupe de jauge $\mathcal{G} := \{\Lambda \in \mathrm{Aut}(P) | \pi \circ \Lambda = \pi\}$ est un sous-groupe normal du groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(P) := \{\tilde{f} \in \mathrm{Diff}(P) | \tilde{f} \circ \Phi_g = \Phi_g \circ f, \forall g \in G, \text{et } \exists f \in \mathrm{Diff}(B) : \pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi\}$ de l'espace total P d'un G-fibré principal [76] $\pi : P \to B$ d'action de groupe $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(P)$.

[18] $\mathcal{A} := \{A \in \Omega^1(P; \mathfrak{g}) | (\Phi_g)^* A = \mathrm{Ad}_g^{-1} A \text{ et } A(\xi^\bullet) = \xi, \forall \xi \in \mathfrak{g}\}$ où $\xi^\bullet := (\Phi_*)|_e(\xi) \in \mathfrak{X}(P)$.

[19] La condition 3. n'est pas nécessaire puisqu'elle découle des deux premières. En effet, d'après Thomas H. Parker [102], le théorème d'Uhlenbeck [126] de 1982 (donc 5 ans après l'article d'Atiyah, Hitchin et Singer) disant que *les connexions de YM d'énergies finies sur un espace quadri-dimensionnel n'ont pas de points singuliers isolés* implique qu'elles s'étendent, par projection stéréographique, de $\mathbb{R}^4$ à S^4 comme connexion d'un SU(2)-fibré pas forcément trivial sur S^4.

Par la théorie de Chern-Weil, faisant un pont entre la courbure d'un fibré et ses classes caractéristiques, ils relient l'énergie de YM d'un instanton à la classe de Pontrjagin[20] du fibré principal $P \to S^4$. Ensuite, ils définissent un complexe de déformation d'instantons elliptique. Enfin, ils utilisent le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer pour parvenir à leurs fins.

En 1982, Karen K. Uhlenbeck fournit des outils analytiques à la théorie de jauge non abélienne. Dans le même journal elle publie deux articles. Le premier [126] porte sur son *théorème de singularités évitables d'Uhlenbeck* permettant l'extension des connexions de YM d'énergie finie de $\mathbb{R}^4$ à tout S^4. Ce théorème est à la théorie de jauge ce que le *théorème de singularités évitables de Gromov* [66] est à la symplectique. Le second [125] porte sur son *théorème de compacité d'Uhlenbeck*[21] nécessaire à la compactification de l'espace de modules d'instantons de YM [131]. Ce théorème est à la théorie de jauge ce que le *théorème de compacité de Gromov*[22] est à la symplectique. Clifford H. Taubes [121, 122] fournira aussi des outils analytiques à la théorie de jauge concernant les conditions topologiques nécessaires et suffisantes d'un G-fibré principal à l'existence de connexions irréductibles auto-duales sur ce même fibré.

La même année, en 1982, ayant pour but de classifier les fibrés algébriques sur une surface de Riemann fermée (Σ, j) par la fonctionnelle d'action de YM en dimension 2, Atiyah et Raoul Bott [9] établissent un lien entre la théorie de jauge et la géométrie symplectique. L'*espace de modules d'Atiyah-Bott* $\mathcal{M}_\Sigma^{\flat} := \mathcal{A}_\Sigma^{\flat}/\mathcal{G}_\Sigma$ des classes de jauge de connexions plates sur un G-fibré principal $P_\Sigma \to \Sigma$ est un orbifold symplectique possiblement avec singularités[23]. L'idée est la suivante. L'espace des connexions $\mathcal{A}_\Sigma$ possède une structure symplectique faible[24] naturelle

[20] Ici donnée par $k[A] := \frac{1}{8\pi^2}\int F_A \wedge^\kappa F_A$ où l'intégration est prise de manière équivalente sur $\mathbb{R}^4$ ou S^4 et où $\kappa \in \Gamma^\infty(\otimes^2 \mathrm{Ad}P^*)$ vient d'une forme bilin. non dégén. Ad-équivariante $\kappa^\sharp \in C^\infty(P, \otimes^2\mathfrak{g}^*)$, e.g. $\kappa^\sharp = K$ la forme de Killing. Le nombre $k \in \mathbb{Z}$ est aussi dit *nombre d'instanton*.

[21] Qui dit essentiellement que sur $G \hookrightarrow P \to (X^4, g)$ compact *toute suite de connexions de YM dont l'énergie de YM est bornée est $\mathcal{G}$-équivalente à une suite qui admet une sous-suite C^∞-convergente [131].*

[22] Qui dit essentiellement que sur (M, ω, J) compacte *toute suite de sphères J-holomorphes dont l'énergie symplectique est bornée possède une sous-suite qui converge faiblement à une sphère J-holomorphe bouillie (ébullitionnée ?) (i.e. un arbre de sphères) [87].*

[23] Pour $G = \mathrm{SU}(2)$ il y a des singularités. Pour certains SO(3)-fibrés non triviaux il n'y en a pas [35, 97]. Voir [117] pour une description des singularités en termes d'*espaces symplectiques stratifiés*.

[24] i.e. la musicalité bémol symplectique $\omega|_A : T_A\mathcal{A}_\Sigma \to T_A^*\mathcal{A}_\Sigma$ est injective.

qui fait de $\mathcal{A}_\Sigma$ une variété symplectique de dimension infinie. Le groupe de jauge $\mathcal{G}_\Sigma$ agit de manière hamiltonienne sur $\mathcal{A}_\Sigma$. L'application moment correspondante $\mu : \mathcal{A}_\Sigma \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_\Sigma)^*$ a pour valeur en $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ la courbure F_A vue comme élément de l'espace dual[25] $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_\Sigma)^*$. L'ensemble $\mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ des connexions plates correspond à la préimage $\mu^{-1}(0)$. L'espace de modules $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ est une réduction de Marsden-Weinstein[26] $\mu^{-1}(0)/\mathcal{G}_\Sigma$ [86]. La structure symplectique sur $\mathcal{A}_\Sigma$ passe au quotient et donne à la partie régulière de l'espace possiblement singulier $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ une structure symplectique. L'espace $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ est de dimension finie[27].

En 1988 [45], Floer définit l'*homologie (de Floer) d'instantons* SU(2) *des 3-sphères d'homologies entières orientées*. Son homologie est dénotée $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y)$. Elle est de type Morse. La « fonction de Morse » est ici la fonctionnelle de Chern-Simons[28] $S_{\mathrm{CS}} : \mathcal{A}_Y \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur l'espace $\mathcal{A}_Y$ des connexions sur un SU(2)-fibré principal (forcément trivial[29]) $P_Y \longrightarrow Y$ sur une 3-sphère d'homologie entière[30] Y. Les points critiques de S_{CS} sont les connexions plates $A \in \mathcal{A}_Y^{\mathrm{fl}} \subset \mathcal{A}_Y$. Le complexe est engendré par les classes $[A] \in \mathcal{M}_Y^{\mathrm{fl},*}$ de connexions plates irréductibles[31]. L'intérêt de ne considérer qu'une 3-sphère d'homologie entière Y est que la seule classe de jauge de connexions plates *réductibles* est celle de la connexion *triviale*[32] (que l'on peut négliger et que l'on néglige). Les courbes gra-

---

[25] Via l'identification $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_\Sigma) = \Omega^0(\Sigma; \mathrm{Ad}P_\Sigma)$ et via l'appariement de dualité naturel donné par intégration $\Omega^2(\Sigma; \mathrm{Ad}P_\Sigma) \times \Omega^0(\Sigma; \mathrm{Ad}P_\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}; (\eta, \varphi) \mapsto \int_\Sigma \eta \wedge^\kappa \varphi$.

[26] Attention : seule la composante identité connexe $(\mathcal{G}_\Sigma)_0 < \mathcal{G}_\Sigma$ agit de manière hamiltonienne.

[27] $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}} = 2(g-1) \dim G$ pour $g \geq 2$ le genre de Σ et G compact et simplement connexe. Les genres $g \in \{0, 1\}$ causent des problèmes puisque toutes les représentations $\pi_1(\Sigma) \longrightarrow G$ sont alors réductibles [8], p.25. Plus bas on considérera pour groupe structurel SU(2) ou SO(3) (qui n'est pas simplement connexe) et l'on prendra alors pour acquis que $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}} = 6g - 6$ pour $g \geq 2$.

[28] La fonctionnelle de Chern-Simons $S_{\mathrm{CS}}[A_\mu] = \int_Y \mathrm{Tr}(\frac{1}{2} A_\mu \wedge dA_\mu + \frac{1}{3} A_\mu \wedge A_\mu \wedge A_\mu)$ n'est pas une véritable fonction de Morse puisque ses points critiques (les connexions plates) sont dégénérés sur $\mathcal{A}_Y$. Il faut quotienter par le groupe de jauge pour avoir des points critiques non dégénérés. La fonctionnelle de Chern-Simons passe au quotient mais devient une fonction non plus réelle mais à valeurs en le cercle. Cette fonction à valeurs en S^1 peut encore avoir des points critiques dégénérés. On perturbe alors cette fonction pour avoir une véritable fonction de Morse à valeurs S^1 [39].

[29] Sachant que $\mathrm{SU}(2) \simeq S^3$ et que $\pi_k(S^3) = \{0\}$ pour $k = 0, 1, 2$, l'image du 2-squelette de Y en SU(2) par les applications de recollement s'homotope à l'identité $e \in \mathrm{SU}(2)$.

[30] i.e. une 3-variété fermée qui a la même homologie entière qu'une 3-sphère.

[31] Une connexion $A \in \mathcal{A}$ est dite *irréductible* si son groupe d'holonomie H agit de manière irréductible sur la représentation canonique du groupe matriciel G. Pour $G = \mathrm{SU}(2)$, A est irréductible si et seulement si le groupe de jauge $\mathcal{G}$ agit localement librement sur cette connexion [33].

[32] Donnée une section trivialisante globale $s_\mu : Y \longrightarrow P_Y$ du fibré trivial P_Y, la *connexion triviale* est celle telle que $A_\mu := s_\mu^* A = 0 \in \Omega^1(Y; \mathfrak{g})$, i.e. dont le graphe $\Gamma_\mu := s_\mu(Y) \subset P_Y$ est horizontal.

dient de S_{CS} reliant asymptotiquement deux connexions plates sur Y décrivent un instanton de YM sur $X = Y \times \mathbb{R}$. La graduation relative est sur $\mathbb{Z}_8$ et définie en termes de flot spectral. La motivation première de Floer à définir son homologie d'instantons était la suivante. Bien qu'en dimension 4 les structures différentielles des variétés topologiques ne sont pas toutes équivalentes (par Donaldson [28]), en dimension 3 les structures différentielles sont toutes équivalentes. Ainsi, un invariant *différentiel*, tel que la *représentation holonomie* du $\pi_1(Y)$ via des connexion plates irréductibles est un bon candidat pour étudier le groupe fondamental des 3-variétés[33]. En particulier, l'holonomie d'une connexion plate SU(2) détecte l'aspect non abélien du $\pi_1(Y)$. Philosophiquement parlant, Floer s'est inspiré[34] de la vision *quantique* de Witten de la théorie de Morse : les *fonctions d'ondes* de Witten (i.e. des k-formes différentielles) sont ici des connexions plates qui jouent le rôle d'*états fondamentaux* d'une théorie des champs quantiques et le *tunnellage quantique d'un état fondamental à un autre* est ici un instanton de YM reliant asymptotiquement deux connexions plates.

> *À partir d'ici, les homologies de Floer subséquentes décrites dans le présent document ne sont plus tant motivées par la conjecture d'Arnol'd ou la topologie de basse dimension que par la conjecture d'Atiyah-Floer et ses variantes (que j'énoncerai sous peu).*

Avant de passer à la conjecture d'Atiyah-Floer et ses variantes, révisons rapidement le *produit de Donaldson* associatif que Donaldson a donné à l'homologies de Floer hamiltonienne, à la cohomologie de Floer lagrangienne et à l'homologie de Floer d'instantons [31, 55, 109, 110]. Ils sont induits au niveau des (co-)chaînes par un produit non associatif.

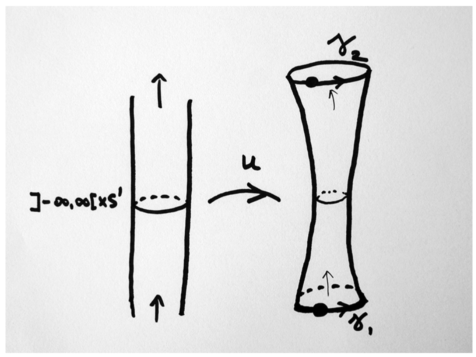
[33]Posons $\mathrm{Hom}(\pi_1(Y), \mathrm{SU}(2)) := \{\rho : \pi_1(Y) \xrightarrow{homom.} \mathrm{SU}(2)\}$. L'espace de modules $\mathcal{M}_Y^{\mathrm{fl}}$ des connexions plates SU(2) sur Y connexe peut être interprété comme étant la *variété des caractères* $R(Y) := \mathrm{Hom}(\pi_1(Y), \mathrm{SU}(2))/\mathrm{SO}(3)$ où SO(3) agit par conjugaison. De même, la variété des caractères $R(\Sigma) = \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), \mathrm{SU}(2))/\mathrm{SO}(3)$ d'une surface connexe Σ correspond à $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$. Ce faisant, $\mathcal{M}_Y^{\mathrm{fl}} = R(Y)$ et $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}} = R(\Sigma)$. L'équivalent irréductible est $\mathcal{M}_Y^{\mathrm{fl},*} = R^*(Y)$ et $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl},*} = R^*(\Sigma)$.

