Inégalités de Morse
(une approche cellulaire)

Noé Aubin-Cadot

DMS - Université de Montréal

XXI-ième Colloque panquébécois des étudiants de l'ISM
(à l'Université de Sherbrooke)
26 mai 2018

Plan

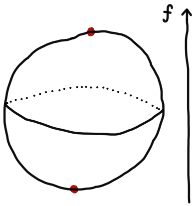
Plan :

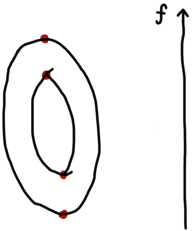
1. Théorie de Morse - définitions
2. Inégalités de Morse
3. Les CW-complexes - en bref
4. La théorie de Morse selon Thom
5. La théorie de Morse selon Smale
6. Inégalités de Morse - preuve "cellulaire"

Théorie de Morse - définitions

Soient :

- M une variété lisse fermée (i.e. compacte et sans bord) de dimension n,
- $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ une fonction réelle lisse sur M,
- $\mathrm{crit}(f) := \{x \in M : \mathrm{d}f|_x = 0\}$, l'ensemble des points critiques de f sur M.

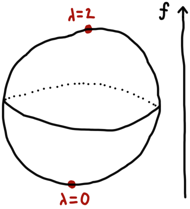


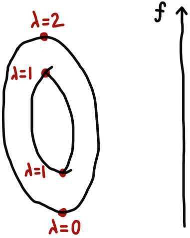


Théorie de Morse - définitions

Définitions :

- L'*indice de Morse* λ_x d'un point critique $x \in \text{crit}(f)$ est par définition le nombre de valeurs propres négatives de la matrice hessienne $H_{i,j} = \partial_i \partial_j f$ de f en x.
- Un point critique $x \in \text{crit}(f)$ est dit être *non dégénéré* si $H_{i,j}$ y est non dégénérée.
- $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ est dite *Morse* si tout $x \in \text{crit}(f)$ est non dégénéré.





Théorie de Morse - inégalités de Morse

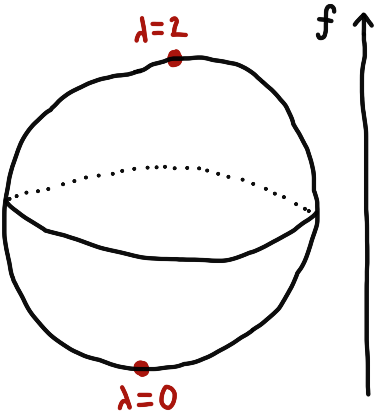
Soient :

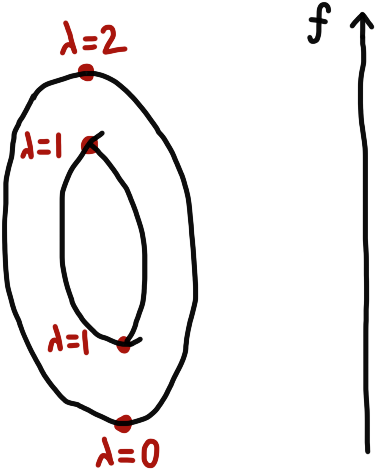
- $c_k := \#\{x \in \mathrm{crit}(f) : \lambda_x = k\}$ le nombre de points critiques de f d'indice de Morse égal à k,
- $b_k := \mathrm{rang} H_k(M; \mathbb{Q})$ le k-ième nombre de Betti de M (un invariant topologique indépendant de f).

Théorème (Morse, 1925, [5]) :

1. $c_k \geq b_k, \qquad k = 0, \ldots, n$
2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k = \chi(M) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k(M)$
3. $\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} c_i \geq \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} b_i, \qquad k = 0, \ldots, n$

Théorie de Morse - inégalités de Morse





S^2 :
$c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = 1,$
$b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 1.$

$T^2 = S^1 \times S^1$:
$c_0 = 1, c_1 = 2, c_2 = 1,$
$b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 1.$

Théorie de Morse - inégalités de Morse

Preuve du théorème de Morse ?

