De l’équation d’Einstein jusqu’à l’équation de Schrödinger

Noé Aubin-Cadot

DMS - Université de Montréal

XXII-ième Colloque panquébécois des étudiants de l’ISM
(à l’Université de Montréal)
18 mai 2019

But

But : commencer avec la relativité générale et obtenir l'équation de Schrödinger "euclidienne" :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi$$

Remarque : c'est l'approximation non relativiste de l'équation de Klein-Gordon "minkowskienne" :

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\psi$$

Idée : KG découle d'un principe variationnel qu'on peut mettre côte à côte avec celui de la RG.

Problème potentiel

Problème potentiel : la RG dit que ψ et m courbent la métrique d'espace-temps.

$\Longrightarrow$ les équations "plates" suivantes :

- l'éq. d'onde : $\eta^{ij}\partial_i\partial_j\psi = 0$
- l'éq. de KG : $\eta^{ij}\partial_i\partial_j\psi = -(mc/\hbar)^2\psi$
- l'éq. de Schrödinger : $i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\psi$

sont "impossibles".

Questions :

- À quel point est-ce que ψ et m courbent l'espace-temps ?
- Est-ce négligeable ?

Plan

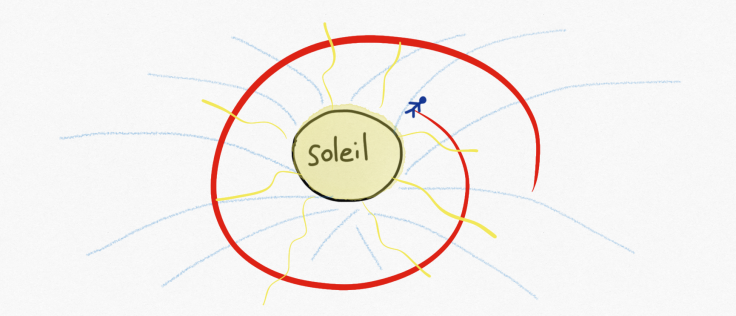
Plan :

1. La relativité générale (intuition, définitions)
2. Choix d'un lagrangien particulier
3. Une approximation WKB
4. Relation entre la masse et la courbure
5. Le problème de la courbure
6. Idées
7. Erratum (2019-05-19)

La relativité générale - intuition

La relativité générale :

- la matière et l'énergie courbe l'espace-temps
- la matière et l'énergie suivent des géodésiques sur cet espace-temps



Géométrie riemannienne - définitions

Soit (Q, g) une *variété pseudo-riemannienne* munie de *coordonnées locales* (x^i).

Les coordonnées locales induisent une base de *vecteurs tangents* :

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i} \in TQ$$

La métrique g encode la "forme géométrique" de Q.

Localement, les *coefficients métriques* de g sont :

$$g_{ij} := g(\partial_i, \partial_j)$$

J'utiliserai la fameuse *notation d'Einstein*. On somme sur les indices répétés, e.g. :

$$\alpha_i v^i := \sum_i \alpha_i v^i$$

Géométrie riemannienne - définitions

Les *symboles de Christoffel*, le *tenseur de courbure de Riemann*, le *tenseur de courbure de Ricci*, la *courbure scalaire*, le *tenseur d'Einstein* et l'*opérateur de Laplace-Beltrami* sont respectivement définis comme :

$$\Gamma^k_{ij} := \frac{1}{2} g^{km}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) \tag{1}$$

$$R^l_{kij} := \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik} \tag{2}$$

$$R_{ij} := R^k_{ikj} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_j \Gamma^k_{ik} + \Gamma^l_{ij}\Gamma^k_{kl} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl} \tag{3}$$

$$R := g^{ij} R_{ij} \tag{4}$$

$$G_{ij} := R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \tag{5}$$

$$\Delta = g^{ij}\left(\partial_i \partial_j - \Gamma^k_{ij}\partial_k\right) \tag{6}$$

Lorsque g est de type $(+,-,-,-)$, Δ est dénoté $\square$.

Physique générale

Soit $L = L(\varphi, \partial_i \varphi, g_{ij})$ la densité lagrangienne d'un champ scalaire $\varphi : Q \to \mathbb{R}$.

Le *tenseur énergie-impulsion* de L est :

$$T_{ij} := -2 \frac{\partial L}{\partial g^{ij}} + g_{ij} L \tag{7}$$

Le *scalaire de Laue* de L est :

$$T := g^{ij} T_{ij} \tag{8}$$

Et des constantes : c la *vitesse de la lumière dans le vide*, $\hbar$ la *constante de Planck réduite*, G la *constante gravitationnelle*, $\pi \approx 3$, $\kappa = 8\pi G / c^4$ la *constante d'Einstein*.