[34]Inspiré au sens large. L'homologie $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y)$ ne donne pas l'homologie de Morse usuelle.

4 Produit de Donaldson sur les homologies de Floer

Produit sur l'homologie de Floer hamiltonienne :

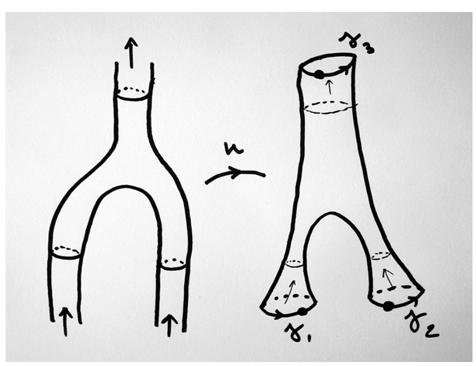
La différentielle du complexe de Floer hamiltonien dénombre les *tubes* J-holomorphes $u : \mathbb{R} \times S^1 \to M$ reliant asymptotiquement deux courbes intégrales 1-périodiques du champ vectoriel hamiltonien X_{H_t} sur (M, ω).



Le produit de Donaldson :

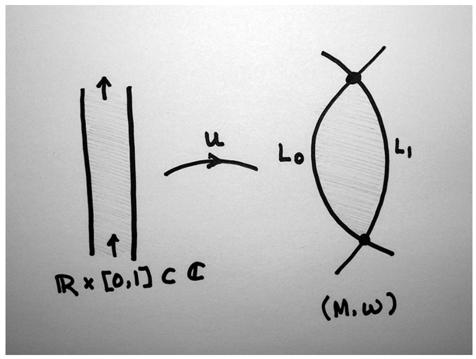
$$\mathrm{HF}_*^{\mathrm{ham}}(M, \phi_1) \otimes \mathrm{HF}_*^{\mathrm{ham}}(M, \phi_2) \to \mathrm{HF}_*^{\mathrm{ham}}(M, \phi_2 \circ \phi_1)$$

où $\phi_1, \phi_2, \phi_2 \circ \phi_1 \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$, est donné en dénombrant les *paires de pantalons* J-holomorphes reliant asymptotiquement trois orbites 1-périodiques (de ϕ_1, ϕ_2 et $\phi_2 \circ \phi_1$). Ces paires de pantalons sont l'image de paires de pantalons $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \setminus \{D_0, D_1, D_2\}$, où D_0, D_1 et D_2 sont des petits disques, de telle sorte qu'il y ait deux *entrées* et une *sortie*.



Produit sur l'homologie de Floer lagrangienne :

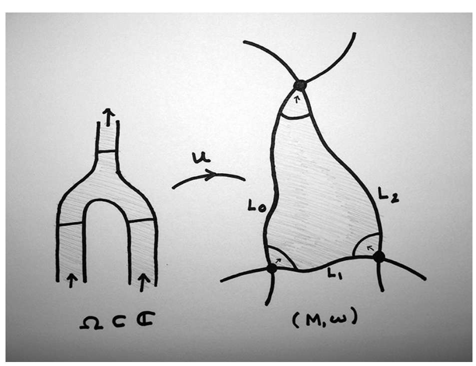
La différentielle du complexe de Floer lagrangien dénombre les *bandes* J-holomorphes $u : \mathbb{R}\times[0,1] \to M$ avec CBL et qui relient deux points d'intersections lagrangiens.



Le produit de Donaldson :

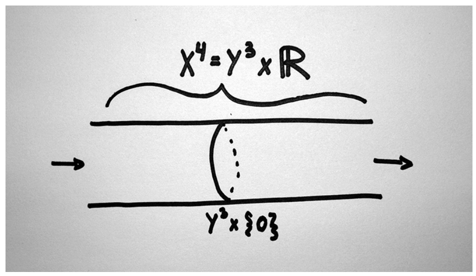
$$\mathrm{HF}^*_{\mathrm{lag}}(M, L_0, L_1) \otimes \mathrm{HF}^*_{\mathrm{lag}}(M, L_1, L_2) \to \mathrm{HF}^*_{\mathrm{lag}}(M, L_0, L_2)$$

où L_0, L_1, L_2 sont des lagrangiennes en (M, ω), est ici donné en dénombrant des *triangles* J-holomorphes avec CBL qui relient trois points d'intersections lagrangiennes. Ces triangles sont l'image de surfaces *demies paires de pantalons*. Une demie paire de pantalon est une paire de pantalon coupée sur la hauteur de telle sorte qu'il y ait deux *entrées* et une *sortie*.



<u>Produit sur l'homologie de Floer d'instantons :</u>

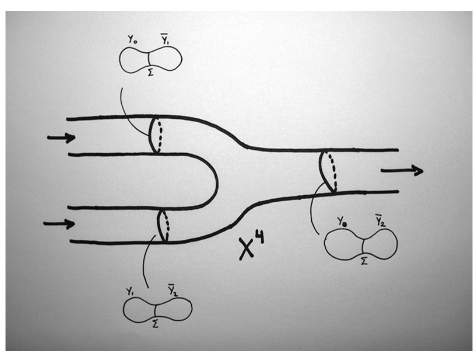
La différentielle du complexe de Floer d'instantons dénombre les instantons de YM sur le cobordisme trivial $X = Y \times \mathbb{R}$ qui tendent asymptotiquement vers des connexions plates à $t \longrightarrow \pm\infty$.



Le produit de Donaldson :

$$\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y_0 \underset{\Sigma}{\sqcup} \overline{Y}_1) \otimes \mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y_1 \underset{\Sigma}{\sqcup} \overline{Y}_2) \longrightarrow \mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y_0 \underset{\Sigma}{\sqcup} \overline{Y}_2)$$

où Y_0, Y_1, Y_2 sont des corps à anses orientés tels que $\partial Y_0 = \partial Y_1 = \partial Y_2 = \Sigma$ et où $\overline{Y}_1$ et $\overline{Y}_2$ dénotent l'orientation opposée, dénombre les instantons sur le *cobordisme paire de pantalons* (i.e. un cobordisme à trois branches : deux entrées et une sortie) qui tendent asymptotiquement à des connexions plates sur chaque branche.



Il est maintenant temps d'énoncer la conjecture d'Atiyah-Floer.

5 Conj. d'AF (version Atiyah [6])

5.1 Mise en contexte

Nous voici confrontés à trois homologies de Floer :

- $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{ham}}(M, \phi)$, l'homologie de Floer hamiltonienne ;
- $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{lag}}(M, L_0, L_1)$, l'homologie de Floer lagrangienne ;
- $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y)$, l'homologie de Floer d'instantons SU(2) pour 3-sphères d'homologies entières orientées.

Le lien entre l'homologie de Floer hamiltonienne et celle lagrangienne (ainsi que celle *pour applications symplectiques*, définie plus bas) est évident[35]. Mais y a-t-il un lien entre les homologies de Floer du côté *symplectique* et celle du côté *instantons* ? En 1987, Atiyah[36] conjecture que oui [6]. Avant d'énoncer sa conjecture, dite *conjecture d'Atiyah-Floer (AF)*, munissons-nous de :

- Y, une 3-sphère d'homologie entière orientée.
- $P_Y \to Y$, un SU(2)-fibré principal (forcément trivial) sur Y.
- $Y = Y_0 \bigsqcup_{\Sigma} Y_1$, un *scindement de Heegaard*[37] de Y en deux corps à anses Y_0, Y_1.
- $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}} = \mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}}/\mathcal{G}_\Sigma$, l'orbifold symplectique singulier de la surface Σ.
- $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$, les ensembles de connexions plates sur Σ qui s'étendent respectivement de part et d'autre à des connexions plates sur les corps à anses Y_0 et Y_1. Ce sont deux sous-variétés lagrangiennes de $\mathcal{A}_\Sigma$ qui passent au quotient et définissent deux sous-variétés lagrangiennes[38] $L_0, L_1 \subset \mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$.

---

[35]Attention : bien que l'HF hamiltonienne est un cas particulier pour ϕ hamiltonien de l'HF symplectique et que l'HF symplectique est un cas particulier de l'HF lagrangienne (en considérant les intersections lagrangiennes des graphes lagrangiens Γ_ϕ et Γ_{id} en $(M \times M, \omega \oplus -\omega)$), la construction de ces trois HF est différente et repose sur des conditions différentes. En particulier, selon [61], l'HF symplectique est loin d'être équivalente à celle lagrangienne.

[36]Selon [130], p.7, la conjecture viendrait non seulement d'Atiyah mais aussi de Floer.

[37]Il suffit de se donner une fonction de Morse $f : Y \to \mathbb{R}$, de choisir une valeur régulière r de f, de définir la surface plongée $\Sigma := f^{-1}(r) \subset Y$ et de définir $Y_0 := f^{-1}(]-\infty, r])$ et $Y_1 := f^{-1}([r, +\infty[)$.

[38]Selon [73], p.2, elles sont immergées. Selon [135] elles ont des singularités. Soit $\iota^* : R(Y_i) \to R(\Sigma)$ induite par $\iota : \Sigma \hookrightarrow Y_i$. Ici, $L_i = \iota^*(R(Y_i)) \subset R(\Sigma)$. Selon [55], milieu de p.4, les lagrangiennes L_i sont des sous-variétés singulières et l'application ι^* est injective. Mais au bas de la p.4 et haut de p.5 il est dit que ι^* est, même après perturbation, qu'une immersion et non un plongement.

5.2 Énoncé de la conjecture d'Atiyah-Floer

Ayant ces données en main, ce qu'Atiyah conjecture en [6], p.293, se résume à :

> *Soit Y une 3-sphère d'homologie entière orientée et $Y = Y_0 \sqcup_\Sigma Y_1$ un scindement de Heegaard. Il est alors raisonnable de conjecturer que les groupes d'homologies de Floer* $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{lag}}(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, L_0, L_1)$ *coïncident, en faisant attention aux singularités de $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$, avec les groupes d'homologies de Floer* $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y)$ *d'instantons* $\mathrm{SU}(2)$.

Atiyah soutient alors sa conjecture par les deux remarques suivantes :

1. Les classes de jauge de connexions plates sur Y sont à la fois les générateurs du complexe de Floer d'instantons et à la fois les générateurs du complexe de Floer d'intersections lagrangiennes :
$$R(Y) = R(Y_0 \sqcup_\Sigma Y_1) = R(Y_0) \cap R(Y_1) \subset R(\Sigma)$$
2. Donnons à la surface de Heegaard Σ une métrique riemannienne $\tilde{g}$ et à $\Sigma \times [0,1] \times \mathbb{R}$ la métrique $g = \tilde{g} + ds \otimes ds + \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t$ où $(s,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}$. Une connexion sur $\Sigma \times [0,1] \times \mathbb{R}$ s'écrit $A = A_{s,t} + \varphi_{s,t} ds + \psi_{s,t} dt$ pour $A_{s,t}$ sans ds ni dt. L'équation anti-auto-duale (ASD[39]) $\star_g F_A = -F_A$ est équivalente à $\star_{\tilde{g}} F_{A_{s,t}} = \varphi_{s,t}^{(t)} - \psi_{s,t}^{(s)} - [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]$ et $\star_{\tilde{g}} \left(\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - A_{s,t}^{(s)} \right) = \mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - A_{s,t}^{(t)}$ où $\star_{\tilde{g}}$ est une structure complexe sur $\mathcal{A}_\Sigma$. Lorsque $\varphi_{s,t} = \psi_{s,t} = 0$, ou lorsqu'on fait dégénérer la métrique[40] sur Σ, l'équation ASD devient l'équation de CR d'une bande $\star_{\tilde{g}}$-holomorphe $A_{s,t}$ en $\mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$. Ce faisant, les instantons ASD correspondent à des bandes $\star_{\tilde{g}}$-holomorphes qui relient asymptotiquement à $t \to \pm\infty$ les points d'intersections lagrangiennes $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{L}_1$. Donc, il doit *raisonnablement* y avoir une correspondance entre l'homologie de Floer d'instantons et l'homologie de Floer d'intersections lagrangiennes.

