Sur d'éventuelles conséquences géométriques de l'intégrale d'action de Yang-Mills-Higgs pour divers champs de Higgs classiques

Noé Aubin-Cadot

19 août 2015

À l'intention de mon jury :

- M. François Lalonde
- M. Octav Cornea
- Mme. Christiane Rousseau

Résumé :

Une géométrie particulière devient essentiellement un choix de champ de Higgs particulier. Je considère l'influence de divers champs de Higgs sur l'espace des connexions sur le $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$-fibré des repères $\mathrm{Fr}(B) \to B$ linéaires tangents de B. Je procède en couplant diverses structures sur B à une intégrale d'action *à la Yang-Mills* $S[\text{ϡ}] = (\varpi, \varpi)$. Certaines conséquences intrigantes semblent émerger. L'utilisation de la connexion de Levi-Civita pour g semble découler d'une extrémale d'action. Ce faisant, une reformulation plus générale de la relativité générale semble se dessiner. Une éventuelle réduction des axiomes de la quantification toroplectique reste à être élucidée.

Sur d'éventuelles conséquences géométriques de l'intégrale d'action de Yang-Mills-Higgs pour divers champs de Higgs classiques

Après plus de $1,325 \cdot 10^{10}$ dollars américain bien investi [12], c'est confirmé ! Le boson de Brout-Englert-Higgs existe. Pierre angulaire de la physique des particules, il est tenu responsable de la masse de certaines particules fondamentales et de certaines *brisures de symétrie*. La découverte (ici plutôt la confirmation) de phénomènes physiques étant une source constante d'inspiration pour les mathématiciens, il incombe de se questionner sur l'interprétation géométrique de ce qu'est un champ de Higgs. En effet, puisque le rôle du champ de Higgs est si fondamental en physique, pourquoi n'aurait-il pas un rôle aussi profond en géométrie ?

Suivant G. Sardanashvily [18, 19], la définition générale d'un champ de Higgs classique est un concept mathématique déjà bien connu des géomètres. Soit $P \to B$, un G-fibré principal de base B et de groupe structurel G. Soit $H < G$, un sous-groupe de G. Alors [13], P admet une réduction $\iota : \check{P} \hookrightarrow P$ du groupe structurel à un H-fibré principal $\check{P} \to B$ si et seulement s'il existe une section globale h du fibré $P/H \to B$. On dit alors que $h \in \Gamma^\infty(B; P/H)$ est un *champ de Higgs classique* (je dirai simplement *champ de Higgs*). La réduction structurelle est ce que les physiciens nomment une *brisure de symétrie*.

Lorsque le sous-groupe $H < G$ préserve une certaine structure sur un certain espace vectoriel V d'une certaine représentation $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$, h est alors vu comme une *structure* sur B. Prenons par exemple $\mathrm{Fr}(B) \to B$, le *fibré des repères linéaires tangents* sur B où $\dim_{\mathbb{R}} B = 2n$. $\mathrm{Fr}(B) \to B$ est un $\mathrm{GL}(2n;\mathbb{R})$-fibré principal. Une structure riemannienne $g \in \Gamma^\infty(B; T^*B \odot T^*B)$ sur B est une $\mathrm{O}(2n)$-réduction structurelle de $\mathrm{Fr}(B)$ où $\mathrm{O}(2n) < \mathrm{GL}(2n;\mathbb{R})$ préserve la structure euclidienne canonique $\sum_{i=1}^{2n} e_i^* \otimes e_i^*$ sur $\mathbb{R}^{2n}$. Une structure symplectique $\omega \in \Gamma^\infty(B; T^*B \wedge T^*B)$ sur B est une $\mathrm{Sp}(2n;\mathbb{R})$-réduction structurelle de $\mathrm{Fr}(B)$ où $\mathrm{Sp}(2n;\mathbb{R}) < \mathrm{GL}(2n;\mathbb{R})$ préserve la structure symplectique canonique $\sum_{i,j=1}^{n} e_i^* \wedge e_{i+n}^*$ sur $\mathbb{R}^{2n}$. Enfin, une structure (presque-)complexe $J \in \Gamma^\infty(B; T^*B \otimes TB)$ sur B est une $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$-réduction structurelle de $\mathrm{Fr}(B)$ où $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C}) < \mathrm{GL}(2n;\mathbb{R})$ préserve la structure complexe canonique $\sum_{i=1}^{n} e_i^* \otimes e_{i+n} - e_{i+n}^* \otimes e_i$ sur $\mathbb{R}^{2n}$. Les sections g, ω et J *sont* des champs de Higgs. Alors que les isométries préservent un g donné, que les symplectomorphismes préservent un ω donné et que les applications J-holomorphes préservent un J donné, on pourrait aisément définir un *higgsomorphisme* comme étant une application laissant invariant un champ de Higgs h donné.

Bref, le champ de Higgs est effectivement un concept fondamental en géométrie. Un champ de Higgs est un choix de géométrie. J'irais même jusqu'à dire qu'il *est*, selon le programme de Erlangen, la géométrie !

Mais quelles sont les conséquences d'une telle définition ? Certes, une structure est une structure et les structures sont déjà bien connues. L'utilité d'introduire la perspective qu'une structure est un champ de Higgs est d'ajouter un ou plusieurs termes de *champ de Higgs* (ici des structures) aux intégrales d'action de type *Yang-Mills*. Ceci devrait à terme, il me semble, mener à différentes sortes d'interactions entre les champs de jauges (i.e. des connexions) et la *géométrie de fond* encodée dans les *champs de Higgs* g, ω, J, etc.. Pour ce faire, j'utiliserai une intégrale d'action de type *Yang-Mills-Higgs* [24]

$$S[\mathfrak{Z}] = (\varpi, \varpi) + (\mathrm{d}_{\mathfrak{Z}} h, \mathrm{d}_{\mathfrak{Z}} h) := \int_B \varpi \wedge^{\kappa_1} \star^g \varpi + \int_B (\mathrm{d}_{\mathfrak{Z}} h) \wedge^{\kappa_2} (\star^g \mathrm{d}_{\mathfrak{Z}} h)$$

où $\varpi \in \Omega^2(B; P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g})$ est la courbure d'une connexion $\mathfrak{Z} \in \Omega^1_{\mathrm{Ad,ver}}(P; \mathfrak{g})$ sur un G fibré principal $P \to B$ dont la base (B, g) est une variété riemannienne. Cette intégrale d'action est essentiellement l'intégrale d'action de Yang-Mills $S[\mathfrak{Z}] = (\varpi, \varpi)$ couplée minimalement à un terme *higgsien* $(\mathrm{d}_{\mathfrak{Z}} h, \mathrm{d}_{\mathfrak{Z}} h)$ où $\mathrm{d}_{\mathfrak{Z}} h$ est la dérivée covariante du champ de Higgs h. Le *mécanisme de Brout-Englert-Higgs-Hagen-Guralnik-Kibble* (BEHHGK) implique habituellement un champ de Higgs bien précis ainsi que l'ajout d'un potentiel $V(h) = (1 - |h|^2)^2$ en forme de *chapeau de mexicain* à l'intégrale d'action [25]. Je ne considérerai ni potentiel $V(h)$ mais plutôt Yang-Mills-Higgs $S[\mathfrak{Z}, h] = (\varpi, \varpi) + (\mathrm{d}_{\mathfrak{Z}} h, \mathrm{d}_{\mathfrak{Z}} h)$ qu'utilise C. H. Taubes [24]. Toutefois, mon champ de Higgs h sera vu comme structure générique sur B tel qu'en [18, 19]. Je considérerai aussi diverses variantes impliquant la dérivée covariante $\mathrm{d}_{\mathfrak{Z}}$, des champs de Higgs h et de la courbure ϖ de connexion $\mathfrak{Z}$.

Techniquement parlant, donné un G-fibré principal $P \to B$, je veux étudier l'influence de $h \in \Omega^k(B; P \times_\rho V)$ sur l'espace de module de l'espace des points critiques $(\eth, h) \in \mathcal{A} \times \mathcal{H}$ de $S[\eth, h] = (\varpi, \varpi) + (\mathrm{d}_{\eth} h, \mathrm{d}_{\eth} h)$ modulo transformation de jauge préservant h. Remarquons que cette étude est plus large que simplement de type *Yang-Mills* puisque rien ne nous force à prendre $\dim_{\mathbb{R}} B = 4$.