La RG - mathématiquement

L'*intégrale d'action d'Hilbert-Einstein* couplant la métrique g et le champ φ est :

$$S_{\mathrm{HE}}[g,\varphi] := \int_Q \left(\frac{1}{2\kappa}R + L\right)\sqrt{-\det[g_{ij}]}d^4x \tag{9}$$

Les éq. d'Euler-Lagrange venant des variations en g_{ij} donnent les *équations d'Einstein de la relativité générale* :

$$G_{ij} = \kappa T_{ij} \tag{10}$$

Les éq. d'Euler-Lagrange venant des variations en φ donnent :

$$\partial_i\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_i\varphi)}\right) = \frac{\partial L}{\partial\varphi} \tag{11}$$

La RG - reformulation

En prenant la trace par g^{ij} de chaque côté de l'éq. d'Einstein (10) on obtient :

$$R = -\kappa T \tag{12}$$

Posons :

$$K_{ij} := T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \tag{13}$$

Alors l'éq. d'Einstein (10) est équivalente à cette version :

$$R_{ij} = \kappa K_{ij} \tag{14}$$

Pour un certain L

Considérons $\xi \in \mathbb{R}$ une constante sans unités à déterminer plus tard. Considérons ce lagrangien :

$$L(\varphi) = \frac{\xi}{2\kappa} g^{ij} (\partial_i \varphi)(\partial_j \varphi) \tag{15}$$

Le tenseur énergie-impulsion de L est :

$$T_{ij} = \frac{\xi}{\kappa} \left(-(\partial_i \varphi)(\partial_j \varphi) + \frac{1}{2} g_{ij} g^{kl} (\partial_k \varphi)(\partial_l \varphi) \right) \tag{16}$$

Le tenseur de Laue correspondant est :

$$T = \frac{\xi}{\kappa} g^{ij} (\partial_i \varphi)(\partial_j \varphi) \tag{17}$$

Le tenseur K_{ij} est :

$$K_{ij} = -\frac{\xi}{\kappa} (\partial_i \varphi)(\partial_j \varphi) \tag{18}$$

Pour un certain L

L'équation d'Einstein reformulée est :

$$R_{ij} = -\xi(\partial_i\varphi)(\partial_j\varphi) \tag{19}$$

Sa g-trace est :

$$R = -\xi g^{ij}(\partial_i\varphi)(\partial_j\varphi) \tag{20}$$

L'éq. d'Euler-Lagrange est :

$$\Box\varphi = 0 \tag{21}$$

Approximation WKB

<u>*Idée :*</u> prendre $\varphi = S/\hbar$, la *phase* d'une *onde WKB* :

$$\psi = \exp(iS/\hbar)$$

Un calcul direct montre que :

$$\hbar^2 \Box\psi = -(g^{ij}(\partial_i S)(\partial_j S) - i\hbar\Box S)\psi \tag{22}$$

Ainsi, pour $f : Q \to \mathbb{R}$ on a :

$$\Box\psi = f\psi \iff \begin{cases} \Box S = 0 \\ f = -\hbar^{-2} g^{ij}(\partial_i S)(\partial_j S) \end{cases}$$

<u>*Remarque :*</u> lorsque f est constante, les rayons lumineux de ψ (i.e. les courbes gradient de S) sont des géodésiques (exercice !).

Approximation WKB et RG

Choix astucieux : prenons :

$$f = \xi^{-1} R$$

$$\xi = 6$$

Ainsi, les équations (20) et (21) impliquent :

$$\Box\psi - \frac{1}{6} R\psi = 0 \tag{23}$$

C'est l'éq. d'onde conforme (voir [5, 6]).

Remarque : ça ressemble drôlement à l'éq. de Klein-Gordon :

$$\Box\psi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \psi = 0 \tag{24}$$

Idée : les équations (23) et (24) suggèrent :

$$R = -6 \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \tag{25}$$

De $\mathbb{R}^4$ à $\mathbb{R}^3$

Pour visualiser les choses en 3 dimensions, supposons que la métrique d'espace-temps g est du type :

$$g = c dt \otimes c dt - \tilde{g} \tag{26}$$

pour $\tilde{g}$ une métrique riemannienne $(+, +, +)$ spatiale indépendante du temps sur $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{L}_{\partial_t} \tilde{g} = 0$$

$$\tilde{g}(\partial_t, \cdot) = \tilde{g}(\cdot, \partial_t) = 0$$

$\implies$ les courbures scalaires R_g et $R_{\tilde{g}}$ sont reliées comme :

$$R_g = -R_{\tilde{g}} \tag{27}$$

Courbure spatiale et masse

Les équations (25) et (27) impliquent une relation entre la masse m et la courbure scalaire $R_{\tilde{g}}$ de l'espace $(\mathbb{R}^3, \tilde{g})$:

$$R_{\tilde{g}} = 6 \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \qquad (28)$$

<u>*Idée :*</u> définissons un *rayon de courbure* :

$$r_C = \frac{\hbar}{mc}$$

Alors la courbure est :

$$R_{\tilde{g}} = \frac{6}{r_C^2}$$

C'est la courbure scalaire d'une 3-sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ de rayon r.