La version *forte* de la conjecture d'AF stipule qu'il existerait non seulement un isomorphisme d'espaces vectoriels entre les homologies de Floer mais un isomorphisme d'*anneaux* pour le produit de Donaldson sur ces homologies [31].

[39] En 1983, Donaldson délaisse les connexions SD [28] au profit des connexions ASD [30].

[40] Atiyah [6], p.293, suggère d'*étirer le cou* de $\Sigma \times [0,1] \subset Y$ sans expliciter la déformation.

5.3 Trois remarques

Remarque : J'entendrai par *conjecture d'AF proposée par Atiyah* celle ayant pour contexte un scindement de Heegaard d'une 3-sphère d'homologie entière orientée et $G = \mathrm{SU}(2)$.

Remarque : La conjecture d'AF proposée par Atiyah n'est pas bien définie. En effet, poser une *bonne* définition de $\mathrm{HF}^{\mathrm{lag}}_*(\mathcal{M}^{\mathrm{fl}}_\Sigma, L_0, L_1)$ sur l'espace singulier $\mathcal{M}^{\mathrm{fl}}_\Sigma$ reste, encore à ce jour, une question ouverte.

Remarque : L'isomorphisme conjecturé doit être indépendant du scindement de Heegaard. Différents scindements donnent lieu à différentes lagrangiennes. La conjecture donnerait donc aussi lieu à un isomorphisme entre homologies de Floer d'intersections lagrangiennes pour diverses lagrangiennes ([134], p.22).

5.4 Avancées de Taubes, de Yoshida et de Lee et Li

En 1990, Taubes [123] a démontré que la conjecture d'AF est vraie au niveau de la caractéristique d'Euler. Plus précisément, les caractéristiques d'Euler des deux homologies de Floer concordent avec le double de l'invariant de Casson de Y ([134] p.1, [153] p.278).

En 1992, Yoshida [154] a, selon [54], analysé les intersections lagrangiennes en l'orbifold singulier $\mathcal{M}^{\mathrm{fl}}_\Sigma$. Il a établi des conditions nécessaires à la définition de $\mathrm{HF}^{\mathrm{lag}}_*(\mathcal{M}^{\mathrm{fl}}_\Sigma, L_0, L_1)$. Il a aussi démontré que, lorsque ces conditions sont satisfaites, la conjecture d'Atiyah-Floer est vraie (voir le théorème 5.5 à la p.78 de [54]). Hélas, je n'ai pas trouvé le préprint de Yoshida donc ne peut en dire plus.

En 1995, Lee et Li [80], p.23, définissent en préprint une homologie de Floer d'intersections lagrangiennes $\mathrm{HF}^{\mathrm{lag}}_*(R^*(Y_0), R^*(Y_1); R^*(Y_2))$, où $Y_2 = \Sigma \times [0,1]$, dans l'espace de modules $R^*(\Sigma)$ des connexions SU(2) irréductibles pour un scindement de Heegaard $Y = Y_0 \sqcup_\Sigma Y_1$. Leur théorème principal stipule qu'en perturbant l'équation CR et celle ASD, on obtient l'isomorphisme $\mathrm{HF}^{\mathrm{inst}}_*(Y) \cong \mathrm{HF}^{\mathrm{lag}}_*(R^*(Y_0), R^*(Y_1); R^*(Y_2))$. Selon [55], p.4, le préprint [80] de Lee et Li ne fait qu'annoncer une preuve de la conjecture d'Atiyah-Floer. Continuons avec l'approche de Salamon et Wehrheim.

5.5 Avancées de Salamon et Wehrheim

En 1992, Salamon [109] présente en détails la conjecture d'Atiyah-Floer proposée par Atiyah. Le programme qu'il propose pour la résoudre est en deux étapes :

1. Définir l'homologie de Floer d'instantons SU(2) avec CBL.
2. Démontrer la conjecture d'Atiyah-Floer par limite adiabatique.

Résolution de la première étape :

En 1992, Salamon [109], entame la définition[41] de l'*homologie de Floer d'instantons* SU(2) *avec CBL* $\mathcal{L}$ qu'il dénote $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y, \mathcal{L})$. C'est-à-dire, donné un SU(2)-fibré principal (trivial) $P_Y \longrightarrow Y$ sur une 3-variété Y à bord $\Sigma = \partial Y$, il considère les connexions ASD sur $Y \times \mathbb{R}$ telles que leur restriction à $\Sigma \times \{t\} \subset Y \times \mathbb{R}$ repose en une certaine lagrangienne $\mathcal{G}_\Sigma$-invariante $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ fixée. Le but de l'homologie de Floer d'instantons SU(2) avec CBL est de déplacer le problème des singularités des lagrangiennes en $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ à des problèmes de transversalités ([134], p.3). Salamon poursuivra son programme avec, entre autres, Katrin Wehrheim [111, 130, 132, 133, 134].

En 2004, Wehrheim [132] établit, sous certaines conditions, des propriétés de compacité et de régularité ainsi que la théorie Fredholm. La même année, en [133], elle complète les fondements analytiques de l'homologie de Floer d'instantons SU(2) avec CBL (quantification de l'énergie, compacité, singularités évitables). La définition complète de l'homologie de Floer d'instantons SU(2) avec CBL sera entièrement décrite en 2008 [111]. La première étape du projet de Salamon est alors franchise.

Vers une résolution de la seconde étape ?

Maintenant que l'homologie de Floer d'instantons SU(2) avec CBL est bien définie (sous certaines conditions), en 2005 Wehrheim [134] commence à s'attaquer à la procédure de limite adiabatique proposée par Salamon [109] en 1992. Donné un scindement de Heegaard $Y = Y_0 \bigsqcup_\Sigma Y_1$, l'idée est de démontrer les deux isomor-

[41] *Entamer une définition* au sens où la définition d'une homologie de Floer particulière consiste en fait à démontrer un théorème stipulant que $\partial^2 = 0$.

phismes suivants en utilisant deux limites adiabatiques différentes :

$$\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(\Sigma \times [0,1], \mathcal{L}_{Y_0} \times \mathcal{L}_{Y_1}) \cong \mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y)$$
$$\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(\Sigma \times [0,1], \mathcal{L}_{Y_0} \times \mathcal{L}_{Y_1}) \cong \mathrm{HF}_*^{\mathrm{lag}}(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, L_{Y_0}, L_{Y_1})$$

Ici, $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(\Sigma \times [0,1], \mathcal{L}_{Y_0} \times \mathcal{L}_{Y_1})$ est l'homologie de Floer d'instantons SU(2) avec CBL, $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y)$ est l'homologie de Floer d'instantons SU(2) usuelle et $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{lag}}(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, L_{Y_0}, L_{Y_1})$ est l'homologie de Floer d'intersections lagrangiennes (encore à définir). Démontrer ces deux isomorphismes démontrerait, transitivement, la conjecture originale d'Atiyah-Floer SU(2) pour scindements de Heegaard :

$$\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y) \cong \mathrm{HF}_*^{\mathrm{lag}}(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, L_{Y_0}, L_{Y_1})$$

Encore une fois, la version forte de la conjecture demanderait de démontrer que les isomorphismes préservent le produit de Donaldson.

Selon Wehrheim, bien que le premier isomorphisme est accessible, le second l'est drastiquement moins. L'homologie de Floer d'intersections lagrangiennes n'est toujours pas définie sur l'espace singulier $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$. Ce que propose Wehrheim en [134] est de passer par l'*équation de vortex symplectique*[42] en $\mathcal{A}_\Sigma$ et les invariants de Gromov-Witten en $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ [23, 63]. En [63], les courbes J-holomorphes qui vivent dans un quotient symplectique[43] sont vues comme limites adiabatiques de solutions à l'équation de vortex symplectique sur l'espace total. Une telle approche pourrait, via une éventuelle cohomologie quantique de $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$, permettre de définir une homologie de Floer pour intersections lagrangienne dans l'espace singulier $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ en faisant correspondre les courbes J-holomorphes en $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ aux solutions de l'équation de vortex symplectique sur $\mathcal{A}_\Sigma$.

L'aspect singulier de $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ est un réel problème. Plusieurs variantes de la conjecture ont été proposées justement dans le but d'éviter ce problème. Épluchons maintenant ces variantes.

[42]Voir [88] p.487, [134] p.22, [53] p.38, [63] p.129, [151] p.5 et [23] p.2.

[43]Ici la réduction de Marsden-Weinstein $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}} = \mu^{-1}(0)/\mathcal{G}_\Sigma$ discutée plus haut.

6 Conj. d'AF (version Floer [35])

6.1 Deux nouvelles homologies de Floer

En 1992, Dostoglou et Salamon [35] définissent[44] l'*homologie de Floer d'instantons* SO(3) dénotée $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y, P_Y)$. Au lieu d'un SU(2)-fibré principal trivial sur une 3-sphère d'homologie entière Y, ils considèrent un SO(3)-fibré principal non trivial $P_Y \longrightarrow Y$ sur une 3-variété fermée Y qui n'est *pas* une 3-sphère d'homologie. Puisque SU(2) est un double recouvrement de SO(3), la graduation de $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y, P_Y)$ est sur $\mathbb{Z}_4$ et non $\mathbb{Z}_8$ [54].

Toujours en 1992, Dostoglou et Salamon [35] définissent[45] l'*homologie de Floer (pour les points fixes d'une application) symplectique* $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{symp}}(M, \phi)$ des variétés symplectiques (M, ω) simplement connexes, compactes et monotones. L'homologie de Floer symplectique généralise l'homologie de Floer hamiltonienne en considérant désormais des symplectomorphismes $\phi \in \mathrm{Symp}(M, \omega)$ qui ne sont plus forcément exacts ni isotopes à l'identité. Le complexe est engendré sur $\mathbb{Z}_2$ par les points fixes de ϕ. La différentielle du complexe dénombre les courbes J_s-holomorphes[46] $u : \mathbb{C} \longrightarrow M$ reliant asymptotiquement les points fixes $x^\pm \in \mathrm{Fix}(\phi)$, i.e. $\lim_{t\to\pm\infty} u(s,t) = x^\pm$, soumises à la *condition de périodicité* $u(s+1, t) = \phi(u(s,t))$. L'homologie $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{symp}}(M, \phi)$ est invariante sous isotopie symplectique. Sa caractéristique d'Euler est le nombre de Lefschetz de ϕ. Dostoglou et Salamon remarquent que l'utilisation d'un anneau de Novikov[47] pourrait étendre $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{symp}}(M, \phi)$ aux variétés symplectiques non simplement connexes.

---

[44]En fait, Floer avait non seulement défini l'homologie de Floer d'instantons SU(2) en [45], mais aussi celle SO(3) en [50]. Néanmoins, ce manuscrit *circa* 1989 est inachevé.

[45]Selon François Laudenbach [78], c'est Dostoglou et Salamon [35] qui ont introduit l'homologie de Floer symplectique. Selon Fukaya [54], elle fut introduite en parallèle par Yoshida [154]. L'homologie de Floer symplectique sera explicitement calculée en 1996 par Paul Seidel [112] pour le cas des *twists de Dehn* le long d'une *multi-courbe*.

[46]i.e. $\partial_s u(s,t) + J_s(u(s,t))\partial_t u(s,t) = 0$ où $J_s \in \mathcal{J}(M, \omega)$ est une famille lisse de structures presque-complexes ω-compatibles (i.e. $g_{J_s} := \omega(\cdot, J_s \cdot)$ struct. riem.) vérifiant $J_s = \phi^* J_{s+1}$.

[47]Selon Ruan et Tian [108], l'idée d'utiliser un anneau de Novikov en symplectique (en particulier dans un contexte d'homologie de Floer) fut introduite par Hofer et Salamon [71]. Salamon et Hofer indiquent que leur idée est inspirée d'une remarque de Floer en [48], p.579. Floer y indique pour sa part que sa remarque est inspirée de la thèse de Jean-Claude Sikorav [115] et de l'article original de Novikov [98]. Novikov avait posé son anneau dans le but de définir une théorie de Morse pour fonctions à valeurs S^1, i.e. pour 1-formes différentielles fermées entières. Une telle situation apparaît, par exemple, en HF d'instantons et en HF symplectique [116].

Alors que Floer avait introduit ses (co-)homologies (de Floer) lagrangiennes et hamiltoniennes dans le but de s'attaquer à la conjecture d'Arnol'd, l'homologie de Floer symplectique et celle d'instantons SO(3) de Dostoglou et Salamon furent motivées par une autre conjecture : celle d'*Atiyah-Floer proposée par Floer*, alias *conjecture d'Atiyah-Floer pour les tores d'applications*.

