Application moment et orbites coadjointes
- ou -
Engrenages de la théorie de jauge
(2015-2019)

Noé Aubin-Cadot

20 mars 2024

Table des matières

1 Avant-propos

C'est quoi ce document : Le but original de ce pdf, commencé à l'été 2015, était de relier les notions d'application moment et d'orbites coadjointes à la théorie des connexions. Son but a changé avec le temps. Il est momentanément devenu une tentative d'unification de la théorie de Yang-Mills et de la relativité générale. Puis il a encore changé de cap, la théorie sur la relativité générale étant déplacée dans un autre pdf nommé "*Fibré des repères*" que je pourrais aussi partager un jour. La dernière vocation du présent document était d'approcher la conjecture d'Atiyah-Floer. Certaines sections ont eu le temps de s'affiner avec le temps. D'autres sont encore un chantier d'idées et/ou de morceaux de mathématiques effilochées à prendre avec un grain de sel. J'ai arrêté d'avancer ce pdf au printemps 2019 en me trouvant devant l'impasse du fait que je n'arriverais pas à livrer une thèse à temps.

Attention : Ce pdf est une sorte de wiki personnel, i.e. de carnet de notes mieux organisé qu'une pile de feuilles blanches. Une partie de son contenu provient directement de Wikipédia, surtout au début, et il n'est pas impossible que des phrases y soient copiées mot pour mot, le lecteur m'excusera donc s'il y trouve ce qui pourrait être du plagiat. Inversement, je pense avoir contribué à part égale à Wikipédia, l'information allait donc dans les deux sens. En tant que wiki personnel, la cohérence globale des notations et des conventions était plus importante que l'originalité du contenu. Ces notes n'avaient pas pour objectif d'être partagées et ça se voit dans le style :

- Il n'y a que peu ou pas de références bibliographiques.
- Les propositions ne sont pas numérotées.
- Les équations ne sont pas numérotées.
- Les démonstrations réfèrent à des résultats qui sont "*plus haut*" dans le document sans spécifier où exactement.
- Il y a parfois des "*TO DO ! ! !*" ou encore "*CECI EST FAUX, À REVISITER*".

La raison pour laquelle je partage ce document est que je ne travaille plus sur ces idées depuis quelques années déjà et je suis certain que certaines parties sont pertinentes pour certains étudiants. Après tout, il est toujours mieux d'avoir plus de preuves d'un même résultat que moins de preuves, même si le résultat est un fait établi. Beaucoup trop café a été bu pour écrire ces plus de 600 pages qui méritent mieux que de prendre la poussière au fond d'un disque dur.

Première partie

Géométrie différentielle et action de groupe

2 Topologie générale

2.1 Introduction :

Le but de cette section sera d'établir grossièrement les principales définitions en topologie générale. Elle est entièrement à écrire. Me baser sur "2017-08-01 espace topologique.txt".

2.2 Espace métrique :

Définition : Une *métrique* (ou *distance*) sur un ensemble X est une application

$$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

vérifiant les axiomes suivants :

1. symétrie : $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$
2. séparation : $\forall x, y \in X,\ d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in X,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Définition : Un *espace métrique* (X, d) est un ensemble X muni d'une métrique d.

Définition : Soit (X, d) un espace métrique. La *topologie métrique* sur X est celle engendrée par les boules ouvertes $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$.

Définition : Soit (X, d) un espace métrique. Une suite (x_i) en X est dite *Cauchy* (au sens des espaces métriques) si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall i, j \geq N,\ d(x_i, x_j) < \epsilon$$

Remarque : Il existe aussi une définition plus générale de suite de Cauchy au sens des espaces uniformes en termes d'entourages. Je ne pense pas en avoir besoin pour l'instant. Voir "2017-07-27 espace uniforme.txt" et "2017-07-29 espace complet.txt" si jamais j'en ai besoin.

Définition : Un espace métrique (X, d) est dit *complet* si toute suite de Cauchy en X converge en X.

Proposition : Soit (X, d) un espace métrique. Soit Y un sous-ensemble complet en X. Alors Y est fermé en X.

Preuve : Soit (y_k) une suite en Y qui converge à $y \in X$. Comme (y_k) converge à $y \in X$, alors (y_k) est Cauchy en X. Comme (y_k) est Cauchy en X, (y_k) est Cauchy en Y. Mais Y est complet. Donc (y_k) converge en Y. Donc $y \in Y$. □

Proposition : Dans un espace métrique (X, d), les limites sont uniques.