Considérons pour l'instant la théorie de Yang-Mills. On se donne un SU(2)-fibré principal $P \to B$ où (B, g) est une variété riemannienne de dimension 4. La théorie de Yang-Mills est l'étude des extrémales de l'intégrale d'action $S[\eth] = (\varpi, \varpi) := \int_B \varpi \wedge^{\kappa} \star^{g} \varpi$. Le produit scalaire $\kappa \in \Omega^0(B; \mathrm{Ad}P^* \otimes \mathrm{Ad}P^*)$ sur $\mathrm{Ad}P$ est non-dégénéré car induit par la forme de Killing K sur $\mathfrak{su}(2)$ qui est semi-simple. κ est supposé constant au sens où son relevé horizontal $\kappa^\sharp \in \Omega^0_{\mathrm{Ad}^* \otimes \mathrm{Ad}^*, \mathrm{hor}}(\mathfrak{su}(2)^* \otimes \mathfrak{su}(2)^*)$ est égal à K partout sur P. Le champ de Higgs κ est donc, par défaut, supposé $\mathrm{d}_{\eth}$-invariant. La théorie de Yang-Mills est basée sur le fait que l'action du groupe de jauge $\mathcal{G}$ sur l'espace de connexions $\mathcal{A}$ laisse invariante l'intégrale d'action. La théorie de Yang-Mills présuppose donc, sans le dire à voix haute, que $\mathcal{G}$ laisse invariant le champ de Higgs métrique g. La structure riemannienne g est une section de

$$T^*B \odot T^*B \simeq \mathrm{Fr}(B) \times_{\rho^* \otimes \rho^*} \left((\mathbb{R}^4)^* \odot (\mathbb{R}^4)^* \right)$$

où $\mathrm{Fr}(B) \to B$ est le $\mathrm{GL}(4; \mathbb{R})$-fibré principal des repères linéaires tangents de B et où ρ^* est la représentation duale de la représentation fondamentale $\rho : \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}); g \mapsto g$ sur $\mathbb{R}^n$. C'est-à-dire, g est une section d'un fibré associé à $\mathrm{Fr}(B)$, et non associé à P. La question se pose : puisque

$$\mathrm{SU}(2) = \mathrm{SO}(4) \cap \mathrm{GL}(2; \mathbb{C}) < \mathrm{GL}(4; \mathbb{R})$$

et puisque le groupe de jauge $\mathcal{G}$ doit laisser invariant g, peut-on voir P comme une SU(2)-réduction structurelle $\iota : P \hookrightarrow \mathrm{Fr}(B)$ du fibré des repères $\mathrm{Fr}(B)$ sur B ? En effet, dès lors que la SU(2)-réduction $P \hookrightarrow \mathrm{Fr}(B)$ est contenue dans la O(4)-réduction $\mathrm{Fr}^{\mathrm{O}}(B) \hookrightarrow \mathrm{Fr}(B)$ induite par g, comme SU(2) est inclus en O(4), toute action de SU(2) sur $P \subset \mathrm{Fr}(B)$ laissera invariante l'application $(\rho^* \otimes \rho^*)$-équivariante $g^\sharp \in \Omega^0_{\rho^* \otimes \rho^*, \mathrm{hor}}(\mathrm{Fr}(B); (\mathbb{R}^4)^* \odot (\mathbb{R}^4)^*)$ correspondant à g. Étudions maintenant les conséquences d'une telle hypothèse. D'abord $\eth \in \Omega^1_{\mathrm{Ad}, \mathrm{ver}}(P; \mathfrak{su}(2))$ peut être vu comme rappel $\eth = \iota^* \eth^{\mathrm{Fr}}$ pour une certaine forme de connexion $\eth^{\mathrm{Fr}} \in \Omega^1_{\mathrm{Ad}, \mathrm{ver}}(\mathrm{Fr}(B); \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}))$ sur P. Puisque $\eth^{\mathrm{Fr}}|_P \in \Omega^1(P; \mathfrak{gl}(4; \mathbb{R}))$ doit être à valeurs en $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{so}(4)$, i.e. est antisymétrique lorsque vue comme matrice réelle 4×4, la métrique g est $\mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}}$-invariante, i.e. $\mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} g = 0$. De même, lorsque l'on étend $\kappa^\sharp \in \Omega^0_{\mathrm{ad}, \mathrm{hor}}(P; \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*)$ de manière ad-équivariante à tout $\mathrm{Fr}(B)$, un argument similaire montre que $\mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}}\kappa = 0$. En bref, l'hypothèse de $\mathcal{G}$-invariance de l'action de Yang-Mills demandant que κ et g soient $\mathcal{G}$-invariantes revient à demander, dès lors que l'on considère P comme une $\mathrm{SU}(2)$-réduction de $\mathrm{Fr}(B)$, que

$$\mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} g = 0 \;\text{ et }\; \mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}}\kappa = 0$$

La question se pose alors : les conditions *a priori* $\mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} g = 0$ et $\mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}}\kappa = 0$ de la théorie de Yang-Mills découlent-ils d'une intégrale d'action *plus large* ? Il me semble que oui.

Considérons l'action

$$S[\vartheta^{\mathrm{Fr}}, g, \kappa] := (\varpi^{\mathrm{Fr}}, \varpi^{\mathrm{Fr}}) + (\mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} g, \mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} g) + (\mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}}\kappa, \mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}}\kappa)$$

sur l'espace des connexions ϑ^{Fr} sur le $\mathrm{GL}(4;\mathbb{R})$-fibré des repères $\mathrm{Fr}(B)$ pour certains champs de Higgs g et κ. Ici, $\varpi^{\mathrm{Fr}} \in \Omega^2(B; \mathrm{AdFr}(B))$ est, par définition, la *forme de courbure de Riemann* induite par la connexion ϑ^{Fr}. La connexion ϑ^{Fr} est à valeurs matricielles et se décompose donc en $\vartheta^{\mathrm{Fr}} = \vartheta^{\mathrm{Fr,Sym}} + \vartheta^{\mathrm{Fr,Antisym}}$ où $\vartheta^{\mathrm{Fr,Sym}}$ est à valeurs en des matrices symétriques $\mathrm{Mat}^{\mathrm{Sym}}(4;\mathbb{R})$ et où $\vartheta^{\mathrm{Fr,Antisym}}$ est à valeurs en des matrices antisymétriques $\mathrm{Mat}^{\mathrm{Antisym}}(4;\mathbb{R})$. Soient les distributions $H^{\mathrm{Sym}} := \ker(\vartheta^{\mathrm{Fr,Sym}})$ et $H^{\mathrm{Antisym}} := \ker(\vartheta^{\mathrm{Fr,Antisym}})$. Leur intersection est la distribution horizontale $H := \ker(\vartheta^{\mathrm{Fr}})$ de la forme de connexion ϑ^{Fr}, i.e. $H^{\mathrm{Sym}} \cap H^{\mathrm{Antisym}} = H$. On remarque que $\vartheta^{\mathrm{Fr,Antisym}}$ est à valeurs en l'algèbre de Lie de $\mathrm{O}(4)$. Intuitivement, $(\mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} g, \mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} g)$ est une forme d'*énergie* qui mesure à quel point la $\mathrm{O}(4)$-réduction $\mathrm{Fr}^{\mathrm{O}}(B) \hookrightarrow \mathrm{Fr}(B)$ repose en H^{Sym}. En effet, $\mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} g = 0$ si et seulement si $T\mathrm{Fr}^{\mathrm{O}}(B) \subset H^{\mathrm{Sym}}$. Ainsi, l'ajout de

$$(\mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} g, \mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} g)$$

à l'intégrale d'action semble forcer les connexions ϑ^{Fr} qui extrémalisent l'action à vérifier $\mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} g = 0$. C'est sensiblement équivalent à se donner une courbe sur B et à se demander quelles connexions ϑ^{Fr} font de cette courbe une géodésique. Sauf qu'ici c'est $\mathrm{Fr}^{\mathrm{O}}(B)$ que l'on veut *rendre* horizontale pour une certaine connexion ϑ^{Fr}. Ce résultat me *semble* vrai. En effet, il est aisé de démontrer qu'une action de type

$$S[\vartheta^{\mathrm{Fr}}, g] = (\mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} g, \mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} g)$$

lorsqu'extrémalisée en ϑ^{Fr} implique $\mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} g = 0$. Et lorsqu'extrémalisée en g, je n'ai encore rien calculé. Ce que je sais, c'est qu'il faut faire attention à la *sensibilité* de

$\star^g$ par rapport à g. Donc, pour l'instant, en ne perturbant que le terme $(\mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} g, \mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} g)$ par rapport à $\eth^{\mathrm{Fr}}$, le calcul d'extrémales implique $\mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} g = 0$. Toutefois, lorsque l'on généralise à une action de type *Yang-Mills + Higgs*

$$S[\eth^{\mathrm{Fr}}, g] = (\varpi^{\mathrm{Fr}}, \varpi^{\mathrm{Fr}}) + (\mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} g, \mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} g)$$

lorsque je perturbe cette action par rapport à $\eth^{\mathrm{Fr}}$, le terme $(\varpi^{\mathrm{Fr}}, \varpi^{\mathrm{Fr}})$ ne vient plus forcément impliquer $\mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} g = 0$. Et lorsque l'on perturbe cette action par rapport à g, il faut, encore une fois, faire attention à la g-sensibilité de $\star^g$. Continuons. De même pour κ, l'ajout de $(\mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} \kappa, \mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} \kappa)$ à l'action mènerait idéalement à $\mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} \kappa = 0$, ce qui est aussi à démontrer. En particulier, en ajoutant un terme $(\mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} \Xi, \mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} \Xi)$ impliquant la torsion $T := \mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} \Xi$, où $\Xi := \mathrm{id}_{TB} \in \Omega^1(B; TB)$ est la forme de soudure, à l'intégrale d'action, il semblerait que le même principe s'applique, i.e. que ça pousse éventuellement $\eth^{\mathrm{Fr}}$ à être sans torsion. On aurait alors $\mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} g = 0$ et $\mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} \Xi = 0$, i.e. ça forcerait $\eth^{\mathrm{Fr}}$ à être Levi-Civita pour g. L'utilisation de connexion de Levi-civita ne devient alors plus un choix *pratique* pour les calculs, mais la résultante d'une extrémale d'action. En particulier, en continuant à coupler l'action avec d'autres champs, il se pourrait que l'extrémale ne soit pas sans torsion. Le calcul d'extrémales d'action forcerait la torsion à égaler *quelque chose*, que cette *chose* soit nulle ou non. Cette idée est bien plus puissante que la théorie d'Einstein-Cartan. La théorie d'Einstein-Cartan est une tentative de généralisation de la relativité générale basée sur le simple fait d'omettre l'hypothèse de torsion nulle [8]. Ce faisant, elle couple des phénomènes gravitationnels au spin. Ce que je fais ici, c'est d'omettre *toutes* les hypothèses reliant la connexion et la métrique. Leur interrelation d'écoule d'un principe de moindre action et non d'une *drôle d'idée*. L'utilisation ou non d'une connexion de Levi-Civita n'est pas un choix à prendre à la légère. Un tel choix devrait idéalement découler d'une extrémale d'action $S[\eth^{\mathrm{Fr}}, g, \Xi]$ et de la supposition que *la métrique g et la forme de soudure Ξ sont des champs de Higgs pour la connexion*. D'autre part, il serait pertinent de considérer les extrémales d'action $(\eth^{\mathrm{Fr}}, g, \Xi)$ d'une action de type