6.2 Énoncé de la conjecture

La conjecture d'Atiyah-Floer proposée par Atiyah est particulièrement embêtante : l'espace $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}}$ est singulier. Floer propose alors à Dostoglou et Salamon [35] une variante de la conjecture originale qui semble plus accessible. Munissons-nous des données suivantes :

- Donnons-nous une surface Σ fermée de genre $g \geq 2$.
- Donnons-lui l'unique SO(3)-fibré principal $\pi : P_\Sigma \longrightarrow \Sigma$ non trivial.
- Considérons l'espace de modules $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}} := \mathcal{A}_\Sigma^{\text{fl}}/(\mathcal{G}_\Sigma)_0$ où $(\mathcal{G}_\Sigma)_0$ est la composante identité de $\mathcal{G}_\Sigma$. En utilisant les résultats de Newstead [97], Dostoglou et Salamon [35], p.19-20, montrent que $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}}$ est une variété symplectique sans singularités, compacte, connexe, simplement connexe, de dimension $6g-6$ qui vérifie $\pi_2(\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}}) = \mathbb{Z}$.
- Donnons-nous un automorphisme $\tilde{f} \in \text{Aut}(P_\Sigma)$. Il lui correspond un difféomorphisme $f \in \text{Diff}(\Sigma)$ donné par $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$.
- L'application $\tilde{f} \in \text{Aut}(P_\Sigma)$ induit, par rappel, un symplectomorphisme[48] $\tilde{\phi}_{\tilde{f}}$ de $\mathcal{A}_\Sigma$ qui induit à son tour un symplectomorphisme $\phi_{\tilde{f}} \in \text{Symp}(\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}}, \omega)$, défini par $\phi_{\tilde{f}}([A]) := [\phi_{\tilde{f}}^* A]$ pour $A \in \mathcal{A}_\Sigma^{\text{fl}}$.
- Les applications f et $\tilde{f}$ induisent des *tores d'applications*[49] :

$$Y_f := (\Sigma \times \mathbb{R})/\sim \quad \text{où} \quad (x,s) \sim (f(x), s+1), \quad \forall (x,s) \in \Sigma \times \mathbb{R}$$

$$P_{Y_f} := (P_\Sigma \times \mathbb{R})/\sim \quad \text{où} \quad (a,s) \sim (\tilde{f}(a), s+1), \quad \forall (a,s) \in P_\Sigma \times \mathbb{R}$$

- Considérons l'homologie de Floer d'instantons SO(3) $\text{HF}_*^{\text{inst}}(Y_f, P_{Y_f})$.

[48] Il est aussi possible [64, 109] de considérer l'action de groupe symplectique du *groupe des classes d'applications* $\text{MCG}(\Sigma) := \text{Aut}(\Sigma)/\text{Aut}_0(\Sigma)$ sur $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}}$ qui préservent l'orientation de Σ.

[49] En [35, 36, 37, 109] Dostoglou et Salamon disent « *mapping cylinder* ». Mais dans les faits, ils considèrent un *tore* d'application et non un *cylindre* d'application [68] (la bonne terminologie sera adoptée cinq ans plus tard en [110]). Remarque : l'avantage de considérer $(P_\Sigma \times \mathbb{R})/\sim$, au lieu de $(P_\Sigma \times [0,1])/\sim$ pour $(a,0) \sim (\tilde{f}(a), 1)$, est de ne pas avoir le bord de $P_\Sigma \times [0,1]$ dans les jambes lorsqu'on représente les connexions sur P_{Y_f} par des connexions périodiques sur $P_\Sigma \times \mathbb{R}$.

Ayant ces données en main, la *conjecture d'AF pour les tores d'applications*[50] consiste en un éventuel isomorphisme entre l'homologie de Floer d'instantons SO(3) d'un tore d'application et l'homologie de Floer symplectique :

$$\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y_f, P_{Y_f}) \cong \mathrm{HF}_*^{\mathrm{symp}}(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, \phi_{\tilde{f}})$$

Tout comme pour la conjecture d'AF proposée par Atiyah, une version *forte* de la conjecture d'AF pour les tores d'applications est que l'isomorphisme conjecturé respecte le produit de Donaldson. Remarquons que les tores d'applications ne sont *pas* des sphères d'homologie puisque le premier nombre de Betti de Y_f est non nul. La conjecture d'AF pour les tores d'applications n'est donc pas un cas particulier de celle proposée par Atiyah.

6.3 Résolution de la conjecture proposée par Floer

En 1992, Dostoglou et Salamon [36] commencent à s'attaquer à la conjecture d'AF pour les tores d'applications. Les générateurs du complexe de Floer symplectique concordent avec ceux du complexe de Floer d'instantons SO(3). Le résultat principal de [36] est que les indices de Morse relatifs du côté *symplectique* et du côté *instantons* sont égaux :

$$\mu^{\mathrm{symp}}(a^-, a^+) = \mu^{\mathrm{inst}}(a^-, a^+)$$

Ce faisant, la graduation relative des complexes de chaînes de part et d'autre est la même. Il reste à démontrer que les différentielles concordent. Dostoglou et Salamon publieront une idée de la preuve de cette dernière correspondance en 1992 en [35]. Les détails analytiques seront donnés[51] en 1994 en [37]. Le théorème principal de [37] est l'isomorphisme naturel conjecturé par Floer :

$$\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y_f, P_{Y_f}) \cong \mathrm{HF}_*^{\mathrm{symp}}(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, \phi_{\tilde{f}})$$

En particulier, pour $f = \mathrm{id}_\Sigma$, ils trouvent :

$$\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(\Sigma \times S^1, P \times S^1) \cong H_*(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, \mathbb{Z})$$

Leur preuve procède par limite adiabatique en faisant tendre le volume de la surface Σ vers zéro (ainsi l'équation ASD tend vers l'équation de CR perturbée).

[50] Par la note de bas de page qui précède, la conjecture est le plus souvent nommée, à tort, *conjecture d'AF pour les cylindres d'applications.*

[51] Il y aura des erreurs dans leur preuve. Les corrections seront apportées en 2007 dans un *corrigendum* [38].

En 1999, Salamon [110] démontre que l'isomorphisme naturel obtenu au niveau des chaînes en [37] respecte (à signe près) les produits de Donaldson en homologie :

$$\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y_{f_0}, P_{Y_{\tilde{f}_0}}) \otimes \mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y_{f_1}, P_{Y_{\tilde{f}_1}}) \otimes \ldots \otimes \mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y_{f_n}, P_{Y_{\tilde{f}_n}}) \to \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{HF}_*^{\mathrm{symp}}(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, \phi_{\tilde{f}_0}) \otimes \mathrm{HF}_*^{\mathrm{symp}}(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, \phi_{\tilde{f}_1}) \otimes \ldots \otimes \mathrm{HF}_*^{\mathrm{symp}}(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, \phi_{\tilde{f}_n}) \to \mathbb{Z}$$

En corollaire[52], en utilisant l'isomorphisme PSS [104], l'anneau de cohomologie quantique $\mathrm{QH}^*(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}})$ de $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ est isomorphe à l'anneau de l'homologie de Floer $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(\Sigma \times S^1, P \times S^1)$ d'instantons SO(3) de $\Sigma \times S^1$.

La preuve de Salamon de l'isomorphisme d'anneau utilise deux fibrations symplectiques $(\Sigma, \omega_\Sigma) \hookrightarrow X \to S$ et $(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, \omega) \hookrightarrow W \to S$ sur $S = \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \backslash \{z_0, \ldots, z_n\}$. La fibration symplectique[53] $(\Sigma, \omega_\Sigma) \hookrightarrow X \to S$ a une holonomie symplectique f_j autour du j-ième trou pour une certaine famille $f_0, \ldots, f_n \in \mathrm{Symp}(\Sigma, \omega_\Sigma)$ telle que $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_0 = \mathrm{id}_\Sigma$. Elle généralise la fibration $\Sigma \hookrightarrow Y_f \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ du tore d'application considéré plus haut, i.e. à deux trous $S^1 \times \mathbb{R} = \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \backslash \{z_0, z_1\}$. L'idée est de voir X comme étant un cobordisme pour le produit de Donaldson sur l'homologie de Floer d'instantons SO(3). Ce produit est donné en dénombrant des connexions ASD sur X. La seconde fibration symplectique $(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, \omega) \hookrightarrow W \to S$ a une holonomie symplectique $\phi_{\tilde{f}_j} \in \mathrm{Symp}(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, \omega)$ autour du j-ième trou[54]. Le produit de Donaldson sur l'homologie de Floer symplectique est donné en dénombrant des sections pseudo-holomorphes du fibré symplectique $(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, \omega) \hookrightarrow W \to S$. La preuve de Salamon (qui fait correspondre les deux produits de Donaldson) procède encore par limite adiabatique.

[52]Ce corollaire a été obtenu de manière indépendante par Vicente Muñoz [95] en 1997 sans utiliser l'isomorphisme naturel démontré par Dostoglou et Salamon.

[53]La forme symplectique ω_Σ sur Σ est sa forme volume. C'est elle que Dostolou et Salamon [35, 36, 37, 110] font tendre en limite adiabatique vers zéro.

[54]Les $\tilde{f}_j$ sont des relevés à P des f_j sur Σ. Ils sont définis à transformation de jauge près. Puisque l'action de $\phi_{\tilde{f}_j}$ sur $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ est modulo transformation de jauge, les $\phi_{\tilde{f}_j}$ sont bien définis.

7 Conj. d'AF (version Fukaya [55])

7.1 Vers les catégories A_∞ de Fukaya

En 1993[55], Fukaya [55] entame la définition de l'*homologie de Floer d'instantons* SO(3) *pour 3-variétés à bord*. Une telle définition, à nouveau motivée par la conjecture d'Atiyah-Floer, généraliserait l'HF d'instantons SO(3) au cas où Y est à bord $\Sigma = \partial Y$. Son programme consiste d'une part en l'analyse[56] d'une *équation hybrique ASD-CR*[57] et d'autre part en une *théorie des champs quantiques topologique (TQFT) étendue* inspirée de Segal et Witten ([55], p.3). Une TQFT usuelle n-dimensionnelle est la donnée d'un certain nombre d'axiomes relativement à un foncteur allant de la catégorie des $(n+1)$-cobordismes de n-variétés *fermées* vers la catégorie des espaces vectoriels. La TQFT étendue de Fukaya considère plutôt les 4-cobordismes X de 3-variétés Y *à bord* $\partial Y = \Sigma$. Elle ajoute de plus un axiome portant sur un foncteur envoyant Σ à la catégorie $C(\Sigma)$ des foncteurs allant de la catégorie de Fukaya $\mathrm{Fuk}(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}})$ à la catégorie opposée[58] de la catégorie Ch des complexes de chaînes :

$$C(\Sigma) = \mathrm{Func}(\mathrm{Fuk}(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}), \mathrm{Ch}^{\mathrm{opp}})$$

Ouvrons une parenthèse. La catégorie A_∞ de Fukaya $\mathrm{Fuk}(M)$ d'une variété symplectique (M, ω) a pour objets les sous-variétés lagrangiennes $L \in \mathcal{L}$ d'une certaine classe $\mathcal{L}$ de lagrangiennes en M (e.g. monotones, exactes, etc.) et pour morphismes[59] les complexes de Floer $\mathrm{CF}(L, L') = \mathbb{Z}_2\langle L \pitchfork L'\rangle$ d'intersections lagrangiennes [17, 54]. La composition de morphismes est le produit triangulaire : il dénombre des triangles J-holomorphes avec CBL. La structure A_∞ sur les morphismes de $\mathrm{Fuk}(M)$ provient de l'algèbre A_∞ de Stasheff [120]. Le μ^1 est la *différentielle de Floer* qui dénombre des bandes J-holomorphes avec CBL. Le μ^2

[55]Le plus gros de la littérature dit 1997 (ainsi que Fukaya lui-même [57], p.79). Mais Salamon en 1994 [109], p.536, mentionne [55] comme étant un préprint datant de 1993.

[56]Thm. de *compacité* + *singularités évitables* hybride Uhlenbeck/Gromov et analyse Fredholm.

[57]L'équation d'Euler-Lagrange d'une intégrale d'action hybride *YM-énergie symplectique*.

[58]$\mathrm{Ob}(\mathrm{Ch}^{\mathrm{opp}}) = \mathrm{Ob}(\mathrm{Ch})$, mais les flèches des morphismes sont inversées.

[59]L'idée de voir les complexes de Floer comme morphismes de lagrangiennes peut sembler étrange. Néanmoins, du moins naïvement, L est égale à l'union $\cup_{L' \in \mathcal{L}}\{L \pitchfork L'\}$ de ses points d'intersections avec les autres lagrangiennes $L' \in \mathcal{L}$ (les points d'intersections étant les générateurs du complexe de Floer). La « topologie » sur l'ensemble de ces points d'intersections (i.e. les points de L) « correspond » aux courbes J-holomorphes reliant asymptotiquement ces points (encodées dans la différentielle μ^1 du complexe).

est le *produit triangulaire* qui dénombre des triangles J-holomorphes avec CBL. Les μ^k dénombrent des $(k+1)$-gones[60] J-holomorphes avec CBL. La catégorie A_∞ de Fukaya généralise, en contenant plus d'information mais étant plus difficile à calculer, la *catégorie de Donaldson*[61] $\mathrm{Don}(M)$. Les objets de $\mathrm{Don}(M)$ sont les lagrangiennes $L \in \mathcal{L}$, les morphismes sont les groupes de (co-)homologies de Floer d'intersections lagrangiennes $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{lag}}(L, L') = H_*(\mathrm{CF}(L, L'), \mu^1_{L,L'})$ et la composition de morphismes est le produit associatif de Donaldson induit par le produit triangulaire non associatif au niveau des (co-)chaînes. ***Fermons la parenthèse***.