Preuve : Considérons une suite (x_i) en X. Supposons par l'absurde que (x_i) converge à x et à y. Supposons par l'absurde $y \neq x$. Alors $d(x, y) > 0$. Posons $\epsilon := d(x, y)/2 > 0$ de sorte que $y \notin B(x, \epsilon)$. Puisque x_i converge à x, alors il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $x_n \in B(x, \epsilon)$. C'est-à-dire, chaque x_n est dans la boule ouverte $B(x, \epsilon)$ à partir de N. Donc, si je prend une boule $B(y, \epsilon/2)$, la suite x_n n'y sera jamais car $B(y, \epsilon/2) \cap B(x, \epsilon) = \emptyset$. Donc x_i ne converge pas à y. Ce qui est une contradiction. □

Proposition : Soit (X, d) un espace métrique. L'intersection (finie ou infinie) de sous-ensembles complets de X est complète.

Preuve : Soit $\{Y_i\}_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles complets de X. Considérons une suite de Cauchy (y_i) en $\cap_{i\in I} Y_i$. Alors (y_i) est Cauchy en chaque sous-ensemble complet Y_i. Alors (y_i) converge en chaque Y_i. Ces limites sont égales car les limites sont uniques dans les espaces métriques (via axiomes de séparation). Donc la suite de Cauchy (y_i) converge à une limite unique en $\cap_{i\in I} Y_i$. D'où $\cap_{i\in I} Y_i$ est complet. □

Proposition : Soit (X, d) un espace métrique. L'union finie de sous-ensembles complets de X est complète.

Preuve : TO DO ! ! ! □

2.3 Topologie initiale :

Définition : Soit X un ensemble et (Y, T_Y) un espace topologique. Soit $\{f_k : X \to Y\}$ une famille d'applications de X à Y. Alors la *topologie initiale* T_X sur X induite par $\{f_k\}$ est la plus grossière rendant chaque application f_k continue.

Remarque : Pour l'instant c'est tout ce que j'ai besoin. C'est pour la définition de la topologie faible sur un espace préhilbertien plus bas.

3 Algèbre linéaire et analyse fonctionnelle

3.1 Introduction :

Le but de cette section est d'établir grossièrement les résultats d'analyse fonctionnelle nécessaires en théorie de jauge. C'est juste une sélection rapide d'information dans mes fichiers .txt d'août 2017. Revenir y compléter les preuves. Faire ça *self-contained*. TO DO ! ! !

3.2 Espace vectoriel :

Considérons un espace vectoriel V sur le corps commutatif $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Notation : Soit $E \subset V$ un sous-ensemble de V. Alors l'espace vectoriel *engendré* par E (i.e. le *span*) est :

$$\mathbb{K}\langle E\rangle := \left\{ \sum_{\text{finie}} a_k v_k \middle| \forall k, a_k \in \mathbb{K}, v_k \in E \right\}$$

Définition : Deux vecteurs v_1 et v_2 sont dits *linéairement dépendants* s'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $v_1 = av_2$. Deux vecteurs qui ne sont pas linéairement dépendants sont dits *linéairement indépendants*.

Définition : Une *base vectorielle* de V est un sous-ensemble $E \subset V$ de vecteurs linéairement indépendants tel que :

$$V = \mathbb{K}\langle E\rangle$$

Remarque : Le *span* $\mathbb{K}\langle E\rangle$ dénote les combinaisons linéaires *finies*. C'est vrai autant lorsque V est de dimension finie que lorsqu'il est de dimension infinie. La notion de *base hilbertienne* plus bas n'est pas une véritable base au sens où elle n'exprime pas les vecteurs comme *sommes finies*, mais comme *séries infinies*, i.e. comme limite de suites en $\mathbb{K}\langle E\rangle$.

3.3 Algèbre linéaire en dimension finie :

Considérons un espace vectoriel V sur le corps commutatif $\mathbb{K}$ (ici $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $\dim_{\mathbb{K}} V = n$. Une *base* de V est un ensemble $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ de n vecteurs de V qui sont linéairement indépendants :

$$V = \mathbb{K}\langle\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\rangle := \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \vec{v}_k \middle| (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Donnée une base de V, tout vecteur $\vec{v} \in V$ s'écrit alors comme une *colonne d'éléments de* $\mathbb{K}$ et tout opérateur linéaire $A : V \to V$ s'écrit alors comme une *matrice d'éléments de* $\mathbb{K}$. De la même manière, en se donnant aussi une base $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m\}$ d'un espace vectoriel W de dimension $\dim_{\mathbb{K}} W = m$, tout opérateur linéaire $A : V \to W$ s'écrit comme une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$.