$$S[\eth^{\mathrm{Fr}}, g, \Xi] = (\varpi^{\mathrm{Fr}}, \varpi^{\mathrm{Fr}}) + (\mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} g, \mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} g) + (\mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} \Xi, \mathrm{d}_{\eth^{\mathrm{Fr}}} \Xi)$$

pour g de signature $(+, -, -, -)$ induisant une $\mathrm{O}(1,3)$-réduction structurelle. En effet, ϖ^{Fr} est la forme de courbure de Riemann. Bien que cette intégrale d'action ne soit pas celle d'Hilbert-Einstein $\int_B R\Omega$ où $R := \mathrm{tr}_g(\mathrm{tr}(\varpi^{\mathrm{Fr}}))$ est la courbure scalaire et où Ω est la forme volume induite par g, quelles sont les extrémales de $S[\eth^{\mathrm{Fr}}, g, \Xi]$? Obtient-on les équations d'Einstein dans le vide ? Et qu'arrive-t-il si l'on ajoute un champ de Higgs correspondant une $\mathrm{U}(1)$-réduction structurelle correspondante à la jauge électromagnétique $U(1)$? L'interaction avec d'autres champs viennent-ils perturber les éventuelles équations $d_{ϡ^{Fr}} g = d_{ϡ^{Fr}} \Xi = 0$? Et ainsi de suite. D. Bleecker [6] parle d'une action d'*Einstein-Yang-Mills* dont je n'ai aucune idée. Est-ce un cas particulier de l'action de Yang-Mills-Higgs de type $S[ϡ, g, \Xi]$?

Continuons dans les questions existentielles. On se donne B de dimension $2n$. Une structure presque-complexe $J \in \Omega^1(B; TB)$ est un champ de Higgs qui est une $GL(n; \mathbb{C})$-réduction du $GL(2n; \mathbb{R})$-fibré principal $Fr(B) \to B$. On se donne une métrique riemannienne g auxiliaire. L'intégrale d'action

$$S[ϡ^{Fr}, J] := (d_{ϡ^{Fr}} J, d_{ϡ^{Fr}} J)$$

lorsque perturbée sur l'espace des connexions $ϡ^{Fr}$ implique $d_{ϡ^{Fr}} J = 0$. De même, une intégrale d'action de type

$$S[ϡ^{Fr}, J, \Xi] := (d_{ϡ^{Fr}}(J + \Xi), d_{ϡ^{Fr}}(J + \Xi))$$

implique $d_{ϡ^{Fr}}(J + \Xi) = 0$. Quelles en sont les conséquences ? Une éventuelle nullité du tenseur de Nijenhuis ? Bref, quelles sont les conséquence d'introduction de divers champs de Higgs sur l'intégralité de J ? La théorie serait à développer pour un champ de Higgs h quelconque puis à appliquer aux géométries usuelles ω, J, g, etc.

Résumons. Sur une variété B de dimension $2n$ peut reposer diverses structures. Il existe les champs suivants : ϖ^{Fr}, κ, g, J, ω, Ξ, etc. qui ne sont *a priori* $d_{ϡ^{Fr}}$-invariants (sauf ϖ^{Fr} qui l'est grâce à l'identité de Bianchi). C'est-à-dire, on n'a pas *a priori* $d_{ϡ^{Fr}}\kappa$ $d_{ϡ^{Fr}} g = 0$, $d_{ϡ^{Fr}}\omega = 0$, $d_{ϡ^{Fr}} J = 0$, $d_{ϡ^{Fr}}\Xi = 0$. Ces propriétés de $d_{ϡ^{Fr}}$-invariance pour g, de fermeture pour ω, d'éventuelle intégrabilité pour J et de torsion nulle semblent, vraisemblablement, découler d'une extrémale d'action. Entre autres, en se limitant à des connexions et des champs de Higgs *convenables*, il semble possible de définir un complexe de déformation d'instantons exact et elliptique qui relierait, via le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer, la classifications des structures $d_{ϡ^{Fr}}$-fermées à des invariants topologiques des fibrés respectifs des structures en question. C'est-à-dire, la condition de $d_{ϡ^{Fr}}$-fermeture sur les sections g, J, ω, Ξ pourraient être vues comme conditions topologiques relativement à leurs fibrés respectifs. Poursuivant dans cette bulle spéculative, vient enfin l'étude des espaces de modules de solutions de l'extrémale d'action. De manière méthodique, on peut se demander si ces espaces de connexions et de champ de Higgs admettent une structure symplectique. On peut ensuite se demander si l'action du groupe de jauge $\mathcal{G}_h$, préservant les champs de Higgs impliqués, sur l'espace des connexions $\mathcal{A}$ préserve l'intégrale d'action et est hamiltonienne (i.e. s'il existe une application moment μ pour la $\mathcal{G}$-action sur l'espace des connexions et des champs de Higgs). Bref, se demander s'il est possible de voir l'espace de module des extrémales d'action de connexions (couplées à divers champs de Higgs) modulo transformation de jauge comme une simple réduction symplectique, tel qu'Atiyah et Bott l'ont fait pour l'espace des connexions plates sur une surface de Riemann [2]. Car, auquel cas le quotient soit une réduction symplectique, l'espace de module serait, si je ne m'abuse, un orbifold symplectique ou, mieux encore, une variété symplectique.

De la classification des diverses structures sur une variété B à une définition plus générale de la relativité générale, le principe de moindre action frappe encore. La première étape est de vérifier que l'intégrale d'action soit bel et bien $\mathcal{G}_h$-invariante. Comme $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ n'a pas une algèbre de Lie semi-simple, il faut faire attention à définir un *bon* produit scalaire pour le fibré $\mathrm{AdFr}(B)$. En effet, la forme de Killing K est dégénérée sur $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$. En fonction des champs de Higgs en question, il serait toutefois possible de prendre la forme de Killing. Par exemple, prenons une $\mathrm{O}(n)$-réduction structurelle $\iota : \mathrm{Fr}^{\mathrm{O}}(B) \hookrightarrow \mathrm{Fr}(B)$ induite par une métrique riemannienne g. L'extrémale en $\mathscr{D}^{\mathrm{Fr}}$ d'une action

$$S[\mathscr{D}^{\mathrm{Fr}}, g, \kappa] = (\varpi^{\mathrm{Fr}}, \varpi^{\mathrm{Fr}}) + (\mathrm{d}_{\mathscr{D}^{\mathrm{Fr}}} g, \mathrm{d}_{\mathscr{D}^{\mathrm{Fr}}} g)$$

implique d'abord $\mathrm{d}_{\mathscr{D}^{\mathrm{Fr}}} g = 0$ (c'est à vérifier, je ne peux l'affirmer pour l'instant). Ceci impliquerait ensuite que $\iota^* \varpi^{\mathrm{Fr},\sharp} \in \Omega^2(\mathrm{Fr}^{\mathrm{O}}(B); \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}))$ soit à valeurs en $\mathrm{Lie}(\mathrm{O}(n))$. Donc, pour toute section trivialisante locale $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha) \subset \mathrm{Fr}(B)$ de $\mathrm{Fr}(B)$ ayant son image en $\mathrm{Fr}^{\mathrm{O}}(B) \subset \mathrm{Fr}(B)$, la 2-forme $\varpi^{\mathrm{Fr}}_\alpha := s^*_\alpha \varpi^{\mathrm{Fr},\sharp} \in \Omega^2(U_\alpha; \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}))$ est à valeurs en $\mathrm{Lie}(\mathrm{O}(n))$. Comme $(\varpi^{\mathrm{Fr}}, \varpi^{\mathrm{Fr}})|_{U_\alpha} = (\varpi^{\mathrm{Fr}}_\alpha, \varpi^{\mathrm{Fr}}_\alpha)$, où $\varpi^{\mathrm{Fr}}_\alpha$ est à valeurs en $\mathrm{Lie}(\mathrm{O}(n))$, qui est semi-simple, la forme de Killing y est non-dégénérée.

Ce que je propose ici, ça n'est pas une recette magique infaillible. C'est simplement une méthode *à la Yang-Mills* de considérer la *géométrie de fond*, encodée en g, J, ω, Ξ et κ comme variables de l'intégrale d'action au même titre que les connexions. Ce faisant, la *forme* de la géométrie de fond en découle aussi (au sens où $\mathrm{d}_{\mathscr{D}} g = 0$ implique une équation différentielle sur g). Cette méthode semble poindre à l'horizon quelques résultats de classification de structures $\mathrm{d}_{\nabla_{\mathrm{Fr}}}$-invariantes. Au vu de sa nature *de jauge*, elle semble aussi indiquer une méthode de réconciliation entre le champ de Higgs gravitationnel g et les champs quantiques.