Au lieu de s'attaquer de front à la conjecture d'Atiyah-Floer, Fukaya prend en [55] la conjecture comme axiome de sa TQFT étendue. Dans la conjecture d'AF, les lagrangiennes ne sont pas plongées mais génériquement *immergées* à perturbations près. Bien que les travaux portant sur les catégories A_∞ de Fukaya ont rapidement évolués dans les années subséquentes[62], les travaux de Fukaya portant sur la définition de son homologie de Floer d'instantons SO(3) pour 3-variétés à bord seront à l'arrêt en 1998. Ils reprendront en 2015 [57] après l'introduction des *bounding cochains* d'Akaho et Joyce [1] pour gérer les lagrangiennes immergées.

7.2 Énoncé de la conjecture

La principale difficulté de la conjecture d'AF proposée par Atiyah est la présence de singularités en $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$. En considérant un SO(3)-fibré principal non trivial $P_Y \to Y$ au lieu d'un SU(2)-fibré principal trivial ce problème disparaît. En 1993, Fukaya [55] propose alors, pour un SO(3)-fibré principal non trivial, la conjecture suivante :

> *Les groupes d'homologies de Floer* $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{lag}}(\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}, L_0, L_1)$ *coïncident avec les groupes d'homologies de Floer* $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y, P_Y)$ *d'instantons* SO(3).

[60]Un k-gone est un polygone à k côtés qui est l'image d'un disque D^2 ayant k bouts de type *bande* : on enlève k points du bord ∂D^2 et sur un petit voisinage de ces points on colle convenablement soit une demie bande $[0,1] \times [0,+\infty)$ soit une demie bande $[0,1] \times (-\infty, 0]$ de telle sorte qu'il y ait $k-1$ *entrées* et une *sortie*. Les bouts en bandes sont envoyés asymptotiquement vers les points d'intersections des lagrangiennes considérées. Les k-gones généralisent les bandes (des 2-gones).

[61]La catégorie de Donaldson est aussi nommée *catégorie de Donaldson-Fukaya*.

[62][FOOO1, FOOO2, FOOO3, FOOO4, FOOO5, etc.], de quoi virer fou.

7.3 Vers une résolution de la conjecture ?

Tel que décrit plus haut, en 1993 Fukaya [55] commence à définir une homologie de Floer d'instantons SO(3) pour 3-variétés à bord. Il s'intéresse à une équation hybride ASD-CR. En 1998, Fukaya [56] démontre deux résultats analytiques portant sur la compacité et sur les singularités évitables de l'espace de modules des solutions de l'équation hybride. Suivant [57], son article [56] manque l'analyse Fredholm. Ce travail est repris en 2015 [57][63]. Il y pose :

$$\mathrm{CF}(L) := H(L; \Lambda_0^{\mathbb{Z}_2}) \oplus \bigoplus_p \left(\Lambda_0^{\mathbb{Z}_2}\right)^2 [p]$$

où la somme directe est sur les points d'auto-intersection d'une lagrangienne immergée L et où $\Lambda_0^{\mathbb{Z}_2}$ est l'anneau de Novikov universel [61]. Le théorème[64] principal de [57] va comme suit :

Théorème : *Soit $P_Y \to Y$ un $\mathrm{SO}(3)$-fibré principal sur une 3-variété orientée Y qui se décompose comme $Y = Y_0 \sqcup_\Sigma Y_1$. Soient les $\mathrm{SO}(3)$-fibrés restreints $P_{Y_i} := P_Y|_{Y_i}$, $i \in \{0, 1\}$, et $P_\Sigma := P_Y|_\Sigma$. Supposons $w_2(P_{Y_1}) = [\Sigma] = w_2(P_{Y_2})$ (les fibrés $P_Y, P_{Y_1}, P_{Y_2}, P_\Sigma$ sont non triviaux). Alors :*

1. *Les sous-variétés lagrangiennes immergées $R(Y_i) \looparrowright R(\Sigma)$ sont, à perturbations près, sans obstruction au sens de [1, 61]. En particulier, il existe des bounding cochains b_{Y_i} de l'algèbre A_∞ filtrée $\mathrm{CF}(R(Y_i))$.*
2. $\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y, P_Y; \Lambda_0^{\mathbb{Z}_2}) \cong \mathrm{HF}_*^{\mathrm{lag}}((R(Y_0), b_{Y_0}), (R(Y_1), b_{Y_1}))$.
3. *Si $R(Y_i) \to R(\Sigma)$ est un plongement, alors $b_{Y_i} = 0$. En particulier, si les deux sous-variétés lagrangiennes $R(Y_0)$ et $R(Y_1)$ sont plongées, alors*

$$\mathrm{HF}_*^{\mathrm{inst}}(Y, P_Y) \cong \mathrm{HF}_*^{\mathrm{lag}}(R(Y_0), R(Y_1))$$

où le côté droit est l'HF d'une paire de sous-variétés lagrangiennes monotones. L'isomorphisme est entre homologies sur $\mathbb{Z}_2$ de graduation $\mathbb{Z}_4$.

En 2019, Xu [151] poursuit l'approche hybride ASD-CR en étudiant la compacité de l'espace de modules des connexions ASD sur $\mathbb{R} \times Y$ pour Y à bouts cylindriques.

[63]Sa présentation au LalondeFest en août 2015 portait sur cet article.

[64]Qui attend toujours les détails analytiques de [59, 60] ?

8 Conj. d'AF (version Wehrheim [135])

8.1 Vers la théorie des champs de Floer

En 2008, Wehrheim et Woodward [136] proposent une certaine *théorie des champs de Floer en dimension 2+1*. L'idée est d'associer à un cobordisme Y entre surfaces fermées un *invariant à valeurs fonctorielles*. Plus précisément, ils considèrent l'espace de modules $M(\Sigma)$ de certains fibrés vectoriels sur une surface fermée[65] Σ. Cet espace de modules $M(\Sigma)$ possède une structure symplectique. À un cobordisme Y_{01} entre deux surfaces Σ_0 et Σ_1 correspond[66] une *correspondance lagrangienne* L_{01} entre $M(\Sigma_0)$ et $M(\Sigma_1)$.

Ouvrons une parenthèse. Les correspondances lagrangiennes généralisent la notion de symplectomorphisme entre variétés symplectiques non symplectomorphes. C'est-à-dire, elles sont certaines sous-variétés lagrangiennes du produit $(M_1 \times M_2, (-\omega_1) \oplus \omega_2)$. Elles furent introduites par Weinstein [141, 143] au début des années '80 dans le but de définir une *catégorie symplectique* Symp. Les objets de Symp sont les variétés symplectiques et les morphismes sont les correspondances lagrangiennes. La *composition géométrique* de deux correspondances lagrangiennes $L_{01} \subset \overline{M}_0 \times M_1$ et $L_{12} \subset \overline{M}_1 \times M_2$ est définie par :

$$L_{01} \circ L_{12} := \{(x_0, x_2) \in M_0 \times M_2 | \exists x_1 \text{ t.q. } (x_0, x_1) \in L_{01}, (x_1, x_2) \in L_{12}\}$$

Tout comme les correspondances lagrangiennes généralisent les symplectomorphismes, la composition géométrique généralise la composition de symplectomorphismes. La catégorie[67] symplectique de Weinstein était, à l'époque, principalement motivée par la *quantification géométrique* : Weinstein voulait un foncteur allant de la catégorie symplectique à la *catégorie quantique* des espaces de Hilbert, ce qui a été paré par le théorème *no go* de Van Hove [65]. ***Fermons la parenthèse***

[65]Leur théorie est limitée aux cobordismes de surfaces *connexes*. Donc elle ne vérifie pas l'axiome du produit des TQFT usuelles [7, 148].

[66]L'idée qu'à un cobordisme Y_{01} entre surfaces Σ_0 et Σ_1 corresponde une correspondance lagrangienne était déjà souligné par Salamon en 1994 (voir le tableau de l'introduction en [109]). En effet, dans le cadre des espaces de modules de connexions plates, $R(Y_{01})$ est une lagrangienne en $R(\Sigma_0 \sqcup \Sigma_1) = R(\Sigma_0) \times R(\Sigma_1)$. Dans ce qui suit, nous verrons que la théorie des champs de Floer est essentiellement un mélange entre cette correspondance et la TQFT étendue de Fukaya.

[67]Ce n'est pas une vraie catégorie. Généralement, la composition de correspondances lagrangiennes est singulière ou encore immergée (donc pas une vraie *sous-variété* lagrangienne). Néanmoins, l'ajout d'une condition de transversalité [82, 140] fait de Symp une véritable catégorie.

À une correspondance lagrangienne L_{01} entre $M(\Sigma_0)$ et $M(\Sigma_1)$ ils associent un foncteur $\Phi(L_{01})$ entre les catégories de Donaldson-Fukaya[68] de $M(\Sigma_0)$ et $M(\Sigma_1)$:

$$\Phi(L_{01}) : \mathrm{Don}(M(\Sigma_0)) \to \mathrm{Don}(M(\Sigma_1))$$

Soit Bor_{2+1} la *catégorie des cobordismes décorés entre surfaces fermées décorées* : les objets sont les surfaces fermées décorées et les morphismes sont les cobordismes décorés entre ces surfaces. Soit Cat la *catégorie des catégories* : les objets sont les catégories et les morphismes sont les classes d'isomorphismes de foncteurs. On peut alors résumer ce qui précède comme suit. À un cobordisme $Y_{01} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Bor}_{2+1}}(\Sigma_0, \Sigma_1)$ entre deux surfaces $\Sigma_0, \Sigma_1 \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Bor}_{2+1})$ correspond une correspondance lagrangienne $L_{01} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Symp}}(M(\Sigma_0), M(\Sigma_1))$ à laquelle correspond un foncteur $\Phi(L_{01}) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\mathrm{Don}(M(\Sigma_0)), \mathrm{Don}(M(\Sigma_1)))$. En bref, on a deux foncteurs :

$$\mathrm{Bor}_{2+1} \to \mathrm{Symp} \to \mathrm{Cat}$$

La composition de ces deux foncteurs donne lieu au dit *invariant à valeurs fonctorielles* de cobordismes entre surfaces. Le foncteur $\Phi : \mathrm{Symp} \to \mathrm{Cat}$ est le *foncteur de catégorification* introduit en [138][69].

Jusqu'ici j'ai décrit la version *naïve* de la théorie des champs de Floer que propose Wehrheim et Woodward. En fait, en [138], la catégorie symplectique Symp est remplacée par la *catégorie symplectique généralisée* $\mathrm{Symp}^\sharp$: les objets sont les variétés symplectiques et les morphismes sont les classes d'équivalence de *correspondances lagrangiennes généralisées*[70] (voir la définition 2.3.5 de [136]). Cette même catégorie $\mathrm{Symp}^\sharp$ est ensuite remplacée par la *2-catégorie*[71] *de Weinstein-Floer* $\mathrm{Floer}^\sharp$: les objets sont les variétés symplectiques, les 1-morphismes sont les suites de correspondances lagrangiennes généralisées et les 2-morphismes sont les classes de cohomologie de Floer. De même, la catégorie de Donaldson-Fukaya Don est remplacée par une certaine *catégorie de Donaldson-Fukaya généralisée*

[68]La catégorie de Donaldson-Fukaya considérée par Wehrheim (définie en [138]) est la catégorie de Donaldson usuelle avec plus de structures : e.g. les lagrangiennes (i.e. les objets) sont munies de *structures de branes* [113], p.170.

[69]Cette construction se généralise en changeant la catégorie Cat par la catégorie $A_\infty\mathrm{Cat}$ des catégories A_∞ (e.g. celle de Fukaya) ou encore la catégorie $A_\infty 2\mathrm{Cat}$ des 2-catégories A_∞.

[70]Une correspondance lagrangienne généralisée $\underline{L}$ entre (M, ω) et (M', ω') est une suites de correspondances lagrangiennes $L_{i,i+1}, i \in \{0, \ldots, N-1\}$, entre variétés symplectiques intermédiaires (M_i, ω_i) et (M_{i+1}, ω_{i+1}) vérifiant $(M_0, \omega_0) = (M, \omega)$ et $(M_N, \omega_N) = (M', \omega')$.

[71]Une 2-catégorie a des objets, des 1-morphismes (i.e. des morphismes entre objets) et des 2-morphismes (i.e. des morphismes entre 1-morphismes).