Donné un opérateur linéaire $A : V \to V$, on lui associe deux nombres :

- La *trace* $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{K}$, et
- le *déterminant* $\det(A) \in \mathbb{K}$.

Ces nombres sont indépendants de la base de V choisie pour les calculer. En particulier, dans la base des vecteurs propres de A, la matrice correspondante à l'opérateur linéaire A est la matrice D des valeurs propres de A. Ce faisant, la trace d'un opérateur linéaire $A :\to V$ est égal à la somme de ses valeurs propres (avec multiplicité !) et le déterminant est égal au produit de ses valeurs propres (avec multiplicité !). La trace est une application linéaire

$$\mathrm{tr} : \mathrm{End}(V) \to \mathbb{K}$$

Si f est une application différentiable à valeurs en $\mathrm{End}(V)$, la différentielle commute avec la trace, i.e. $\mathrm{d}\,(\mathrm{tr}(f)) = \mathrm{tr}(\mathrm{d}f)$. La trace et le déterminant de matrices carrées est relié par l'égalité $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.

Donnée une application linéaire $A : V \to W$, on définit :

- Le *noyau de A* est par définition $\ker(A) := \{v \in V | Av = 0\}$,
- L'*image de A* est par définition $\mathrm{im}(A) := \{Av | v \in V\} = \{w \in W | \exists v \in V \text{ t.q. } Av = w\}$.

Donné un espace vectoriel V on définit son *espace vectoriel dual* V^* par

$$V^* := \{\alpha : V \xrightarrow{linaire} \mathbb{K}\}$$

Il y a un *appariement de dualité* naturel entre les éléments de V et ceux de V^* :

$$\begin{aligned} \langle \cdot , \cdot \rangle : V^* \times V &\to \mathbb{K} \\ (\alpha, v) &\mapsto \langle \alpha, v\rangle := \alpha(v) \end{aligned}$$

Une base $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ de V induit une base $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de V^* par :

$$\alpha_i(\vec{v}_j) = \delta_{i,j} \ , \quad \forall i, j = 1, ..., n$$

Cette dernière base $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ de V^* est dite *base duale* de la base $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ de V. Cette base est à ne pas confondre avec la *base musicale* dièse ou bémol ! En effet, donnons-nous un produit scalaire

$$g : V \times V \to \mathbb{K}$$

Il induit une matrice

$$g_{i,j} := g(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$$

qui nous permet alors d'écrire

$$g = g_{i,j}\alpha_i \otimes \alpha_j$$

La musicalité g-bémol, définie pour tout $v \in V$ par $v^\flat := g(v, \cdot)$, fait correspondre à une base $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ de V une *base musicale g-bémol* :

$$\{\vec{v}_1^\flat, ..., \vec{v}_n^\flat\}$$

de l'espace dual V^*. Je reviendrai plus bas sur les propriétés des musicalités dièse et bémol. La base musicale bémol est égale à la base duale si et seulement si la matrice

$$g_{i,j} := g(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$$

est égale à la matrice identité $\mathbb{I}_{n\times n}$.

Donné un opérateur linéaire $A \in \mathrm{End}(V)$ agissant sur (V, g), nous pouvons définir implicitement l'*opérateur adjoint* $A^g \in \mathrm{End}(V)$ par :

$$g(A^g v, w) = g(v, Aw) \ , \quad \forall v, w \in V$$

Si de plus A est inversible, i.e. si $A \in \mathrm{Aut}(V)$, alors nous pouvons définir son *opérateur dual* $A^* \in \mathrm{Aut}(V^*)$ par

$$A^*\alpha := \alpha \circ A^{-1} \ , \quad \forall \alpha \in V^*$$

Remarque : L'opérateur dual A^* vérifie directement

$$\langle A^*\alpha, Av \rangle = \langle \alpha, v \rangle \ , \quad \forall \alpha \in V^*, v \in V$$

Remarque : Si $A^g = A$, on dit alors que A est *auto-adjoint relativement à* g (ou encore g*-auto-adjoint*). Si $A^g = -A$, on dit alors que A est *anti-auto-adjoint relativement à* g (ou encore g*-anti-auto-adjoint*).