Éq. de Schrödinger courbe vs. plate

En utilisant la métrique (26), l'approx. non relativiste de l'éq. de KG "courbe" (24) est l'éq. de Schrödinger "courbe" :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\tilde{g}}\psi + mc^2\psi \tag{29}$$

Ce dernier terme mc^2 peut être absorbé dans la phase de ψ alors on l'oublie. Ainsi, on a cette équation de Schrödinger courbe :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\tilde{g}}\psi \tag{30}$$

On veut arriver à l'éq. de Schrödinger plate :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)\psi$$

Problème

Pour arriver à Schrödinger plat, il suffit d'avoir localement :

$$\Delta_{\tilde{g}} \approx \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

Pour cela, il suffit d'avoir :

$$\tilde{g} \approx dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

Problème : pour un électron dans un atome d'hydrogène (de taille r_H) :

- $r_H \approx 5.29 \times 10^{-11}\mathrm{m}$
- $r_C = \hbar/mc \approx 3.86 \times 10^{-13}\mathrm{m}$

Puisque $r_C \ll r_H$, la métrique n'est pas du tout euclidienne à l'échelle atomique.

Vers un principe d'aplatissement

Question : où donc cacher toute la courbure ?

Normalement on la cache dans les "dimensions verticales" d'un G-fibré principal (e.g. théorie de Kaluza-Klein).

Problème : ici la courbure de Ricci R_{ij} est ici "horizontale" et non verticale.

Deux remarques :

1. La *longueur d'onde de Compton* $\lambda_C := 2\pi r_C$ peut être vue comme étant la *longueur d'onde de de Broglie* correspondante au momentum mc dans une *cinquième dimension d'espace-temps* [1].
2. λ_C est la longueur des géodésiques circulaires en l'espace usuel $\mathbb{R}^3$, et non dans une "cinquième" dimension.

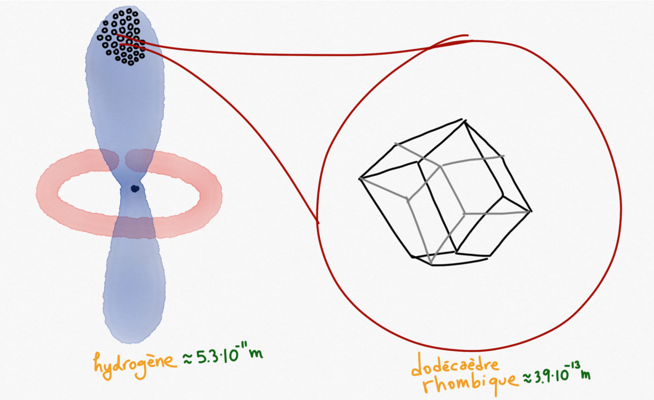
Vers un principe d'aplatissement

<u>*Idée :*</u>

- Paver $\mathbb{R}^3$ par des polyèdres.
- L'espace "horizontal" devient un réseau $\mathbb{Z}^3$.
- Le réseau $\mathbb{Z}^3$ est "plat" (e.g. en prenant ψ nul sur $\mathbb{Z}^3$).
- La courbure est "cachée" dans les polyèdres.
- L'orientation et la déformation des polyèdres du réseau fait intervenir des groupes de Lie.
- Sur le réseau $\mathbb{Z}^3$ repose donc un G-fibré principal dont le groupe G dépend du type de polyèdre.
- La théorie de jauge sur $\mathbb{R}^3$ serait alors l'approximation de celle sur un réseau (*lattice gauge theory*) et non l'inverse.
- Puisqu'il y a beaucoup de pavages de $\mathbb{R}^3$ par des polyèdres, il y a beaucoup de sortes de particules fondamentales.

Vers un principe d’aplatissement

On colle les polyèdres sur un réseau $\mathbb{Z}^3$ "plat" où ψ est nulle :



Il y aurait donc une *alvéolisation* des orbitales atomiques.

Merci de votre attention ☺

Erratum

2019-05-20 : La métrique (27) est physiquement impossible. En effet, ψ est d'énergie E non nulle. L'équation d'Hamilton-Jacobi $E = -\partial_t S = -c\partial_0 S$ implique donc que $\partial_0 S$ est non nul. L'équation d'Einstein (19) implique ensuite que le coefficient R_{00} de la courbure de Ricci de g est non nul. Pourtant la métrique (27) a un R_{00} nul. La construction plus haut basée sur la métrique (27) est donc à prendre avec un grain de sel.

[1] N. Aubin-Cadot, *On the definition of a mass operator from the penta-dimensional perspective*, 2018.
[2] ______, *(les idées qui précèdent, bientôt sur researchgate)*, (2019).
[3] R. Bott, *On some recent interactions between mathematics and physics*, Canad. Math. Bull. **28** (1985), no. 2, 129–164.
[4] K. S. Thorne et J. Wheeler C. W. Misner, *Gravitation*, Princeton University Press, 1973.
[5] N. A. Chernikov and E. A. Tagirov, *Quantum theory of a scalar field in de sitter space-time*, Ann. Inst. Henri Poincaré **IX** (1968), no. 2, 109–141.
[6] J. Sniatycki, *Geometric quantization and quantum mechanics*, Applied Mathematical Sciences, Springer, 1980.