Autre application possible : la quantification géométrique. En effet, une distribution lagrangienne L sur (B, ω) peut être vue comme champ de Higgs puisqu'il est une section d'une certaine tensorisation de TB (qui est lui-même un fibré associé à $\mathrm{Fr}(B)$!). Il semble pertinent de considérer un éventuel terme $(\mathrm{d}_{\nabla} L, \mathrm{d}_{\nabla} L)$ dans l'action, puis d'en vérifier les conséquences. Est-ce que l'extrémale d'action l'implique involutif ? Si oui, L serait éventuellement admissible pour définir une polarisation (réelle) sur B. En étendant le groupe structurel $\mathrm{GL}(2n; \mathbb{R})$ de $\mathrm{Fr}(B)$ à $\mathrm{GL}(2n; \mathbb{C})$ pour $\mathrm{Fr}^{\mathbb{C}}(B)$, on pourrait avoir des polarisations mixtes (réelles + complexes). Le choix d'une polarisation est un ingrédient fondamental en quantification géométrique. Pour rappel : le but de la quantification géométrique est d'injecter l'algèbre de Poisson des observables classiques sur (B, ω) vers un opérateur agissant sur un espace de Hilbert. La méthode usuelle est de prendre pour espace de Hilbert les sections d'un certain fibré sur B qui sont covariantes constantes le long de la polarisation choisie. L'opérateur agit sur ces sections en les dérivant de manière covariante dans la direction du champ vectoriel hamiltonien de l'observable. Comme l'espace de Hilbert dépend de la polarisation choisie, il suit que si le flot hamiltonien de l'observable ne préserve pas la polarisation, l'espace de Hilbert change. La dernière *technologie* en quantification géométrique est, à mon avis, la *quantification toroplectique* [17]. Elle est définie sur une plus grande classe de variétés symplectiques que la quantification métaplectique usuelle [17, 21, 26]. Le point de départ de la quantification toroplectique est d'étendre le groupe structurel $\mathrm{GL}(2n; \mathbb{R})$ de $\mathrm{Fr}(B)$ au fibré des repères *torolinéaires* $\mathrm{Fr}^{\mathrm{c}}(B)$ de groupe structurel $\mathrm{TL}(2n; \mathbb{C})$, l'extension non-triviale $\mathrm{U}(1)$ de $\mathrm{GL}(2n; \mathbb{C})$. Ensuite vient une $\mathrm{Mp}^{\mathrm{c}}(2n; \mathbb{C})$-réduction structurelle à $\mathrm{Mp}^{\mathrm{c}}(B) \to B$ de groupe structurel $\mathrm{Mp}^{\mathrm{c}}(2n; \mathbb{C})$, lui-même extension $\mathrm{U}(1)$ du groupe symplectique complexe $\mathrm{Sp}(2n; \mathbb{C})$. Les fonctions d'ondes sont alors des sections polarisées d'un fibré associé de $\mathrm{Mp}^{\mathrm{c}}(B)$ dont les fibres sont des espaces de fonctions $\mathcal{H}(V)$ sur un certain espace vectoriel V et où la représentation $\mu : \mathrm{Mp}^{\mathrm{c}}(2n; \mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{H}(V))$ est celle de Segal-Shale-Weil (alias représentation métaplectique-c, i.e. toroplectique)... Mais arrêtons-nous ici et revenons à l'intégrale d'action. Sur $\mathrm{Fr}^{\mathrm{c}}(B)$ repose des connexions torolinéaires que l'on doit supposer adaptées à la polarisation choisie. En considérant les fonctions d'ondes Ψ sur B comme *champs de matière*, on peut alors définir une action dépendant de toutes les structures en jeu :

$$S[\vartheta^{\mathrm{Fr}^c}, g, J, \Xi, L, \omega, \Psi, ..., \text{etc.}]$$

La question ici est de relâcher certaines hypothèses *ad hoc* du protocole de quantification toroplectique et de voir si celles-ci découlent *naturellement* d'une extrémale d'action.

Revenons-en à la forme de l'intégrale d'action $S[\vartheta, h]$ à prendre. Depuis le début je ne considère que des intégrales d'action de type *Yang-Mills+Higgs*

$$S[\vartheta^{\mathrm{Fr}}, h] = (\varpi^{\mathrm{Fr}}, \varpi^{\mathrm{Fr}}) + (\mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h, \mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h)$$

La plus grande difficulté dans les calculs est qu'ici les deux termes (ϖ, ϖ) et $(\mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h, \mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h)$ n'ont pas exactement le même produit scalaire. Puisque $\mathrm{d}^2_{\vartheta} = 0$ si et seulement si $\varpi = 0$, il serait fort probablement pertinent de considérer une action de type

$$S[\vartheta^{\mathrm{Fr}}, h] = (\mathrm{d}^2_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h, \mathrm{d}^2_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h) + (\mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h, \mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h)$$

où le premier terme jouerait le rôle de la courbure. L'avantage ici est que les deux produits scalaires utilisés sont égaux et donnés par :

$$(\,\cdot\,,\,\cdot\,) := \int_B (\,\cdot\,) \wedge^{\kappa} \star^{g} (\,\cdot\,)$$

pour un certain produit scalaire auxiliaire κ pour les fibres du fibré duquel h est section. Un *modèle jouet* serait d'abord d'étudier les extrémales de $(\mathrm{d}^2_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h, \mathrm{d}^2_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h)$ et de comparer aux extrémales de Yang-Mills en (ϖ, ϖ). Enfin, toute combinaison de termes $\mathrm{d}^k_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h$ dans l'action pourrait être pertinente. C'est-à-dire, de considérer une action de type

$$S[\varpi, \mathrm{d}_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h, \mathrm{d}^2_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h, \mathrm{d}^3_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h, ...]$$

Déjà, on sait qu'une telle intégrale d'action est composée d'un nombre fini de termes puisque si $h \in \Omega^j(B; P \times_\rho V)$, alors $\mathrm{d}^k_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h = 0 \in \Omega^{j+k}(B; P \times_\rho V)$ dès que $j + k > \dim_{\mathbb{R}} B$. Il serait pertinent de vérifier si d'autres termes $\mathrm{d}^k_{\vartheta^{\mathrm{Fr}}} h$ s'annulent.

En conclusion, l'idée à retenir du présent document est qu'il me semble possible de pouvoir retrouver certaines caractéristiques *a priori* (e.g. en relativité générale) ou *ad hoc* (e.g. en quantification géométrique) de théories des champs à partir d'un principe de moindre action couplant la connexion à la *géométrie de fond*.

Cette méthode semble prometteuse. Beaucoup de détails techniques y sont encore à démontrer et plusieurs conjectures cruciales à son élaboration sont encore embryonnaires. Espérons du moins qu'elle est, à hypothèses près, pas complètement fausse.

Après cette envolée lyrique, je vous laisse sur une appendice résumant quelques définitions, propositions, etc., nécessaires à l'élaboration de toute cette jolie théorie. Un traitement complet est, somme toute, impossible à encastrer dans une dizaine de pages.

À bientôt,
Noé Aubin-Cadot

Appendice

Notation

J'utiliserai les lettres grecques anciennes *qoppa* Ϙ, ϙ, *stigma* Ϛ, ϛ, *sampi* Ϡ,ϡ et *sho* Þ,þ. Par exemple, *sampi* Ϡ dénotera une forme de connexion sur P, *Sho* Þ dénotera les transformations de jauge, etc. L'idée d'utiliser de telles lettres peu communes est d'éviter d'avoir quatre fois le même symbole représentant quatre concepts différents dans une même équation. Par exemple, une forme de connexion sur un fibré principal est usuellement dénotée ω ou α. Comme il sera question de formes symplectiques (entre-autres une éventuelle forme symplectique sur l'espace des connexions !), ω n'est plus disponible pour désigner une forme de connexion. Il reste α. Toutefois, α est utilisé pour désigner l'indice d'une trivialisation locale $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha) \subset P$ d'un fibré principal $P \to B$. La lettre α est aussi souvent utilisée comme indice d'un tenseur, e.g. $g_{\alpha\beta}$. Enfin, α est aussi utilisé pour désigner une 1-forme générique. En balayant l'alphabet latin et grec on remarque assez vite qu'on manque de lettres. D'où l'utilisation de lettres grecques anciennes.

Représentations

Soit G un groupe de Lie. Soit $\mathfrak{g} := (T_eG, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ son algèbre de Lie. Soit $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ une représentation de G sur V. Sa *représentation duale* est définie par $\rho^* : G \to \mathrm{Aut}(V^*); \rho^*(g) \circ \alpha := \alpha \circ \rho(g^{-1})$. La *représentation infinitésimale* est dénoté $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V); A \mapsto A^*$ où A^* dénote le champ vectoriel fondamental sur V induit par A. La représentation infinitésimale duale est définie par $(\rho^*)_* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V^*); (\rho^*)_*(A)\circ\alpha := \alpha\circ(\rho_*(-A))$. La représentation ρ induit une représentation $(\otimes^p\rho) \otimes (\otimes^q\rho^*) : G \to \mathrm{Aut}(T^{(p,q)}V)$. La représentation infinitésimale $((\otimes^p\rho)\otimes(\otimes^q\rho^*))_*$ est induite par la règle de Leibniz sur $(\otimes^p\rho)\otimes(\otimes^q\rho^*)$. Soit $\iota : G \to \mathrm{Aut}(G); \iota_g(h) := ghg^{-1}$ l'automorphisme intérieur sur G. La représentation adjointe $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est définie pour tout $g \in G$ par $\mathrm{Ad}_g := (\iota_g)_*$. Pour un groupe matriciel $\mathrm{Ad}_g(A) = gAg^{-1}$. La représentation adjointe $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ est définie par $\mathrm{ad} := \mathrm{Ad}_*$. Elle vérifie $\mathrm{ad}_A(B) = [A, B]$. Les représentations Ad^* et ad^* sont dites *coadjointes*.

Algèbre de Lie semi-simple et forme de Killing

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite *simple* si elle est non-abélienne et ses seuls idéaux sont $\emptyset$ et $\mathfrak{g}$. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite *semi-simle* si elle est une somme directe d'algèbres de Lie simples. La *forme de Killing* $K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ est définie par $K(A, B) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_A \mathrm{ad}_B)$. La forme de Killing est non-dégénérée dès que $\mathfrak{g}$ est semi-simple. La forme de Killing est Ad-invariante, i.e. $K(\mathrm{Ad}_g A, \mathrm{Ad}_g B) = K(A, B)$.