Remarque : Lorsque g sera contextuellement évident, je dénoterai plutôt l'opérateur adjoint de A relativement à g par A' au lieu de A^g.

Proposition : Soit $A \in \mathrm{End}(V)$ un opérateur linéaire agissant sur (V, g). Alors

$$(A')' = A$$

Preuve : Soient $v, w \in V$ quelconques. La non dégénérescence de g implique directement que $(A')' = A$:

$$g((A')'v, w) = g(v, A'w) = g(Av, w)$$

□

Proposition : Soit $A \in \mathrm{End}(V)$ un opérateur linéaire agissant sur (V, g). Posons

$$\mathrm{sym}(A) := \frac{A + A'}{2}$$

$$\mathrm{antisym}(A) := \frac{A - A'}{2}$$

Alors $\mathrm{sym}(A)$ est un opérateur auto-adjoint et $\mathrm{antisym}(A)$ est un opérateur anti-auto-adjoint.

Preuve : Calcul direct en utilisant la dernière proposition. □

3.4 Espace vectoriel normé :

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition : Une *norme* sur V est une application $N : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que :

1. $\forall v \in V, \forall a \in \mathbb{K}, N(av) = |a|N(v)$ (absolue homogénéité)
2. $\forall v_1, v_2 \in V,\ N(v_1 + v_2) \leq N(v_1) + N(v_2)$ (sous-additivité, i.e. inégalité triangulaire)
3. $\forall v \in V, N(v) = 0 \implies v = 0$ (séparation).

Proposition : Soit (V, N) un espace vectoriel normé. Alors la norme N induit une distance

$$\begin{aligned} d : V \times V &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) := N(x - y) \end{aligned}$$

Preuve : Il faut vérifier les axiomes suivants :

1. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation)
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)

La symétrie découle de :

$$d(y, x) = N(y - x) = N((-1)(x - y)) = |-1|N(x - y) = d(x, y)$$

Montrons la séparation de d. Il faut montrer que $d(x, y) = 0 \iff x = y$, i.e. m.q. $N(x - y) = 0 \iff x - y = 0$. D'abord, $x - y = 0$ implique $N(x - y) = 0$ par l'axiome d'absolue homogénéité de N. Ensuite, $N(x - y) = 0$ implique $x - y$ par l'axiome de séparation de N. Enfin, l'inégalité triangulaire de d découle de celle de N :

$$d(x, z) = N(x - z) = N(x - y + y - z) \leq N(x - y) + N(y - z) = d(x, y) + d(y, z)$$

$\square$

Définition : Soit (V, N) un espace normé. La *topologie métrique* (ou encore la *topologie forte*, ou encore la *topologie de boules*) sur V est la topologie métrique induite par la distance d découlant de la norme N.

3.5 Produit scalaire et espace préhilbertien :

Définition : Soit V un espace vectoriel réel. Un *produit scalaire réel* sur V est une application

$$(\,\cdot\,,\,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$$

qui est :

1. bilinéaire : $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ est $\mathbb{R}$-lin. de chaque côté
2. symétrique : $\forall v_1, v_2 \in V$, $(v_2, v_1) = (v_1, v_2)$
3. positive : $\forall v \in V$, $(v, v) \geq 0$
4. définie : $(v, v) = 0 \implies v = 0$

Définition : Un *espace euclidien* est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire réel.

Définition : Soit V un espace vectoriel complexe. Un *produit scalaire hermitien* (à gauche) sur V est une application

$$(\,\cdot\,,\,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{C}$$

qui est :

1. sesquilinéaire (à gauche) : $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ est $\mathbb{C}$-lin. à gauche et anti-$\mathbb{C}$-lin. à droite
2. symétrique hermitienne : $\forall v_1, v_2 \in V$, $(v_2, v_1) = \overline{(v_1, v_2)}$
3. positive : $\forall v \in V$, $(v, v) \geq 0$
4. définie : $(v, v) = 0 \implies v = 0$

Définition : Un *espace hermitien* est un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien.

Définition : Un *espace préhilbertien réel (resp. complexe)* est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$) muni d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$).

Proposition : Un produit scalaire $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ induit une norme $N(\,\cdot\,) := \sqrt{(\,\cdot\,,\,\cdot\,)}$.