Plusieurs preuves plus ou moins différentes :

- à la Marston Morse (1925) [5]
- à la René Thom [7] ($M \sim$ CW-complexe)
- à la Stephen Smale (1960) [6] ($M =$ CW-complexe)
- à la Edward Witten (1982) [8]

On va voir une preuve à la Smale.

Mais avant : un CW-complexe c'est quoi ?

Les CW-complexes en bref

Notons $B^k := \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| < 1\}$, $S^k := \{x \in \mathbb{R}^{k+1} : \|x\| = 1\}$.
"Définition :" Un *CW-complexe* est un espace topologique séparé X qui se construit itérativement comme suit :

1. On commence avec un ensemble de *0-cellules* B^0 (i.e. un ensemble de points), qu'on nomme *0-squelette* X^0.
2. On *colle* le bord S^0 de *1-cellules* B^1 au 0-squelette X^0, ce qu'on nomme le *1-squelette* X^1.
3. On colle le bord S^1 de *2-cellules* B^2 au 1-squelette X^1, ce qu'on nomme le *2-squelette* X^2.
4. Etc...
5. On colle le bord S^{k-1} de k*-cellules* B^k au $(k-1)$-squelette X^{k-1}, ce qu'on nomme le k*-squelette* X^k. Etc...

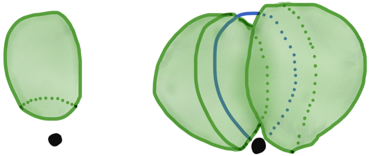
Définition (précise) : voir e.g. [2].

Les CW-complexes en bref

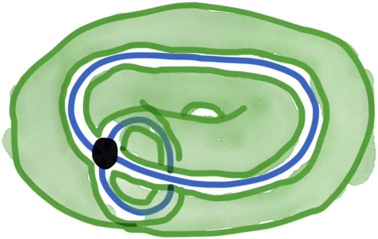
Exemple 1 :

$\mathbb{R} = \mathbb{Z} \cup \{]n, n+1[: n \in \mathbb{Z}\}$

Exemple 2 : S^2



Exemple 3 : T^2



Exemple 4 :

$\mathbb{C}\mathrm{P}^n = B^0 \sqcup B^2 \sqcup B^4 \sqcup \ldots \sqcup B^{2n}$

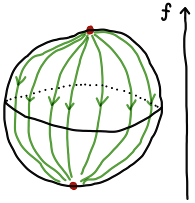
(voir dessin gauche $S^2 = \mathbb{C}\mathrm{P}^1$)

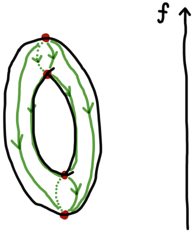
Théorie de Morse - selon Thom

Donnons à M une métrique riemannienne g.

Définitions :

- Le *champ vectoriel gradient* ∇f de f est défini implicitement par $g(\nabla f, \cdot) = \mathrm{d}f$.
- Le *flot gradient descendant* de f est l'unique homom. de groupes $\phi : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow \mathrm{Diff}(M); t \mapsto \phi_t$ qui satisfait à l'ÉDO $\dot{\phi}_t \circ \phi_{-t} = -\nabla f$.





Théorie de Morse - selon Thom

Pour f Morse sur M^n et $x, y \in \mathrm{crit}(f)$, posons :

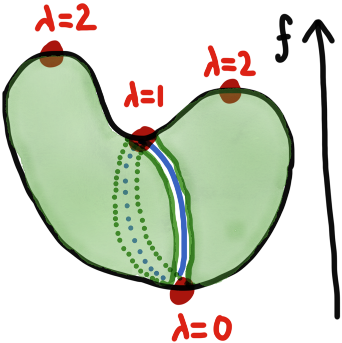
- $W^u(x) := \{z \in M : \lim_{t\to-\infty} \phi_t(z) = x\}$ la *sous-variété instable* de x. On a $\dim W^u(x) = \lambda_x$.
- $W^s(x) := \{z \in M : \lim_{t\to+\infty} \phi_t(z) = x\}$ la *sous-variété stable* de x. On a $\dim W^s(x) = n - \lambda_x$
- $\widehat{\mathcal{M}}(x, y) := W^u(x) \cap W^s(y)$.