Application moment et réduction symplectique

Soit (M, ω) une variété symplectique. Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soit $\Phi : G \to \mathrm{Symp}(M, \omega)$ une action symplectique. Elle est dite *hamiltonienne* s'il existe une application $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$, dite *application moment* si $X_{\mu(A)} = A^*, \quad \forall A \in \mathfrak{g}$, et si elle est Ad*-équivariante, i.e. $\mu_{\Phi_g} = \mathrm{Ad}_g^* \mu, \quad \forall g \in G$. L'application moment $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ induit $\mu^* : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ dit application *co-moment* qui vérifie $\mu^*([A, B]) = \{\mu^*(A), \mu^*(B)\}$, i.e. μ^* est un homomorphisme d'algèbres (de l'algèbre de Lie à l'algèbre de Poisson). Lorsque G est abélien, la représentation adjointe est triviale. La condition d'équivariance sur μ l'implique alors G-invariante sur M. Par le théorème de Marsden-Weinstein-Meyer, si G est compact et agit librement sur $\mu^{-1}(0)$, le quotient $\mu^{-1}(0)/G$ est une variété qui est la base d'un G-fibré principal $\pi : \mu^{-1}(0) \to \mu^{-1}(0)/G$ et $\mu^{-1}(0)/G$ possède une forme symplectique $\tilde{\omega}$ vérifiant $\iota^*\omega = \pi^*\tilde{\omega}$ où $\iota : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ dénote l'inclusion de $\mu^{-1}(0)$ en M. Ce processus est nommé *réduction symplectique*.

Composante horizontales et verticales d'une k-forme

Soit $\pi : P \to B$ un G-fibré principal de base B et d'action $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(P)$. L'image de l'action infinitésimale $\Phi_*|_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ induit une distribution dite *verticale* canonique $V := \Phi_*(\mathfrak{g}) \subset TP$. Une *connexion d'Ehresmann* sur P est une distribution dite *horizontale* $H \subset TP$ qui est transverse à V, i.e. $H \oplus V = TP$, qui est G-invariante, i.e. $H_{a \cdot g} = (\Phi_g)_* H, \forall a \in P, g \in G$, et telle que l'application $a \mapsto H_a$ soit différentiable. On dénote par $v : TP \to V$ la *projection verticale* et par $h : TP \to H$ la *projection horizontale*. En posant $\Omega^{(p,q)}(P) := \Gamma^\infty((\wedge^p V^*) \wedge (\wedge^q)H^*)$, $\Omega^k_{\text{hor}}(P) := \Omega^{(0,k)}(P)$, $\Omega^k_{\text{ver}}(P) := \Omega^{(k,0)}(P)$ et $\Omega^2_{\text{mix}}(P) := \Omega^{(1,1)}(P)$ on a la décomposition en somme directe $\Omega^2(P) = \Omega^2_{\text{hor}}(P) \oplus \Omega^2_{\text{mix}}(P) \oplus \Omega^2_{\text{ver}}(P)$. Toute 2-forme $\alpha \in \Omega^2(P)$ se décompose alors, via h et v en composantes $\alpha = (\alpha)_{\text{hor}} + (\alpha)_{\text{mix}} + (\alpha)_{\text{ver}}$.

k-formes à valeurs vectorielles

On dénote par $\Omega^k(M;V) := \Omega^k(M) \otimes V$ l'espace des k-formes à valeurs en un espace vectoriel V. De même, si $E \to M$ est un fibré vectoriel, on dénote par $\Omega^k(M;E) := \Omega^k(M) \otimes E$ l'espace des k-formes à valeurs en un fibré E. Le produit extérieur $\wedge$ s'étend à $(\wedge, \otimes) : \Omega^p(M;V) \times \Omega^q(M;W) \to \Omega^{p,q}(M; V \otimes W)$ définit d'abord par $(\alpha \otimes A)(\wedge,\otimes)(\beta \otimes B) := (\alpha \wedge \beta) \otimes (A \otimes B)$ puis étendu à toutes les combinaisons linéaires de formes. Les notions de k-formes horizontales/verticales de la dernière section s'étendent aux k-formes à valeurs vectorielles. On dénote alors $\Omega^k_{\text{hor}}(P;V) := \Omega^k_{\text{hor}}(P) \otimes V$ et $\Omega^k_{\text{ver}}(P;V) := \Omega^k_{\text{ver}}(P) \otimes V$. La théorie est la même pour les k-formes à valeurs en un fibré vectoriel.

Crochet sur les k-formes à valeurs en $\mathfrak{g}$

On pose le crochet bilinéaire suivant : $[\,\cdot \wedge \cdot\,] : \Omega^p(P;\mathfrak{g}) \times \Omega^q(P;\mathfrak{g}) \to \Omega^{pq}(P;\mathfrak{g}); [(\alpha \otimes A) \wedge (\beta \otimes B)] := (\alpha \wedge \beta) \otimes [A, B]$ qu'on étend par linéarité à toutes les k-formes à valeurs en $\mathfrak{g}$. Il est aisé de démontrer que $[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}] = (-1)^{pq+1}[\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha}]; \forall \tilde{\alpha} \in \Omega^p(P;\mathfrak{g}), \tilde{\beta} \in \Omega^q(P;\mathfrak{g})$. Il est aussi aisé de démontrer que $[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}](v_1, v_2) = [\tilde{\alpha}(v_1), \tilde{\beta}(v_2)] - [\tilde{\alpha}(v_2), \tilde{\beta}(v_1)]; \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \Omega^1(P;\mathfrak{g}) \forall a \in P, v_1, v_2 \in T_a P$. Ce qui implique l'égalité $[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\alpha}](\,\cdot\,,\,\cdot\,) = 2[\tilde{\alpha}(\,\cdot\,), \tilde{\alpha}(\,\cdot\,)]$ pour tout $\tilde{\alpha} \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$. Il est donc fréquent de voir $[\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}] = \frac{1}{2}[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\alpha}]$. Remarquons que $[\alpha \otimes A, \alpha \otimes A] = (\alpha \wedge \alpha) \otimes [A, A] = 0$. Ce sont les combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes A_i$ qui génèrent des $[\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}]$ non-nuls.

k-formes G-invariantes sur P

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G sur V. Une k-forme $\alpha \in \Omega^k(P; V)$ sur P à valeurs en V est dite *G-invariante* si $(\Phi_g)^* \alpha = \rho(g^{-1})\alpha, \quad \forall g \in G$, i.e. si $\left((\Phi_g)^* \circ \rho(g)\right) \alpha = \alpha, \quad \forall g \in G$. Ce qui est équivalent, sous décomposition, à $\sum_{i=1}^{\dim(V)} \left((\Phi_g)^* \alpha_i\right) \otimes (\rho(g) v_k) = \sum_{i=1}^{\dim(V)} \alpha_i \otimes v_k$. On dénote par $\Omega^k_\rho(P; V) := \left(\Omega^k(P; V)\right)^G$ l'ensemble des k-formes G-invariantes sur P à valeurs en V. On pose $\Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P; V) := \left(\Omega^k_{\mathrm{hor}}(P; V)\right)^G$ et $\Omega^k_{\rho,\mathrm{ver}}(P; V) := \left(\Omega^k_{\mathrm{ver}}(P; V)\right)^G$.

Formes basiques

Les k-formes horizontales G-invariantes en $\Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P; V)$. sont dite *basiques*. Il y a une bijection entre $\Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P; V)$ et $\Omega^k(B; P \times_\rho V)$. La correspondance est due au fait que les formes basiques sont, par définition, G-invariantes et horizontales. Je dénoterai la correspondance entre une forme basique et sa forme sur la base par un dièse pour la forme basique, i.e. à $\alpha \in \Omega^k(B; P \times_\rho V)$ correspond $\alpha^\sharp \in \Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P; V)$.

Formes de connexion $ϡ$ sur P

Une *forme de connexion* sur P est une 1-forme $ϡ \in \Omega^1_{\mathrm{Ad},\mathrm{ver}}(P; \mathfrak{g})$ verticale G-invariante sur P à valeurs en $\mathfrak{g}$ telle que $ϡ(A^*) = A, \quad \forall A \in \mathfrak{g}$ sous la représentation $\rho = \mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Les connexions d'Ehresmann sont en bijection avec les formes de connexion $ϡ$ sur P.

Dérivée extérieur sur les k-formes à valeurs vectorielles

La dérivée extérieure $\mathrm{d} : \Omega^k(P) \to \Omega^{k+1}(P)$ usuelle en induit une $\mathrm{d} : \Omega^k(P;V) \to \Omega^{k+1}(P;V)$ donnée par $\mathrm{d}\left(\sum_i \gamma_i \otimes v_i\right) := \sum_i (\mathrm{d}\gamma_i) \otimes v_i$. Elle est vérifie les même propriétés que d, incluant $\mathrm{d}^2 = 0$ et $\mathrm{d}(\gamma \wedge \eta) = \mathrm{d}\gamma \wedge \eta + (-1)^p \gamma \wedge \mathrm{d}\eta$ où $\gamma \in \Omega^p(P;V)$. Le *complexe de de Rham à valeurs en V* est le complexe donné par $\mathrm{d} : \Omega^k(P;V) \to \Omega^{k+1}(P;V)$. Remarquons que l'égalité $\mathrm{d}\left(\sum_i \gamma_i \otimes v_i\right) := \sum_i (\mathrm{d}\gamma_i) \otimes v_i$ n'est vraie que pour des v_i constants !