Preuve : Montrons l'axiome d'absolue homogénéité pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$N(av) = \sqrt{(av, av)} = \sqrt{\overline{a}a(v, v)} = \sqrt{|a|^2(v, v)} = |a|\sqrt{(v, v)} = |a|N(v)$$

Sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ c'est pareil. Montrons l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
N(v_1 + v_2) &= \sqrt{(v_1 + v_2, v_1 + v_2)} \\
&= \sqrt{(v_1, v_1) + (v_1, v_2) + (v_2, v_1) + (v_2, v_2)} \\
&= \sqrt{(v_1, v_1) + 2\Re(v_1, v_2) + (v_2, v_2)} \\
&\leq \sqrt{(v_1, v_1)} + \sqrt{(v_2, v_2)} \\
&= N(v_1) + N(v_2)
\end{aligned}$$

Ici j'ai utilisé $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$, ce qui découle de $x + y \leq x + 2\sqrt{xy} + y$. Enfin, montrons la séparation :

$$N(v) = 0 \implies \sqrt{(v, v)} = 0 \implies (v, v) = 0 \implies v = 0$$

Ici j'ai utilisé le fait que $(\cdot\,,\,\cdot)$ est défini. $\square$

Remarque : Ne pas confondre le produit scalaire $(u, v) \in \mathbb{K}$ d'une *paire d'éléments* $(u, v) \in V \times V$.

3.6 Théorème de Cauchy-Schwarz :

Théorème : (*théorème de Pythagore*) : Soit $(V, (\cdot, \cdot))$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\|\cdot\|$ la norme induite sur V par le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$. Soient $v, w \in V$. Si v est orthogonal à w, alors :

$$\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$$

Preuve : Calcul direct :

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= (v + w, v + w) = (v, v) + (w, v) + (v, w) + (w, w) \\ &= \|v\|^2 + 0 + 0 + \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + \|w\|^2 \end{aligned}$$

□

Proposition : (*théorème de Cauchy-Schwarz*) : Soit $(V, (\cdot, \cdot))$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\|\cdot\|$ la norme induite sur V par le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$. Alors, pour tous $x, y \in V$, on a :

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$$

Preuve : Soient x et y quelconques en V. Si $y = 0$, la preuve se termine. Supposons donc $y \neq 0$. Il suffit de démontrer que :

$$\frac{|(x, y)|}{\|y\|} \leq \|x\|$$

Posons :

$$\lambda := \frac{(x, y)}{\|y\|^2}$$

Les vecteurs λy et $x - \lambda y$ sont orthogonaux :

$$\begin{aligned} (x - \lambda y, \lambda y) &= (x, \lambda y) - (\lambda y, \lambda y) \\ &= \overline{\lambda}(x, y) - \lambda\overline{\lambda}\|y\|^2 \\ &= \overline{\lambda}(x, y) - (x, y)\overline{\lambda} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque λy est orthogonal à $x - \lambda y$, par le théorème de Pythagore on trouve :

$$\begin{array}{rcl}\|x\|^2 & = & \|\lambda y + (x - \lambda y)\|^2 \\ & = & \|\lambda y\|^2 + \|x - \lambda y\|^2 \\ & \geq & \|\lambda y\|^2 \\ & = & |\lambda|^2 \|y\|^2 \\ & = & \dfrac{|(x, y)|^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 \\ & = & \dfrac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2}\end{array}$$

D'où $\|x\|^2 \|y\|^2 \geq |(x, y)|^2$. D'où $|(x, y)| \leq \|x\|^2 \|y\|^2$. $\square$

3.7 Espaces de Banach et d'Hilbert :

Définition : Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé complet.

Définition : Un *espace de Hilbert* est un espace préhilbertien complet.

Remarque : Tout espace de Hilbert est Banach pour la norme induite par le produit scalaire. Par contre, l'inverse n'est pas toujours vrai. On peut se poser la question à savoir si la norme d'un espace vectoriel provient d'un produit scalaire.

Proposition : (*théorème de Fréchet-von Neumann-Jordan*) Une norme N provient d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ si et seulement si elle vérifie la règle du parallélogramme :

$$N(u+v)^2 + N(u-v)^2 = 2N(u)^2 + 2N(v)^2, \qquad \forall u, v \in V$$

Preuve : TO DO ! ! ! □

Proposition : Soit V est un espace de Banach. Soit $W < V$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors W est un espace de Banach.