$\mathrm{Don}^\sharp$ et la catégorie Bor_{2+1} est remplacée par la 2-catégorie Bor_{2+1+1} (où les objets sont les 2-variétés, les 1-morphismes sont les 3-cobordismes entre 2-variétés et où les 2-morphismes sont les 4-cobordismes entre 3-variétés).

8.2 Énoncé de la conjecture

Une fois que tout est reformulé en termes de 2-catégories généralisées, Wehrheim formule en ([135], p.74), dans le cadre de la théorie des champs de Floer en dimension 2+1+1 et de la cohomologie de Floer cuiltée[72], la *conjecture d'Atiyah-Floer cuiltée* :

> *Les trois théories des champs de Floer étendues*[73] $\mathrm{Bor}_{2+1+1} \to \mathrm{Symp}^G_{2+1}$, $\mathrm{Bor}_{2+1+1} \to \mathrm{SIn}_{2+1}$ *et* $\mathrm{Bor}_{2+1+1} \to \mathrm{DBor}_{2+1}$ *apparaissant d'un G-fibré approprié induisent des 2-foncteurs isomorphes* $\mathrm{Bor}_{2+1+1} \to \mathrm{Cat}$.

Ou encore, informellement :

> *La (co)homologie d'instantons est isomorphe à la cohomologie de Floer cuiltée.*

Wehrheim affirme que sa conjecture englobe toutes les autres variantes de la conjecture d'Atiyah-Floer (dont celles énoncées en [135], p.30 et p.32). En effet, un scindement de Heegaard $Y = Y_0 \bigsqcup_\Sigma Y_1$ peut être vu comme étant une suite de cobordismes :

$$\{\mathrm{pt.}\} \xrightarrow{Y_0} \Sigma \xrightarrow{Y_1} \{\mathrm{pt.}\}$$

De même, le tore d'application de Dostoglou et Salamon peut être vu comme étant un cobordisme allant de Σ à Σ (avec recollement).

---

[72] *Quilted Floer cohomology*. Le mot *quilt* vient de l'ancien français *cuilte*. On pourrait aussi dire *matelassé* ou encore *de courtepointe*. Le *cuiltage* dont parle Wehrheim consiste en une *cuilte pseudo-holomorphe*, i.e. une suite de courbes pseudo-holomorphes recollées par une correspondance lagrangienne généralisée *cyclique* (i.e. allant de (M, ω) à (M, ω)). Voir [139] pour plus de détails ou encore l'illustration en [20], p.2.

[73] Voir [135] p.71, 72 et 74 respectivement pour la définition de la 2-catégorie des 2+1 bordismes de Donaldson DBor_{2+1}, de la 2-catégorie des instantons symplectiques SIn_{2+1} et de la 2-catégorie des 2+1 bordismes symplectiques de G-représentations Symp^G_{2+1}.

9 Conj. d'AF (version Duncan [39])

9.1 Mise en contexte

Voici un autre contexte qui s'insère comme cas particulier de la théorie des champs de Floer, mais qui généralise celui du tore d'application de Dostoglou et Salamon. C'est l'approche adoptée par Duncan dans sa thèse [39] en 2013. Considérons une fonction de Morse homotopiquement non triviale $f : Y \to S^1$ à valeurs en le cercle sur une 3-variété Y telle que $b_1(Y) \neq 0$. Soit N le nombre de points critiques de f, tous supposés d'indice de Morse 1 ou 2. Donnons-nous une suite $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{N-1} < \theta_N = 2\pi \equiv 0 = \theta_0$ en S^1 où les θ_i sont des valeurs régulières de f. Posons :

$$\Sigma_i := f^{-1}(\theta_i) \quad \text{et} \quad Y_{i,i+1} := f^{-1}([\theta_i, \theta_{i+1}]) \quad \text{pour} \quad i \in \{0, \ldots, N-1\} = \mathbb{Z}_N$$

On suppose que chaque $Y_{i,i+1}$ ne contient qu'un seul point critique de f. La décomposition cyclique

$$Y = Y_{0,1} \underset{\Sigma_1}{\sqcup} Y_{1,2} \underset{\Sigma_2}{\sqcup} \ldots \underset{\Sigma_{N-1}}{\sqcup} Y_{N-1,0} \underset{\Sigma_0}{\sqcup} Y_{0,1}$$

peut être vue comme étant une suite de cobordismes cyclique :

$$\Sigma_0 \xrightarrow{Y_{0,1}} \Sigma_1 \xrightarrow{Y_{1,2}} \ldots \xrightarrow{Y_{N-2,N-1}} \Sigma_{N-1} \xrightarrow{Y_{N-1,0}} \Sigma_0$$

Suivant [40], une telle décomposition cyclique de Y en suite de cobordismes fut introduite en [81] sous le nom de *fibration brisée sur* S^1 (nom inspiré de la *fibration brisée de Lefschetz sur les 4-variétés*) ou encore *décomposition de Cerf*. Donnons à Y un SO(3)-fibré non trivial $P_Y \to Y$ tel que chaque restriction $P_{Y_{i,i+1}}$ soit un SO(3)-fibré non trivial sur $Y_{i,i+1}$. À la suite de cobordismes correspond une correspondance lagrangienne généralisée cyclique, ce qui s'insère dans le cadre de l'homologie de Floer cuiltée. Suivant Duncan [39], Wehrheim et Woodward ont démontré que l'homologie de Floer d'intersections lagrangiennes (version cuiltée) est bien définie dans un tel contexte. Duncan [39] conjecture que, dans le contexte de décomposition de Y en suite de cobordismes cyclique ci-haut,

> *l'homologie de Floer d'instantons* SO(3) *est isomorphe à l'homologie de Floer d'intersections lagrangiennes cuiltée de Wehrheim et Woodward.*

Il nomme sa conjecture *conjecture d'Atiyah-Floer cuiltée*. Elle est à ne pas confondre avec la conjecture d'Atiyah-Floer cuiltée (plus générale) proposée par Wehrheim [135] brièvement décrite plus haut.

9.2 Vers une résolution de la conjecture ?

Le résultat principal de la thèse de Duncan est que les instantons dénombrés par la différentielle ∂_{inst} sont, dans un sens convenable, *près* des courbes J-holomorphes dénombrées par ∂_{lag}. Ces instantons n'ont pas des CBL mais plutôt des conditions aux bords *presque* lagrangiennes. Sa preuve procède par limite adiabatique en *étirant convenablement le cou* des cobordismes $Y_{i,i+1}$. Une preuve finale de la conjecture d'Atiyah-Floer dans un tel contexte demanderait de démontrer que les instantons dénombrés sont en bijection avec les courbes J-holomorphes dénombrées. L'application $\Psi : \mathrm{CF}_{\text{inst}} \to \mathrm{CF}_{\text{lag}}$ envoyant un instanton à une courbe J-holomorphe qui est *près* de cet instanton est surjective. Il reste à démontrer l'injectivité de cette application. Suivant Duncan [39], l'injectivité de cette application est un sujet de recherche actif (en 2013). En 2015, Duncan [41] démontre que les $\mathbb{Z}_4$-graduations des cohomologies de Floer d'instantons et de Floer cuiltée concordent via l'application Ψ. Duncan [41], p.1, dit que l'application Ψ est un isomorphisme de groupes (ce qui démontre la conjecture d'Atiyah-Floer cuiltée pour son contexte ?). Il dit que l'isomorphisme découle du théorème 5.2 de sa référence « [7] ». Sa référence « [7] » est son article *An introduction to the quilted Atiyah-Floer conjecture*. Hélas, cet article ne semble pas exister. L'hyperlien arXiv de sa référence « [7] » pointe vers l'article [40]. Mais il n'existe pas de théorème 5.2 en [40] (ni dans sa thèse [39]). Enfin, [40], p.5, suggère que l'injectivité de Ψ mentionnée ci-haut est encore à démontrer. Bref, je ne sais pas si la conjecture a été démontrée ou non dans le contexte de Duncan.

10 Conj. d'AF (version Manolescu et Woodward [85])

10.1 Mise en contexte

En 2012, une autre version de la conjecture d'Atiyah-Floer fut proposée par Manolescu et Woodward [85]. Soit $Y = Y_0 \underset{\Sigma}{\sqcup} Y_1$ un scindement de Heegaard d'une 3-sphère d'homologie entière Y munie d'un SU(2)-fibré principal (trivial) $P_\Sigma \longrightarrow \Sigma$. Fixons un point $z \in \Sigma$. Soit D un petit disque ouvert contenant z tel que $\Sigma' := \Sigma \backslash D$ ait un bord $S^1 = \partial\Sigma'$. Soit $U \simeq [0, \epsilon) \times S^1$ un petit voisinage ouvert du bord S^1 de Σ'. Puisque le SU(2)-fibré $P_{\Sigma'}$ est trivial, une forme de connexion $A \in \mathcal{A}_{\Sigma'}$ peut être tirée en bas à Σ', i.e. $\mathcal{A}_{\Sigma'} \cong \Omega^1(\Sigma'; \mathfrak{su}(2))$. Pour $\xi \in \mathfrak{su}(2)$, posons :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}^{\text{fl}}_{\Sigma',\xi} & := & \{A \in \mathcal{A}^{\text{fl}}_{\Sigma'} : A|_{\partial\Sigma'} = \xi \mathrm{d}\theta\} \quad \text{où} \quad \theta \in S^1 \\ \mathcal{G}^c_{\Sigma'} & := & \{\Lambda \in \mathcal{G}_{\Sigma'} : \Lambda|_U = \mathrm{id}\} \\ \mathcal{M}^{\text{fl}}_{\Sigma',\xi} & := & \mathcal{A}^{\text{fl}}_{\Sigma',\xi} / \mathcal{G}^c_{\Sigma'} \end{array}$$

Il y a une PU(2)-action[74] hamiltonienne sur l'*espace de modules étendu* $\mathcal{M}^{\text{fl}}_{\Sigma',\xi}$. Le quotient symplectique est l'espace de modules des connexions plates usuel $\mathcal{M}^{\text{fl}}_{\Sigma'}$. Manolescu et Woodward considèrent un certain ouvert $N(\Sigma') \subset \mathcal{M}^{\text{fl}}_{\Sigma',\xi}$. Ils définissent ensuite $N^c(\Sigma')$ la compactification d'une coupe symplectique non abélienne de $N(\Sigma')$. Elle possède une 2-forme $\tilde{\omega}$ dégénérée sur un sous-ensemble R. Ils perturbent $\tilde{\omega}$ à une véritable forme symplectique ω. Les deux corps à anses Y_0 et Y_1 génèrent deux lagrangiennes L_0 et L_1 en $N(\Sigma')$ qu'ils utilisent pour définir l'*homologie de Floer d'instantons symplectique* graduée sur $\mathbb{Z}_8$:

$$\mathrm{HSI}_*(\Sigma; Y_0, Y_1) := \mathrm{HF}^{\text{lag}}_*(L_0, L_1 \text{ en } N(\Sigma'))$$

Cette approche semble aussi être étudiée par Daemi et Fukaya en 2017 [27].

10.2 Énoncé de la conjecture

En considérant l'homologie d'instantons de Donaldson-Floer $\widetilde{\mathrm{HF}}^{\text{inst}}_*(Y)$ introduite par Donaldson en [32] (section 7.3.3), Manolescu et Woodward conjecturent l'isomorphisme entre espaces vectoriels $\mathbb{Z}_8$-gradués suivant :

$$\mathrm{HSI}_*(Y) \otimes \mathbb{Q} \cong \widetilde{\mathrm{HF}}^{\text{inst}}_*(Y)$$

[74] $\mathrm{PU}(2) := \mathrm{U}(2)/\mathrm{U}(1) \cong \mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathrm{SO}(3)$.