Théorie de Morse - selon Thom

Thom (1949) [7] : Si f est Morse sur (M, g), alors on a une *partition cellulaire* de M en sous-variétés instables :

$$M = \bigsqcup_{x \in \mathrm{crit}(f)} W^u(x)$$

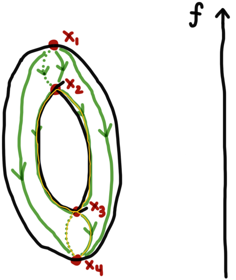
À $x \in \mathrm{crit}(f)$ d'indice de Morse λ_x correspond une λ_x-cellule $W^u(x)$.



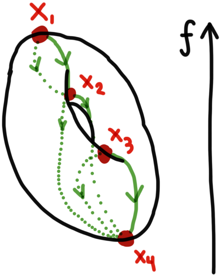
Théorie de Morse - selon Thom

Hélas : la partition cellulaire de Thom n'est pas toujours une décomposition cellulaire de CW-complexe.

e.g. : pour le tore très vertical, la 1-cellule $W^u(x_2)$ est attachée à la 1-cellule la $W^u(x_3)$, ce qui est interdit dans un CW-complexe :



On peut néanmoins incliner un peu le tore pour que $W^u(x_2)$ aille s'attacher à la 0-cellule $W^u(x^4) = \{x_4\}$:

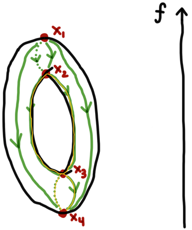


Question : quelle condition prendre sur f et g pour que la partition cellulaire de Thom en soit une de CW-complexe ?

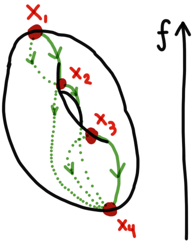
Théorie de Morse - selon Smale

Définition [6] : Soit f Morse sur (M, g) riemannienne. Alors la paire (f, g) est dite *Morse-Smale* si pour tous $x, y \in \mathrm{crit}(f)$:

$$z \in \widehat{\mathcal{M}}(x, y) \implies T_z W^u(x) \pitchfork T_z W^s(y)$$
$$(\text{i.e.} \quad T_z W^u(x) + T_z W^s(y) = T_z M)$$



Morse-Smale ? non ☹
(pour $z \in \widehat{\mathcal{M}}(x_2, x_3)$)



Morse-Smale ? oui ☺

Théorie de Morse - selon Smale

Lemme 1 : Si (f, g) Morse-Smale sur M^n lisse fermée et si $x, y \in \mathrm{crit}(f)$ sont tels que $\widehat{\mathcal{M}}(x, y) \neq \emptyset$, alors :

$$\dim \widehat{\mathcal{M}}(x, y) = \lambda_x - \lambda_y$$

Preuve : Soit $z \in \widehat{\mathcal{M}}(x, y)$. La condition de transversalité Morse-Smale

$$T_z M^n = T_z W^u(x) + T_z W^s(y)$$

implique, en regardant les dimensions :

$$\begin{aligned}
n &= \dim T_z M^n \\
&= \dim (T_z W^u(x) + T_z W^s(y)) \\
&= \dim (T_z W^u(x)) + \dim (T_z W^s(y)) - \dim (T_z W^u(x) \cap T_z W^s(y)) \\
&= \lambda_x + (n - \lambda_y) - \dim T_z \widehat{\mathcal{M}}(x, y)
\end{aligned}$$

$\square$

Théorie de Morse - selon Smale

Lemme 2 : Si (f, g) Morse-Smale sur M^n lisse fermée et si $x, y \in \mathrm{crit}(f)$ sont tels que $x \neq y$ et tels que $\widehat{\mathcal{M}}(x, y) \neq \emptyset$, alors :

$$\lambda_x \geq \lambda_y + 1$$

Preuve : Soit $z \in \widehat{\mathcal{M}}(x, y)$. Alors $z \notin \mathrm{crit}(f)$. Alors $(\nabla f)|_z \neq 0$. Mais $(\nabla f)|_z \in T_z\widehat{\mathcal{M}}(x, y)$. D'où $\dim \widehat{\mathcal{M}}(x, y) \geq 1$. Par le lemme 1, on trouve ainsi $\lambda_x - \lambda_y \geq 1$. $\square$

Théorie de Morse - selon Smale

Lemme 3 : Si (f, g) est Morse-Smale sur M^n lisse fermée, alors la partition cellulaire de M en sous-variétés instables en est une de CW-complexe.