Dérivée covariante extérieure d^{ω} sur $\Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V)$

La *dérivée covariante extérieure* d^{ω} est par définition $\mathrm{d}^{\omega} : \Omega^k(P;V) \to \Omega^{k+1}_{\mathrm{hor}}(P;V)$ où $\mathrm{d}^{\omega}\tilde{\alpha} := (\mathrm{d}\tilde{\alpha})_{\mathrm{hor}}$. Il est possible de démontrer que $\mathrm{d}^{\omega}\tilde{\alpha} = \mathrm{d}\tilde{\alpha} + (\rho_* \omega)(\wedge, \circ)\tilde{\alpha}$ pour tout $\tilde{\alpha} \in \Omega^k_\rho(P;V)$ où $(\wedge, \circ)$ dénote le produit extérieur sur les k-formes ainsi que la composition de $\rho_* \omega$ sur $\tilde{\alpha}$.

Forme de courbure $\varpi^\sharp$

La *forme de courbure* est par définition $\varpi^\sharp := (\mathrm{d}\omega)_{\mathrm{hor}} = \mathrm{d}^{\omega}\omega = \mathrm{d}\omega + [\omega, \omega] \in \Omega^2_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$. La dernière égalité, nommée *seconde équation structurelle d'É. Cartan*, découle de l'égalité $\mathrm{d}^{\omega}\tilde{\alpha} = \mathrm{d}\tilde{\alpha} + (\rho_* \omega)(\wedge, \circ)\tilde{\alpha}$ pour $\rho = \mathrm{Ad}$ et $\tilde{\alpha} = \omega$ (le crochet vient de $\mathrm{Ad}_* = \mathrm{ad}$).

Dérivée covariante extérieure d_ω sur $\Omega^k(B; P \times_\rho V)$

Il est possible de démontrer que $\mathrm{d}^\omega \zeta^\sharp \in \Omega^{k+1}_{\rho,\mathrm{hor}}(P; V)$ pour tout $\zeta^\sharp \in \Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P; V)$. Comme $\mathrm{d}^\omega \zeta^\sharp$ est basique, on peut alors définir $(\mathrm{d}_\omega \zeta)^\sharp := \mathrm{d}^\omega \zeta^\sharp$. Si l'on pose $\zeta_\alpha := s_\alpha^* \zeta^\sharp$ et $\theta_\alpha := s_\alpha^* \omega$ pour une certaine section trivialisante locale $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$, on a l'égalité $\mathrm{d}_\omega \tilde{\zeta}_\alpha = \mathrm{d}\tilde{\zeta}_\alpha + (\rho_* \theta_\alpha)(\wedge, \circ)\tilde{\zeta}_\alpha$. Il est enfin possible de démontrer la règle de Leibniz $\mathrm{d}_\omega(\zeta(\wedge, \otimes)\eta) = \mathrm{d}_\omega \zeta(\wedge, \otimes)\eta + (-1)^p \zeta(\wedge, \otimes)\mathrm{d}\eta$ pour tout $\zeta \in \Omega^p(B; P \times_G V)$ et $\eta \in \Omega^q(B) = \Omega^q(B; \mathbb{R})$. De même, on peut montrer que $\mathrm{d}_\omega(\lambda_1 \otimes \lambda_2) = (\mathrm{d}_\omega \lambda_1) \otimes \lambda_2 + \lambda_1 \otimes (\mathrm{d}_\omega \lambda_2)$ pour tout $\lambda_1 \in \Gamma^\infty(P \times_{\rho_1} V_1)$ et $\lambda_2 \in \Gamma^\infty(P \times_{\rho_2} V_2)$. En effet, il suffit simplement de remarquer que $(P \times_{\rho_1} V_1) \otimes (P \times_{\rho_2} V_2) \simeq P \times_{\rho_1 \otimes \rho_2} (V_1 \otimes V_2)$ et que la la règle de Leibniz s'applique à la représentation infinitésimale dérivée covariante $(\rho_1 \otimes \rho_2)_* = (\rho_1)_* \otimes \mathbb{I}_{V_1} + \mathbb{I}_{V_2} \otimes (\rho_2)_*$.

h-produit extérieur $\wedge^h$

Soit h un produit scalaire pour un fibré associé $E : P \times_\rho V$. On peut définir un h-produit extérieur $\wedge^h : ((\wedge^p T^* B) \otimes E) \times ((\wedge^q T^* B) \otimes E) \to (\wedge^{pq} T^* B)$ donné par $(\alpha \otimes \lambda) \wedge^h (\beta \otimes \sigma) := (\alpha \wedge \beta) h(\lambda, \sigma)$ puis étendu linéairement.

Intermède

J'avais l'intention de résumer la plupart des résultats intéressant pour en arriver à des exemples concrets, mais il semble qu'une énumération illisible de résultats intermédiaires est un peu absurde et surtout indigeste. En particulier, je n'ai toujours pas présenté une seule preuve de quoi que ce soit... Voici donc quelques propositions munies de preuves, même si ça peut sembler hors contexte.

$\mathrm{d}_{\mathcal{D}}$-invariance de $\wedge^h$

Définition : Soit $L = P \times_\rho V$ munit d'un produit scalaire h. Le h-produit extérieur $\wedge^h$ est dit être *$\mathrm{d}_{\mathcal{D}}$-invariant* si pour tout $\zeta \in \Omega^p(B; L)$, $\eta \in \Omega^q(B; L)$,

$$\mathrm{d}\left(\zeta \wedge^h \eta\right) = (\mathrm{d}_{\mathcal{D}}\zeta) \wedge^h \eta + (-1)^p \zeta \wedge^h (\mathrm{d}_{\mathcal{D}}\eta)$$

Proposition : Si h est $\mathrm{d}_{\mathcal{D}}$-invariant, $\wedge^h$ l'est aussi.

Preuve : Il suffit d'étudier le cas local. C'est-à-dire, démontrer l'égalité

$$\mathrm{d}\left(\tilde{\zeta}_\alpha \wedge^{\tilde{h}_\alpha} \tilde{\eta}_\alpha\right) = \left(\mathrm{d}_{\mathcal{D}}\tilde{\zeta}_\alpha\right) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} \tilde{\eta}_\alpha + (-1)^p \tilde{\zeta}_\alpha \wedge^{\tilde{h}_\alpha} (\mathrm{d}_{\mathcal{D}}\tilde{\eta}_\alpha)$$

Soit $n = \dim \mathfrak{g}$. Décomposons $\tilde{\zeta}_\alpha$, $\tilde{\eta}_\alpha$ et θ_α comme

$$\tilde{\zeta}_\alpha = \sum_{i=1}^n \tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i \quad \text{et} \quad \tilde{\eta}_\alpha = \sum_{j=1}^n \tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j \quad \text{et} \quad \theta_\alpha = \sum_{k=1}^n \theta_{\alpha,k} \otimes C_k$$

pour certains $\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \in \Omega^p(U_\alpha)$, $\tilde{\eta}_{\alpha,j} \in \Omega^q(U_\alpha)$, $\theta_{\alpha,k} \in \Omega^1(U_\alpha)$ et $A_i, B_j, C_j \in \mathfrak{g}$ pour $i, j, k \in \{1, ..., n\}$. Supposons h $\mathrm{d}_{\mathcal{D}}$-invariant. On calcule directement :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{d}\left(\tilde{\zeta}_\alpha \wedge^{\tilde{h}_\alpha} \tilde{\eta}_\alpha\right) \\
= \quad & \sum_{i,j=1}^n \mathrm{d}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j} \tilde{h}_\alpha(A_i, B_j)\right) \\
= \quad & \sum_{i,j=1}^n \mathrm{d}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j}\right) \tilde{h}_\alpha(A_i, B_j) + (-1)^{p+q} \left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j}\right) \wedge \mathrm{d}\left(\tilde{h}_\alpha(A_i, B_j)\right)
\end{aligned}$$

La première partie est :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{d}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j}\right) \tilde{h}_\alpha(A_i, B_j) \\
= \quad & \left(\mathrm{d}\tilde{\zeta}_{\alpha,i}\right) \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j} \tilde{h}_\alpha(A_i, B_j) + (-1)^p \tilde{\zeta}_{\alpha,i} \wedge \left(\mathrm{d}\tilde{\eta}_{\alpha,j}\right) \tilde{h}_\alpha(A_i, B_j) \\
= \quad & \left((\mathrm{d}\tilde{\zeta}_{\alpha,i}) \otimes A_i\right) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} (\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j) + (-1)^p (\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} \left((\mathrm{d}\tilde{\eta}_{\alpha,j}) \otimes B_j\right) \\
= \quad & \mathrm{d}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i\right) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} (\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j) + (-1)^p (\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} \mathrm{d}\left(\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j\right)
\end{aligned}$$