11 Conj. d'AF (version Lipyanskiy [83])

En 2014, Lipyanskiy [83] propose la même chose qu'Atiyah, mais pour un U(2)-fibré principal non trivial. Il a commencé à développer l'aspect analytique (la compacité). La suite est à paraître. Son approche est basée sur l'astuce suivante. On se donne une G-action hamiltonienne d'application moment $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ sur une variété symplectique (M, ω). Considérons la réduction de Marsden-Weinstein $(\mathcal{M}, \omega_{\mathcal{M}})$ où $\mathcal{M} := \mu^{-1}(0)/G$. Posons $\overline{\mathcal{M}} := (\mathcal{M}, -\omega_{\mathcal{M}})$, la variété symplectique d'orientation opposée, ainsi que $\overline{\mathcal{M}} \times M := (\overline{\mathcal{M}} \times M, -\omega_{\mathcal{M}} \oplus \omega)$. En $\overline{\mathcal{M}} \times M$ repose une sous-variété lagrangienne canonique :

$$\mathcal{L} := \left\{([x], x) \in \overline{\mathcal{M}} \times M \middle| x \in \mu^{-1}(0)\right\} \subset \overline{\mathcal{M}} \times M$$

L'idée de Lipyanskiy est de prendre $M = \mathcal{A}_\Sigma$ pour la $\mathcal{G}_\Sigma$-action hamiltonienne venant de l'application moment d'Atiyah-Bott $\mu(A) = F_A$. En $\overline{\mathcal{M}^{\text{fl}}_\Sigma} \times \mathcal{A}_\Sigma$ repose donc une sous-variété lagrangienne canonique :

$$\mathcal{L} := \left\{([A], A) \in \overline{\mathcal{M}^{\text{fl}}_\Sigma} \times \mathcal{A}_\Sigma \middle| A \in \mu^{-1}(0) = \mathcal{A}^{\text{fl}}_\Sigma\right\} \subset \overline{\mathcal{M}^{\text{fl}}_\Sigma} \times \mathcal{A}_\Sigma$$

Il considère maintenant une 4-variété $X \subset \Sigma \times \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}$ est en coordonnées (s, t). Tel que mentionné plus haut, une connexion $A \in \mathcal{A}_X$ se décompose comme :

$$A = A_{s,t} + \varphi_{s,t}\mathrm{d}s + \psi_{s,t}\mathrm{d}t$$

Ici, $\varphi_{s,t}$ et $\psi_{s,t}$ sont des familles à 2-paramètres de fonctions à valeurs en $\mathfrak{u}(2)$ et $A_{s,t}$ est une famille de connexions à 2-paramètres sans ds ni dt. Il considère alors les paires d'applications :

$$(u(s,t), A_{s,t}) : \mathbb{C} \to \overline{\mathcal{M}^{\text{fl}}_\Sigma} \times \mathcal{A}^{\text{fl}}_\Sigma$$

avec conditions initiales $u(s, t) = [A_{s,t}]$ pour $s = 0$ et $t = [-R, R]$. C'est-à-dire, la paire d'applications a des CBL. Ensuite, il définit une fonctionnelle hybride *YM + énergie symplectique* définie sur ses paires d'applications et il étudie ses points critiques.

L'idée de Lipyanskiy revient donc à démontrer la conjecture au niveau des chaînes avec une correspondance *a priori* entre une variante des connexions ASD et une variante des courbes J-holomorphes qui sont les composantes de ses paires d'applications $(u(s,t), A_{s,t})$.

12 Conclusion

La conjecture d'Atiyah-Floer peut porter à confusion : d'abord, par la quantité de versions alternatives aux contextes plus ou moins éloignés de la conjecture originale et, ensuite, par la quantité de variantes d'homologies et de cohomologies de Floer en jeu.

La plus grande difficulté de la conjecture d'Atiyah-Floer semble de définir l'homologie de Floer lagrangienne dans un contexte avec singularités.

Il est intéressant de constater que bien des variantes de la conjecture sont récentes (*2012* [85], *2013* [39], *2014* [83], *2016* [135]). Peut-être aura-t-il simplement fallu laisser le temps aux homologies de Floer et à la théorie A_∞ de Fukaya de mûrir un peu avant de se lancer dans l'ardu contexte proposé par Atiyah en 1987.

Enfin, après tant de conjectures et de constructions abracadabrantes, terminons avec cette autre citation de Souriau [119], p.15, aussi efficace qu'une douche bien froide pour revenir à la réalité :

> *Oui, mais aussi sociologie des milieux scientifiques : le système des thèses et des patrons, le mécanisme de sélection des articles, tout cela favorise les sujets « à la mode ». Du moment que la mode a été lancée par un grand couturier de la science, tout travail sur ce sujet sera publié facilement - et d'autant plus facilement qu'il se réduira à quelques variations sur des opinions récemment publiées : un chercheur soucieux de sa carrière a tout intérêt à suivre la mode plutôt qu'à la questionner. Quand elle est vide, la mode finit par passer. Bilan : d'innombrables travaux publiés d'un côté ; de l'autre, une seule connaissance nouvelle : c'est qu'il s'agissait d'une fausse piste.*

Références

[1] M. Akaho and D. Joyce. Immersed lagrangian floer theory. *J. Differential Geometry*, 86 :381–500, 2010.

[2] V. I. Arnol'd. Commentaires sur l'article de poincaré « sur un théorème de géométrie ». In *Oeuvres choisies de Poincaré (en russe)*, volume 2, pages 987–989. Moscou, 1972.

[3] V. I. Arnol'd. Fixed points of symplectic diffeomorphisms. *Mathematical developements arising from Hilbert problems, Proc. Sympos. Pure Math, Amer. Math. Society*, 28(66), 1976.

[4] V. I. Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Number 60 in GTM Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 2nd edition, 1989.

[5] M. F. Atiyah. *Geometry of Yang-Mills Fields*. Accademia Nazionale Dei Lincei Scuola Normale Superiore, Lezioni Fermiane, 1979.

[6] M. F. Atiyah. New invariants of 3- and 4-dimensional manifolds. In Jr. R. O. Wells, editor, *The Mathematical heritage of Hermann Weyl, May 12-16, 1987, Duke University*, volume 48 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. American Mathematical Society, 1988.

[7] M. F. Atiyah. Topological quantum field theory. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, 68 :175–186, 1988.

[8] M. F. Atiyah. *The Geometry of Physics and Knots*. Cambridge University Press, 1990.

[9] M. F. Atiyah and R. Bott. The yang-mills equations over riemann surfaces. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 308(1505) :523–615, 1984.

[10] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, and I. M. Singer. Deformations of instantons. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 74(7) :2662–2663, 1977.

[11] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, and I. M. Singer. Self-duality in four-dimensional riemannian geometry. *Proc. R. Soc. Lond.*, A(362) :1978, 1978.

[12] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, and I. M. Singer. Spectral asymmetry and riemannian geometry. iii. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 79(71) :71–99, 1976.

[13] M. Audin. Gauge theory and integrable systems. In Jacques Hurtubise, François Lalonde, and Gert Sabidussi, editors, *Gauge Theory and Symplectic Geometry*, volume 488 of *NATO ASI series C : Mathematical and Physical Sciences*, pages 1–48. Kluwer Axademic Publishers, 1995.

[14] A. Banayaga. Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique. *Comment. Math. Helvetici*, 53 :174–227, 1978.

[15] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz, and Yu. S. Tyupkin. Pseudoparticle solutions of the yang-mills equations. *Physics Letters*, 59B(1), 1975.

[16] P. Biran and O. Cornea. Quantum structures for lagrangian submanifolds. 2007.

[17] P. Biran and O. Cornea. Lagrangian cobordism and fukaya categories. *Geometric and Functional Analysis GAFA*, 24 :1731–1830, 2014.

[18] G. D. Birkhoff. Proof of poincaré's geometric theorem. *American Mathematical Society, Collected mathematical papers*, 1 :673–681, 1950.

[19] R. Bott. Morse theory indomitable. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S.*, 68 :99–114, 1988.

[20] N. Bottman and K. Wehrheim. Gromov compactness for squiggly strip shrinking in pseudoholomorphic quilts.

[21] P. Le Calvez and J. Wang. Some remarks on the poincaré-birkhoff theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 138(2) :703–715, 2010.

[22] M. Chaperon. Quelques questions de géométrie symplectique [d'après, entre autres, poincaré, arnold, conley et zehnder]. *Séminaire Bourbaki*, 35e année(610) :231–249, 1982/83.

[23] K. Cieliebak, A. R. Gaio, I. M. I Riera, and D. A. Salamon. The symplectic vortex equations and invariants of hamiltonian group actions. *J. Symplectic Geom.*, 1(3) :543–645, 2002.

[24] C. C. Conley and E. Zehnder. The birkhoff-lewis fixed point theorem and a conjecture of v. i. arnold. *Invent. math.*, 73(1) :33–49, 1983.

[25] O. Cornea and F. Lalonde. Cluster homology : An overview of the construction and results. *Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society*, 12 :1–12, 2006.

[26] A. C. da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Number 1764 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 2006.

[27] A. Daemi and K. Fukaya. Atiyah-floer conjecture : a formulation, a strategy to prove and generalizations. 2017.

[28] S. K. Donaldson. Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 8(1) :81–83, 1983.

[29] S. K. Donaldson. Instantons and geometric invariant theory. *Commun. Math. Phys.*, 93(93) :453–460, 1984.

[30] S. K. Donaldson. Anti-self-dual connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles. *Proc. London Math. Soc.*, 50(1) :1–26, 1985.

[31] S. K. Donaldson. On the work of andreas floer. *Jahresber . Deutsch. Math.-Verein.*, 95(3) :103–120, 1993.

[32] S. K. Donaldson. *Floer homology groups in Yang-Mills theory*, volume 147 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[33] S. K. Donaldson and P. Kronheimer. *The Geometry of Four-manifolds*. Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, 1990.

[34] S. K. Donaldson and C. B. Thomas. *Geometry of low-dimensional manifolds, vol. 1, Gauge theory and algebraic surfaces*, volume 150 of *London Mathematical Society, Lecture Note Series*. Cambridge University Press, 1989.

[35] S. Dostoglou and D. A. Salamon. Instanton homology and symplectic fixed points. *Symplectic Geometry, London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 192 :57–94, 1993.

[36] S. Dostoglou and D. A. Salamon. Cauchy-riemann operators, self-duality, and the spectral flow. In A. Joseph, F. Mignot, F. Murat, B. Prum, and R. Rentschler, editors, *First European Congress of Mathematics, Volume I, Invited Lectures (Part 1)*, volume 119 of *Progress in Mathematics*, pages 511–545. Birkhäuser Verlag, 1994.

[37] S. Dostoglou and D. A. Salamon. Self-dual instantons and holomorphic curves. *Annals of Mathematics*, 139 :581–640, 1994.

[38] S. Dostoglou and D. A. Salamon. Corrigendum ; self-dual instantons and holomorphic curves. *Annals of Mathematics*, 165 :665–673, 2997.

[39] D. L. Duncan. *Compactness Results for the quilted Atiyah-Floer conjecture*. PhD thesis, 2013.

[40] D. L. Duncan. Higher-rank instanton cohomology and the quilted atiyah-floer conjecture. 2015.

[41] D. L. Duncan. An index relation for the quilted atiyah-floer conjecture. 2015.

[42] Y. Eliashberg, A. Givental, and H. Hofer. Introduction to symplectic field theory. In N. Alon, J. Bourgain, A. Connes, M. Gromov, and V. Milman, editors, *Visions in Mathematics, GAFA 2000 Special volume, Part II*, Modern Birkhäuser Classics, chapter Visions in Mathematics, pages 560–673. Birkhäuser Basel, 2010.

[43] A. Floer. Proof of the arnold conjecture for surfaces and generalizations to certain kähler manifolds. *Duke math.*, 1(53) :1–32, 1986.
[44] A. Floer. Morse theory for fixed points of symplectic diffeomorphisms. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 16(2) :279, April 1987.
[45] A. Floer. An instanton-invariant for 3-manifolds. *Commun. Math. Phys.*, 118 :215–240, 1988.
[46] A. Floer. Morse theory for lagrangian intersections. *J. Differential Geometry*, 28(3) :513–547, 1988.
[47] A. Floer. A relative morse index for the symplectic action. *Comm. Pure Appl. Math.*, XLI :393–407, 1988.
[48] A. Floer. Symplectic fixed points and holomorphic spheres. *Commun. Math. Phys.*, 120 :575–611, 1989.
[49] A. Floer. Witten's complex and infinite dimensional morse theory. *J. Differential Geometry*, 30 :207–221, 1989.
[50] A. Floer. Instanton homology and dehn surgery. In *The Floer Memorial Volume*, volume 133 of *Progress in Mathematics*, pages 77–97. Birkhäuser, 1995.
[51] A. Floer and E. Zehnder. Fixed point results for symplectic maps related to the arnold conjecture. In *Dynamical Systems and Bifurcations*, number 1125 in Proc. Groningen, Lecture Notes in Math., pages 47–63. Springer, 1985.
[52] B. Fortune and A. Weinstein. A symplectic fixed point theorem for complex projective spaces. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 12(1) :128–130, 1985.
[53] U. Frauenfelder. he arnold-givental conjecture and moment floer homology. *Int. Math. Res. Not.*, 42 :2179–2269, 2004.
[54] K. Fukaya. Morse homotopy, A^{∞}-category, and floer homologies. In *Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993)*, volume 18 of *Lecture Notes Series*, pages 1–102. Seoul Natational University, Seoul, 1993.
[55] K. Fukaya. Floer homology for 3-manifolds with boundary i. 1997.
[56] K. Fukaya. Anti-self-dual equation on 4-manifolds with degenerate metric. *Geometric and Functional Analysis GAFA*, 8(3) :466–528, 1998.
[57] K. Fukaya. SO(3)-floer homology of 3-manifolds with boundary 1. 2015.
[58] K. Fukaya. Categorification of invariants in gauge theory and symplectic geometry. 2017.

[59] K. Fukaya. SO(3)-floer homology of 3 manifolds with boundary 2. En préparation.

[60] K. Fukaya. SO(3)-floer homology of 3 manifolds with boundary 3. En préparation.