Preuve : Soit $x \in \mathrm{crit}(f)$ tel que $\lambda_x \geq 1$. Il suffit de montrer que la λ_x-cellule ouverte $W^u(x)$ est attachée au $(\lambda_x - 1)$-squelette. On partitionne $W^u(x)$ en :

$$W^u(x) = W^u(x) \cap M = W^u(x) \cap \left(\bigsqcup_{y \in \mathrm{crit}(f)} W^s(y) \right) = \bigsqcup_{y \in \mathrm{crit}(f)} \widehat{\mathcal{M}}(x, y)$$

Fixons $y \in \mathrm{crit}(f) \setminus \{x\}$ quelconque tel que $\widehat{\mathcal{M}}(x, y) \neq \emptyset$. Alors, par le lemme 3.3 de [6], $W^u(y) \subset \partial W^u(x)$. Ainsi $W^u(x)$ s'attache, entre autres, à $W^u(y)$. Mais, par le lemme 2, $\lambda_y \leq \lambda_x - 1$. $\square$

Inégalités de Morse - preuve "cellulaire"

Preuve des inégalités "1." : Soit f Morse sur M. Il existe g sur M tel que (f, g) soit Morse-Smale (ça existe *densément*). Alors M hérite d'une structure de CW-complexe. À cette structure correspond une homologie cellulaire $H_*^{CW}(M)$ qui est isomorphe à l'homologie usuelle $H_*(M)$. D'où :

$$\begin{aligned} c_k &= \text{nombre de points critiques d'indice de Morse } k \\ &= \text{nombre de } k\text{-cellules ouvertes} \\ &= \text{nombre de générateurs du } k\text{-ième complexe cellulaire} \\ &\geq \text{rang de la } k\text{-ième homologie cellulaire} \\ &= \text{nombre de Betti } b_k \end{aligned}$$

$\square$

Inégalités de Morse - preuve "cellulaire"

Preuve de l'égalité "3." : On a :

$$\begin{aligned} c_k &= \text{rang du } k\text{-ième complexe cellulaire} \\ b_k &= \text{rang de la } k\text{-ième homologie cellulaire} \end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k$$

$\square$

Inégalités de Morse - preuve "cellulaire"

Preuve des inégalités "2." : Soit $M^0 \subset M^1 \subset ... \subset M^n$ la suite des squelettes de M. Les nombres de Betti des squelettes vérifient :

1. $b_i(M^k) = b_i(M), \quad i \leq k-1$
2. $b_k(M^k) \geq b_k(M)$
3. $b_i(M^k) = 0, \quad i \geq k+1$

(la seconde inégalité découle du fait que M est obtenu de M^k en ajoutant des cellules et du fait que les k-cellules ajoutées peuvent tuer de l'homologie en H_k)

Inégalités de Morse - preuve "cellulaire"

On trouve donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}c_i &= (-1)^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^i c_i = (-1)^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^i b_i(M^k) \\
&= (-1)^k\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i b_i(M^k) + b_k(M^k) \\
&\geq (-1)^k\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i b_i(M) + b_k(M) \quad \text{(via 1. et 2.)} \\
&= (-1)^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^i b_i(M) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i} b_i(M)
\end{aligned}$$

$\square$

[1] R. Bott, *Morse theory indomitable*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S. **68** (1988), 99–114.
[2] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.
[3] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press, 1963.
[4] ______, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton University Press, 1965.
[5] M. Morse, *Relations between the critical points of a real function of n independent variables*, American Mathematical Society **27** (1925), no. 3, 345–396.
[6] S. Smale, *Morse inequalities for a dynamical system*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), no. 1, 43–49.
[7] R. Thom, *Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences **228** (1949), 973–975.
[8] E. Witten, *Supersymmetry and morse theory*, J. Differential Geometry **17** (1982), 661–692.