La seconde partie est :

$$
\begin{aligned}
& (-1)^{p+q}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j}\right) \wedge \mathrm{d}\left(\tilde{h}_\alpha(A_i, B_j)\right) \\
= \ & (-1)^{p+q}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j}\right) \wedge \left(\tilde{h}_\alpha(\mathrm{d}_{\nabla} A_i, B_j) + \tilde{h}_\alpha(A_i, \mathrm{d}_{\nabla} B_j)\right) \\
= \ & (-1)^{p+q}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j}\right) \wedge \left(\tilde{h}_\alpha((\rho_*\theta_\alpha)A_i, B_j) + \tilde{h}_\alpha(A_i, (\rho_*\theta_\alpha)B_j)\right) \\
= \ & (-1)^{p+q}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j}\right) \wedge \left(\tilde{h}_\alpha((\rho_*\theta_\alpha)A_i, B_j)\right) \\
& +(-1)^{p+q}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j}\right) \wedge \left(\tilde{h}_\alpha(A_i, (\rho_*\theta_\alpha)B_j)\right) \\
= \ & \sum_{k=1}^{n}(-1)^{p+q}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j}\right) \wedge \left(\tilde{h}_\alpha((\theta_{\alpha,k} \otimes \rho_* C_k)\ A_i, B_j)\right) \\
& +(-1)^{p+q}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j}\right) \wedge \left(\tilde{h}_\alpha(A_i, (\theta_{\alpha,k} \otimes \rho_* C_k)\ B_j)\right) \\
= \ & \sum_{k=1}^{n}(-1)^{p+q}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j} \wedge \theta_{\alpha,k}\right)\left(\tilde{h}_\alpha((\rho_* C_k)\ A_i, B_j)\right) \\
& +(-1)^{p+q}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j} \wedge \theta_{\alpha,k}\right)\left(\tilde{h}_\alpha(A_i, (\rho_* C_k)\ B_j)\right) \\
= \ & \sum_{k=1}^{n}\left(\theta_{\alpha,k} \wedge \tilde{\zeta}_{\alpha,i}\right) \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j}\left(\tilde{h}_\alpha((\rho_* C_k)\ A_i, B_j)\right) \\
& +(-1)^{p}\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \wedge \left(\theta_{\alpha,k} \wedge \tilde{\eta}_{\alpha,j}\right)\left(\tilde{h}_\alpha(A_i, (\rho_* C_k)\ B_j)\right) \\
= \ & \left((\rho_*\theta_\alpha)(\wedge,\circ)(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i)\right) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} (\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j) \\
& +(-1)^{p}(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} \left((\rho_*\theta_\alpha)(\wedge,\circ)(\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j)\right)
\end{aligned}
$$

En sommant la première et la seconde partie on trouve :

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{d}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i\right) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} (\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j) + (-1)^{p}(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} \mathrm{d}\left(\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j\right) \\
& + \left((\rho_*\theta_\alpha)(\wedge,\circ)(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i)\right) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} (\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j) \\
& +(-1)^{p}(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} \left((\rho_*\theta_\alpha)(\wedge,\circ)(\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j)\right) \\
= \ & \left(\mathrm{d}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i\right) + (\rho_*\theta_\alpha)(\wedge,\circ)(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i)\right) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} (\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j) \\
& +(-1)^{p}(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} \left(\mathrm{d}\left(\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j\right) + (\rho_*\theta_\alpha)(\wedge,\circ)(\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j)\right) \\
= \ & \mathrm{d}_{\nabla}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i\right) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} (\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j) + (-1)^{p}(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} \mathrm{d}_{\nabla}\left(\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j\right)
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{d}\left(\tilde{\zeta}_\alpha \wedge^{\tilde{h}_\alpha} \tilde{\eta}_\alpha\right) \\
= & \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{d}_{\text{ϡ}}\left(\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i\right) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} (\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j) + (-1)^p (\tilde{\zeta}_{\alpha,i} \otimes A_i) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} \mathrm{d}_{\text{ϡ}}\left(\tilde{\eta}_{\alpha,j} \otimes B_j\right) \\
= & \left(\mathrm{d}_{\text{ϡ}}\tilde{\zeta}_\alpha\right) \wedge^{\tilde{h}_\alpha} \tilde{\eta}_\alpha + (-1)^p \tilde{\zeta}_\alpha \wedge^{\tilde{h}_\alpha} (\mathrm{d}_{\text{ϡ}}\tilde{\eta}_\alpha)
\end{aligned}
$$

□

Corollaire : Si h est $\mathrm{d}_{\text{ϡ}}$-invariant (e.g. si h est constant et G-invariant), alors

$$\mathrm{d}\left(\zeta \wedge^h \eta\right) = (\mathrm{d}_{\text{ϡ}}\zeta) \wedge^h \eta + (-1)^p \zeta \wedge^h (\mathrm{d}_{\text{ϡ}}\eta), \quad \forall \zeta \in \Omega^p(B;L),\ \eta \in \Omega^q(B;L)$$

Intermède 2

Maintenant que l'on a une preuve, voici un résumé de la suite. Le groupe de jauge $\mathcal{G}$ est par définition $\mathcal{G} := \{\text{Þ} \in \mathrm{Diff}(P) | \pi \circ \text{Þ} = \mathrm{id}_B, \text{Þ} \circ \Phi_g = \Phi_g \circ \text{Þ}\} \subset \mathrm{Diff}(P)$. Il y a une bijection entre les $\text{Þ} \in \mathcal{G}$ et les $\text{þ} \in \Omega^0(B; \iota P)$ où $\iota P := P \times_\iota G$ où ι dénote l'automorphisme intérieur de G sur lui-même. Les transformations de jauge infinitésimales sont en $\mathfrak{G} := \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$. Il y a une bijection entre les $\Upsilon \in \mathfrak{G}$ et les $\upsilon \in \Omega^0(B; \mathrm{Ad}P)$. La différence entre deux connexions $\text{ϡ}' - \text{ϡ}$ est un élément $\tau^\sharp \in \Omega^1_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$. Comme $\Omega^1(B;\mathrm{Ad}P)$ est un espace vectoriel (de dimension infinie), l'espace $\mathcal{A}$ des connexions ϡ sur P est un espace affine modélisé sur $\Omega^1_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$, c'est-à-dire que $T_{\text{ϡ}}\mathcal{A} = \Omega^1_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$. À $\tau^\sharp \in \Omega^1_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$ correspond un unique $\tau \in \Omega^1(B;\mathrm{Ad}P)$. Le groupe de jauge agit sur $\mathcal{A}$ par rappel via $\text{ϡ}^{\text{Þ}} := (\text{Þ}^{-1})^*\text{ϡ}$. Mais que vaut le vecteur $\Upsilon^*|_{\text{ϡ}}$ fondamental en $\text{ϡ} \in \mathcal{A}$ induit par une action infinitésimale de $\Upsilon \in \mathfrak{G}$ sur $\mathcal{A}$?

Égalité $\Upsilon^*|_{\text{ϡ}} = (-\mathbf{d}_{\text{ϡ}}\upsilon)^\sharp \in \Omega^1_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g}) \subset T_{\text{ϡ}}\mathcal{A}$

Proposition : Soit $\Upsilon \in \mathfrak{G}$ et $\upsilon \in \Omega^0(B;\mathrm{Ad}P)$ la section correspondante à Υ. Alors le champ vectoriel fondamental $\Upsilon^* \in \mathfrak{X}^{\mathcal{G}}(\mathcal{A})$ évalué en $\text{ϡ} \in \mathcal{A}$ est donné par :

$$\Upsilon^*|_{\text{ϡ}} = (-\mathrm{d}_{\text{ϡ}}\upsilon)^\sharp \in T_{\text{ϡ}}\mathcal{A}$$

Preuve : Posons $\tau^\sharp := \Upsilon^*|_{\mathscr{Z}} \in T_{\mathscr{Z}}\mathcal{A}$. On veut donc montrer que $\tau^\sharp = (-\mathrm{d}_{\mathscr{Z}}\upsilon)^\sharp$. C'est-à-dire, que $\tau = -\mathrm{d}_{\mathscr{Z}}\upsilon$. Il suffit de démontrer l'égalité localement pour une section trivialisante locale s_α quelconque : on veut montrer que

$$\tau_\alpha = -\mathrm{d}_{\mathscr{Z}}\upsilon_\alpha$$

où $\tau_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha;\mathfrak{g})$ et où $\upsilon_\alpha \in \Omega^0(U_\alpha;\mathfrak{g})$. Posons $\text{Þ}_s := \exp(s\Upsilon)$. On trouve alors $\theta_\alpha := s_\alpha^*\mathscr{Z}$ et que $\theta_\alpha^{\text{Þ}_t} := s_\alpha^*\mathscr{Z}^{\text{Þ}_t}$ où $\mathscr{Z}^{\text{Þ}_t} = (\text{Þ}_t^{-1})^*\mathscr{Z}$. À $\Upsilon \in \mathfrak{G}$ correspond un $\upsilon \in \Omega^0(B;\mathrm{Ad}P)$ qui s'exprime localement par $\upsilon_\alpha := s_\alpha^*\upsilon^\sharp \in \Omega^0(U_\alpha;\mathfrak{g}) = C^\infty(U_\alpha;\mathfrak{g})$. Posons $\text{þ}_{t,\alpha} := \exp(t\upsilon_\alpha) \in C^\infty(U_\alpha;G)$. Utilisons l'égalité obtenue plus haut :

$$\theta_\alpha^{\text{Þ}_t} = \mathrm{Ad}_{\text{þ}_{t,\alpha}} \circ (\theta_\alpha - \text{þ}_{t,\alpha}^*\theta) = \mathrm{Ad}_{\text{þ}_{t,\alpha}}\theta_\alpha + (\text{þ}_{t,\alpha}^{-1})^*\theta$$