[61] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta, and K. Ono. *Lagrangian Intersection Floer Theory : Anomaly and Obstruction, Partie 1*. Studies in Advanced Mathematics. American Mathematical Society, 2009.

[62] K. Fukaya and K. Ono. Arnold conjecture and gromov-witten invariant. *Topology, Elsevier Science*, 38(5) :933–1048, 1999.

[63] A. R. P. Gaio and D. A. Salamon. Gromov-witten invariants of symplectic quotients and adiabatic limits. *J. Symplectic Geom.*, 3(1) :55–159, 2005.

[64] W. M. Goldman. The symplectic nature of fundamental groups of surfaces. *Adv. in Math.*, 54 :200–225, 1984.

[65] M. J. Gotay. Functorial geometric quantization and van hove's theorem. *International Journal of Theoretical Physics*, 19(2) :139–161, 1980.

[66] M. Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. math.*, 82 :307–347, 1985.

[67] V. Guillemin, V. Ginzburg, and Y. Karshon. *Moment Maps, Cobordisms, and Hamiltonian Group Actions*, volume 98. American Mathematical Society, 2002.

[68] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[69] N. J. Hitchin. The self-duality equations on a riemann surface. *Proc. London Math. Soc.*, 3(55) :59–126, 1987.

[70] H. Hofer. Lusternik-schnirelman-theory for lagrangian intersections. *Annales de l'I. H. P.*, 5(5) :465–499, 1988.

[71] H. Hofer and D. A. Salamon. Floer homology and novikov rings. In *The Floer Memorial Volume*, volume 133 of *Progress in Mathematics*, pages 483–524. Birkhäuser, 1995.

[72] Patrick Iglesias-Zemmour. *Symétries et moments*. Collection Enseignement des Sciences. Hermann, 2000.

[73] M. Jeffs. The extended topological quantum field theory of the fukaya category in yang-mills theory. Technical report, Australian Mathematical Sciences Institute, 2016.

[74] Th. Kaluza. On the unification problem in physics. *Sitzungber. d. Berl. Acad.*, pages 966–972, 1918.

[75] O. Klein. Quantum theory and five-dimensional relativity theory. *Z. Phys.*, 37(895) :69–82, 1926.

[76] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Wiley, New-York, 1963.

[77] M. Kontsevich. Homological algebra of mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, volume 1, 2 (Zürich, 1994), pages 120–139. Birkhäuser Basel (1995), 1995.

[78] F. Laudenbach. Symplectic geometry and floer homology. *Sociedade Brasileira de Matemática*, pages 1–50, 2004.

[79] F. Laudenbach. Homologie de morse dans la perspective de l'homologie de floer. *Mini-cours dans le cadre de la rencontre GIRAGA XIII, Yaoundé*, septembre 2010.

[80] R. Lee and W. Li. Floer homologies for lagrangian intersections and instantons. Oklahoma State University, 1995.

[81] Y. Lekili. Heegaard floer homology of broken fibrations over the circle. *Advances in Mathematics*, 244 :268–302, 2013.

[82] Y. Lekili and M. Lipyanskiy. Geometric composition in quilted floer theory. *Adv. in Math.*, 236 :1–23, 2013.

[83] M. Lipyanskiy. Gromov-uhlenbeck compactness. 2014.

[84] G. Liu and G. Tian. Floer homology and arnold conjecture. *J. Differential Geometry*, 49 :1–74, 1998.

[85] C. Manolescu and C. T. Woodward. Floer homology on the extended moduli space. *Perspectives in analysis, geometry, and topology, Progr. Math., Birkhäuser/Springer, New York*, 296 :283–329, 2012.

[86] J. Marsden and A. Weinstein. Reduction of symplectic manifolds with symmetry. *Reports on Mathematical Physics*, 5 :121–130, 1974.

[87] D. McDuff and D. A. Salamon. *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, volume 6 of *University Lecture Series*. Amer. Math. Soc., 1994.

[88] D. McDuff and D. A. Salamon. *J-holomorphic curves and symplectic topology*, volume 52 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Soc., 2012.

[89] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.

[90] J. Milnor. *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton University Press, 1965.

[91] M. Morse. Relations between the critical points of a real function of n independent variables. *American Mathematical Society*, 27(3) :345–396, July 1925.

[92] M. Morse. The calculus of variations in the large. 1934.

[93] V. Muñoz. Fukaya-floer homology of $\Sigma \times S^1$ and applications. *J. Differential Geometry*, 53(2) :279–326, 1999.

[94] V. Muñoz. Quantum cohomology of the moduli space of stable bundles over a riemann surface. *Duke Math. J.*, 98(3) :525–540, 1999.

[95] V. Muñoz. Ring structure of the floer cohomology of $\Sigma \times S^1$. *Topology, Elsevier Science*, 38(3) :517–528, 1999.

[96] V. Muñoz. Atiyah-floer conjecture. In Michiel Hazewinkel, editor, *Encyclopaedia of Mathematics, Supplement III*, volume III of *Encyclopaedia of Mathematics*, pages 46–48. Springer Netherlands, 2002.

[97] P. E. Newstead. Topological properties of some spaces of stable bundles. *Topology, Pergamon Press*, 6 :241–262, 1967.

[98] S. P. Novikov. Multivalued functions and functionals - an analogue of the morse theory. *Soviet Math Dokl.*, 24 :222–226, 1981.

[99] S. P. Novikov. The hamiltonian formalism and a many-valued analogue of morse theory. *Uspekhi Mat. Nauk*, 37(5) :3–49, 1982.

[100] Y.-G. Oh. Spectral invariants, analysis of the floer moduli spaces and geometry of the hamiltonian diffeomorphism group. *Duke Math. J.*, 130(2) :199–295, 2005.

[101] L. O'Raifeartaigh and N. Straumann. Early history of gauge theories and kaluza-klein theories, with a glance at recent developments. 1999.

[102] T. H. Parker. Gauge theories on four dimensiomal riemannian manifolds. *Commun. Math. Phys.*, 85 :563–602, 1982.

[103] W. Pauli. Relativistic field theories of elementary particles. *Reviews of Modern Physics*, 13 :203–232, 1941.

[104] S. Piunikhin, D. A. Salamon, and M. Schwarz. Symplectic floer-donaldson theory and quantum cohomology. *Contact and Symplectic Geometry, Publications of the Newton Institute, C. B. Thomas*, 8 :171–200, 1996.

[105] C. Quigley. On the origins of gauge theory. 2003.

[106] P. H. Rabinowitz. Periodic solutions of a hamiltonian system on a prescribed energy surface. *Journal of Differential Equations*, 33 :336–352, 1979.

[107] J. Robbin and D. A. Salamon. The spectral flow and the maslov index. *Bull. London Math. Soc.*, 27(1) :1–33, 1995.

[108] Y. Ruan and G. Tian. A mathematical theory of quantum cohomology. *J. Differential Geometry*, 42(2) :259–367, 1995.

[109] D. A. Salamon. Lagrangian intersections, 3-manifolds with boundary, and the atiyah-floer conjecture. *Proceedings of the International Congress of Mathematics, Birkäuser Verlag*, 1994.

[110] D. A. Salamon. Quantum products for mapping tori and the atiyah-floer conjecture. *American Mathematical Society, Translations, Series 2, Advances in the Mathematical Sciences*, 196, 1999.

[111] D. A. Salamon and K. Wehrheim. Instanton floer homology with lagrangian boundary conditions. *Geometry and Topology*, 12 :747–918, 2008.
[112] P. Seidel. The symplectic floer homology of a dehn twist. *Mathematical Research Letters*, 3 :829–834, 1996.
[113] P. Seidel. *Fukaya Categories and Picard-Lefschetz Theory*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. EMS, 2008.
[114] J.-C. Sikorav. Points fixes d'une application symplectique homologue à l'identité. *J. Differential Geometry*, 22 :49–79, 1985.
[115] J.-C. Sikorav. *Homologie de Novikov associée à une classe de cohomologie réelle de degree un*. PhD thesis, Université d'Orsay, 1987.
[116] J.-C. Sikorav. Homologie associée à une fonctionnelle [d'après a. floer]. *Séminaire Bourbaki*, 43ième année(733) :115–141, 1990.
[117] R. Sjamaar and E. Lerman. Stratified symplectic spaces and reduction. *Annals of Mathematics*, 134 :375–422, 1991.
[118] S. Smale. Morse inequalities for a dynamical system. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66(1) :43–49, 1960.
[119] J.-M. Souriau. *Grammaire de la Nature, version du 8 juillet 2007*.
[120] J. D. Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces. i, ii. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108 :275–292, 293–312, 1963.
[121] C. H. Taubes. Self-dual yang-mills connections on non-self-dual 4-manifolds. *J. Differential Geometry*, 17 :139–170, 1982.
[122] C. H. Taubes. Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection matrix. *J. Differential Geometry*, 19 :517–560, 1984.
[123] C. H. Taubes. Casson's invariant and gauge theory. *J. Differential Geometry*, 31 :547–599, 1990.
[124] R. Thom. Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 228 :973–975, Mars 1949.
[125] K. K. Uhlenbeck. Connections with L^p bounds on curvature. *Commun. Math. Phys.*, 83 :31–42, 1982.
[126] K. K. Uhlenbeck. Removable singularities in yang-mills fields. *Commun. Math. Phys.*, 83 :11–29, 1982.
[127] R. Utiyama. Invariant theoretical interpretation of interaction. *Phys. Rev.*, 101(5) :1597–1607, 1956.
[128] C. Vafa. Topological mirrors and quantum rings. In S.-T. Yau, editor, *Essays on Mirror Manifolds*. International Press, Hong Kong, 1992.

[129] C. Viterbo. Intersection de sous-variétés lagrangiennes, fonctionnelles d'action et indices des systèmes hamiltoniens. *Bull. Soc. Math. France*, 115 :361–390, 1987.

[130] K. Wehrheim. Banach space valued cauchy-riemann equations with totally real boundary conditions. *Communications in Contemporary Mathematics*, 6(4) :601–635, 2004.

[131] K. Wehrheim. *Uhlenbeck Compactness*. Series of Lectures in Mathematics. EMS, 2004.

[132] K. Wehrheim. Anti-self-dual instantons with lagrangian boundary conditions i : Elliptic theory. *Commun. Math. Phys.*, 254(1) :45–89, 2005.

[133] K. Wehrheim. Anti-self-dual instantons with lagrangian boundary conditions ii : Bubbling. *Commun. Math. Phys.*, 258(2) :275–315, 2005.

[134] K. Wehrheim. Lagrangian boundary conditions for anti-self-dual instantons and the atiyah-floer conjecture. *J. Symplectic Geom.*, 3(4) :703–747, 2005.

[135] K. Wehrheim. Floer field philosophy. 2016.

[136] K. Wehrheim and C. T. Woodward. Floer field theory. 2008.

[137] K. Wehrheim and C. T. Woodward. Floer field theory for tangles. 2008.

[138] K. Wehrheim and C. T. Woodward. Functoriality for lagrangian correspondences in floer theory. *Quantum Topol. EMS*, 1 :129–170, 2010.

[139] K. Wehrheim and C. T. Woodward. Quilted floer cohomology. *Geometry and Topology*, 14(2) :833–902, 2010.

[140] K. Wehrheim and C. T. Woodward. Floer cohomology and geometric composition of lagrangian correspondences. *Adv. in Math.*, 230(1) :177–228, 2012.

[141] A. Weinstein. Symplectic geometry. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 5(1) :1–13, 1981.

[142] A. Weinstein. C^0-perturbation theorems for symplectic fixed points and lagrangian intersections. In *Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie, Travaux en cours III*, pages 140–144. Hermann, Paris, 1984.

[143] A. Weinstein. Symplectic categories. 2008.

[144] H. Weyl. Gravitation and electricity. *Sitzungber. Preuss. Akad. Berlin*, pages 24–37, in *O'Raifeartaigh, L. : The dawning of gauge theory*, 1918.

[145] H. Weyl. A new extension of the theory of relativity. *Annalen Phys.*, 59(4) :101–133, 1919.

[146] H. Weyl. Gravitation and the electron. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 15(4) :323–334, 1929.

[147] E. Witten. Supersymmetry and morse theory. *J. Differential Geometry*, 17 :661–692, 1982.

[148] E. Witten. Topological quantum field theory. *Commun. Math. Phys.*, 117 :353–386, 1988.

[149] E. Witten. Topological sigma models. *Commun. Math. Phys.*, 118 :411–449, 1988.

[150] E. Witten. Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space. *Surveys in Differential Geometry*, 1 :243–310, 1991.

[151] G. Xu. A compactness theorem for so(3) anti-self-dual equation with translation symmetry. 2019.

[152] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, 96(1) :191–195, 1954.

[153] T. Yoshida. Floer homology and splittings of manifolds. *Annals of Mathematics*, 134 :277–323, 1991.

[154] T. Yoshida. Floer homology and holomorphic curves - atiyah conjecture. preprint, 1992.