À gauche de $\tau_\alpha = -\mathrm{d}_{\mathscr{Z}}\upsilon_\alpha$ on trouve alors :

$$\begin{aligned}
\tau_\alpha &= s_\alpha^*\left(\Upsilon^*|_{\mathscr{Z}}\right) = s_\alpha^*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathscr{Z}^{\exp(t\Upsilon)})|_{t=0}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(s_\alpha^*(\mathscr{Z}^{\exp(t\Upsilon)})\right)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\theta_\alpha^{\exp(t\Upsilon)}\right)|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\theta_\alpha^{\text{Þ}_t}\right)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{Ad}_{\text{þ}_{t,\alpha}}\theta_\alpha + (\text{þ}_{t,\alpha}^{-1})^*\theta\right)|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{Ad}_{\exp(t\upsilon_\alpha)}\theta_\alpha + (\exp(t\upsilon_\alpha)^{-1})^*\theta\right)|_{t=0} \\
&= \mathrm{ad}_{\upsilon_\alpha}\theta_\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\exp\circ(-t\upsilon_\alpha))^*\theta\right)|_{t=0} \\
&= [\upsilon_\alpha,\theta_\alpha] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\theta_{(\exp\circ(-t\upsilon_\alpha))}\circ(\exp\circ(-t\upsilon_\alpha))_*\right)|_{t=0} \\
&= -[\theta_\alpha,\upsilon_\alpha] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\theta_{(\exp\circ(-t\upsilon_\alpha))}\circ\exp_*\circ(-t\upsilon_\alpha)_*\right)|_{t=0} \\
&= -\mathrm{ad}_{\theta_\alpha}\upsilon_\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((-t\upsilon_\alpha)_*\right)|_{t=0} = -(\rho_*\theta_\alpha)\circ\upsilon_\alpha + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-t\mathrm{d}\upsilon_\alpha\right)|_{t=0} \\
&= -(\rho_*\theta_\alpha)\circ\upsilon_\alpha - \mathrm{d}\upsilon_\alpha = -\left(\mathrm{d}\upsilon_\alpha + (\rho_*\theta_\alpha)\circ\upsilon_\alpha\right) = -\mathrm{d}_{\mathscr{Z}}\upsilon_\alpha
\end{aligned}$$

D'où $\tau_\alpha = -\mathrm{d}_{\mathscr{Z}}\upsilon_\alpha$. $\square$

Corollaire : Soit G un groupe matriciel. Soit $\text{Þ} = \exp(\Upsilon) \in \mathcal{G}$ pour un certain $\Upsilon \in \mathfrak{G}$. Alors

$$\mathscr{Z}^{\text{Þ}} = \mathscr{Z} + \Upsilon^*|_{\mathscr{Z}} = \mathscr{Z} - \mathrm{d}^{\mathscr{Z}}\upsilon^\sharp$$

(je dois revérifier ce corollaire qui me semble évident ; je ne l'ai prouvé que pour G abélien pour l'instant, le résultat général doit se trouver dans la littérature)

Yang-Mills en (très) bref

Avec tout ces concepts en jeu, on peut définir l'intégrale d'action de Yang-Mills pour un SU(2)-fibré principal $P \to B$ où (B, g) est une variété riemannienne de dimension 4 par :

$$S_{\mathrm{YM}}[\mathfrak{Z}] = (\varpi, \varpi) := \int_B \varpi \wedge^{\kappa} \star^g \varpi$$

où $\star^g$ est l'opérateur de Hodge induit par une métrique et où $\kappa \in \Omega^0(B; \mathrm{Ad}P^* \otimes \mathrm{Ad}P^*)$ est induite par $\kappa^\sharp := K$ sur P où K est la forme de Killing. On pose

$$\mathcal{A}_{\mathrm{YM}} := \left\{ \mathfrak{Z} \in \mathcal{A} | S_{\mathrm{YM}}[\mathfrak{Z}] < \infty, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} S_{\mathrm{YM}}[\mathfrak{Z} + s\tau^\sharp]|_{s=0} = 0, \forall \tau^\sharp \in T_{\mathfrak{Z}}\mathcal{A} \right\}$$

l'espace des connexions qui extrémalisent l'action de Yang-Mills $S_{\mathrm{YM}}[\mathfrak{Z}]$ et qui sont d'énergie finie, i.e. $S_{\mathrm{YM}}[\mathfrak{Z}]$ fini (ce qui serait toujours le cas si l'on prend B compact). Le calcul des extrémales indique que $\mathfrak{Z} \in \mathcal{A}_{\mathrm{YM}}$ si et seulement si sa courbure vérifie l'équations de Yang-Mills

$$\delta_{\mathfrak{Z}} \varpi = 0$$

où $\delta_{\mathfrak{Z}}$ est l'opérateur adjoint de $\mathrm{d}_{\mathfrak{Z}}$, dit *codifférentielle extérieure covariante*, via le produit scalaire $(\cdot, \cdot) := \int_B (\cdot) \wedge^{\kappa} \star^g (\cdot)$. La codifférentielle $\delta_{\mathfrak{Z}}$ est égale à $\star \mathrm{d}_{\mathfrak{Z}} \star$. Comme la courbure ϖ est $\mathrm{d}_{\mathfrak{Z}}$-fermée par l'identité de Bianchi, il suffit d'avoir $\star\varpi = \pm\varpi$, i.e. avoir ϖ *(anti-)auto-duale*, pour que $\mathfrak{Z}$ soit une extrémale d'action. Si ϖ est (anti-)auto-duale et d'énergie finie, on dit alors qu'elle est un *(anti-)instanton*. Puisqu'ici g est de type $(+, +, +, +)$ et que B est de dimension 4, $\star^2 = 1$ sur les 2-formes, ce qui décompose l'espace des 2-formes en somme directe orthogonale de l'espace des 2-formes auto-duales et de l'espace des 2-formes anti-auto-duales. On peut montrer que l'intégrale d'action de Yang-Mills est $\mathcal{G}$-invariante. C'est-à-dire, $\mathcal{A}_{\mathrm{YM}} \subset \mathcal{A}$ est un sous-espace $\mathcal{G}$-invariant. Les 2 sous-espaces $\mathcal{A}^\pm := \{\mathfrak{Z} \in \mathcal{A} | \star\varpi = \pm\varpi\} \subset \mathcal{A}_{\mathrm{YM}}$ sont aussi $\mathcal{G}$-invariant. L'action de Yang-Mills $S_{\mathrm{YM}} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ descend donc à une fonction $\widetilde{S}_{\mathrm{YM}} : \mathcal{M}^\pm \to \mathbb{R}$ sur les espaces de modules $\mathcal{M}^\pm := \mathcal{A}^\pm/\mathcal{G}$. L'étude des connexions de Yang-Mills (anti-)auto-duales, i.e. des $\mathfrak{Z} \in \mathcal{A}^\pm_{\mathrm{YM}}$ revient donc à l'étude des points critiques de $\widetilde{S}_{\mathrm{YM}}$ sur $\mathcal{M}^\pm_{\mathrm{YM}}$. La théorie de Yang-Mills ne s'arrête pas là. Mais ce document oui.

Références

[1] V. I. Arnol'd. *Mathematical Methods in Classical Mechanics*. Springer Graduate Texts in Mathematics, 60, Springer-Verlag, New-York, second edition, 1989.

[2] M. F. Atiyah and R. Bott. The yang-mills equations over riemann surfaces. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 308(1505) :523–615, 1984.

[3] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, and I. M. Singer. Self-duality in four-dimensional riemannian geometry. *Proc. R. Soc. London A.*, 362 :425–461, 1978.

[4] Michael Atiyah. *The Geometry and Physics of Knots*. Cambridge University Press, 1990.

[5] R. J. Blattner. The metalinear geometry of non-real polarizations. *Springer's Lecture Notes in Mathematics, Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics*, 570 :11–45, 2006.

[6] D. Bleecker. *Gauge Theory and Variational Principles*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2005.

[7] Ana Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Number 1764 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 2006.

[8] V. de Sabbata and C. Sivaram. *Spin and Torsion in Gravitation*. World Scientific, 1994.

[9] José Figueroa-O'Farrill. Lectures on gauge theory, 2006.

[10] Victor Guillemin, Viktor Ginzburg, and Yael Karshon. *Moment Maps, Cobordisms, and Hamiltonian Group Actions*, volume 98. American Mathematical Society, 2002.

[11] N. J. Hitchin. The self-duality equations on a riemann surface. *Proc. London Math. Soc.*, 3(55) :59–126, 1987.

[12] A. Knapp. How much does it cost to find a higgs boson. http ://www.forbes.com/sites/alexknapp/2012/07/05/how-much-does-it-cost-to-find-a-higgs-boson/, 2012.

[13] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Wiley, New-York, 1963.

[14] Bertram Kostant. Quantization and unitary representations. *Lecture Notes in Mathematics*, 170 :87–208, 1970.

[15] J. H. Rawnsley. On the pairing of polarizations. *Comm. Math. Phys.*, 58(1) : 1–8, 1978.

[16] J. H. Rawnsley. Some properties of half-forms. *Springer's Lecture Notes in Mathematics*, 676 :311–314, 1987.

[17] P. L. Robinson and J. H. Rawnsley. *The metaplectic representation,* Mp^{c} *structures and geometric quantization*, volume 81 of *Memoirs of the A. M. S.* American Mathematical Society, 1989.

[18] G. Sardanashvily. The gauge treatment of gravity. *Physics Reports*, 94(1) : 1–45, 1983.

[19] G. Sardanashvily. Geometry of classical higgs fields. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 03(139), 2006.

[20] D. J. Simms and N. M. J. Woodhouse. *Lectures on Geometric Quantization*. Number 53 in Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, 1976.

[21] J. Sniatycki. *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*. Springer Applied Mathematical Sciences, 30, Springer-Verlag, New-York, 1980.

[22] J.-M. Souriau. Quantification géométrique. *Communications in Mathematical Physics, Springer*, 1965.

[23] J.-M. Souriau. *Structure of Dynamical Systems, A symplectic View of Physics*. Birkhäuser Progress in Mathematics, 149, Birkhäuser Boston, 1997.

[24] C. H. Taubes. On the yang-mills-higgs equations. *Bulletin (New Series) Of The American Mathematical Society*, 10(2), 1984.

[25] Yue Wang and Xi Zhang. The coupled yang-mills-higgs flow. *Journal of Mathematical Analysis And Applications*, 339 :153–174, 2008.

[26] N. M. J. Woodhouse. *Geometric Quantization*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New-York, second edition, 1997.