Preuve : Il suffit de montrer que W est complet. Soit (w_n) une suite Cauchy en W. Alors (w_n) est Cauchy en V. Mais V est banachique, i.e. complet, donc la suite de Cauchy (w_n) converge à $w \in V$. On a donc une suite (w_n) en W qui converge à $w \in V$. Mais W est fermé. Donc la limite w est en W. Donc la suite Cauchy (w_n) en W converge à $w \in W$. □

Corollaire : Soit V est un espace de Hilbert. Soit $W < V$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors W est un espace de Hilbert.

Preuve : V est hilbertien, donc aussi banachique. $W < V$ est fermé en V, donc est aussi banachique. Mais la norme sur W vient d'un produit scalaire. Donc W est hilbertien. □

3.8 Base hilbertienne :

Les bases hilbertiennes d'espaces préhilbertiens c'est la même chose que les bases hilbertiennes des espaces hilbertiens.

En dimension finie il existe toujours une base. En dimension infinie l'existence d'une base est due au lemme de Zorn (si E complet). Néanmoins ça ne montre pas comment construire une base. On utilise alors le concept de base hilbertienne.

Définition : Soit H un espace préhilbertien (ou hilbertien). Une *base hilbertienne* est une famille $\{e_i\}_{i\in I}$ d'éléments de H vérifiant les axiomes suivants :

1. normalisation : $\forall i \in I, N(e_i) = 1$
2. orthogonalité : $\forall i, j \in I, i \neq j, (e_i, e_j) = 0$
3. complétude : $\mathbb{K}\langle e_i : i \in I\rangle$ est dense en H, i.e. :

$$H = \overline{\mathbb{K}\langle e_i : i \in I\rangle}$$

Remarque : L'axiome de complétude se reformule de manière équivalente comme : pour tout $x \in H$, il existe une suite $(a_i)_{i\in I}$ telle que $\sum_{i\in I} a_i e_i = x$. Autrement dit, une base hilbertienne n'exprime pas $x \in H$ comme une *somme* (finie) d'éléments e_i, mais comme une *série* (infinie) d'éléments e_i. Bref, une base hilbertienne n'est pas une véritable base. On a $\mathbb{K}\langle e_i : i \in I\rangle$ qui dénote des sommes finies, puis la fermeture $\overline{\mathbb{K}\langle e_i : i \in I\rangle}$ est des séries, i.e. des limites. Bref, $\mathbb{K}\langle e_i : i \in I\rangle$ est dense en H, mais n'est pas égal à H, contrairement à une vraie base.

Remarque : Pour tout $x \in H$, la condition d'orthogonalité garantit l'unicité de la famille de scalaires $(a_i)_{i\in I}$.

Remarque : Un espace préhilbertien n'admet pas toujours de base hilbertienne.

Proposition : Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.

Preuve : TO DO ! ! ! □

Remarque : Toute base hilbertienne n'est pas forcément dénombrable.

Proposition : Soit H préhilbertien (ou hilbertien) admettant une base hilbertienne. Alors H est séparable ssi la base est dénombrable.

Preuve : TO DO ! ! ! □

Remarque : Ici, il faut distinguer « séparable », i.e. il existe une famille de vecteurs dénombrable et dense dans H, de « séparé », i.e. Hausdorff T_2.

3.9 Axiome du choix :

Définition : (wiki :fr) L'*axiome du choix* se formule en différents énoncés équivalents :

0. Pour tout ensemble X d'ensembles non vides, il existe une fonction définie sur X, appelée *fonction de choix*, qui à chaque ensemble A appartenant à X associe un élément de cet ensemble A.

0'. Pour tout ensemble E, il existe une fonction qui à chaque partie non vide de E associe un élément de cette partie.

1. Pour tout relation d'équivalence R, il existe un système de représentants des classes de R.
2. Toute surjection possède une section.
3. Le produit $\Pi_{i\in I} X_i$ d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'ensembles non vides est non vide.

Remarque : L'axiome 0' s'écrit plus simplement comme suit. Soit E un ensemble. Soit $P(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. Alors il existe une fonction $f : P(E)\backslash\emptyset \to E$ telle que pour tout $U \in P(E)\backslash\emptyset$, $f(U) \in U$.

Selon Alex :

Une conséquence de l'axiome du choix est que tout espace vectoriel E (possiblement de dimension infinie) admet une base $\{e_i\}_{i\in I}$, i.e. une famille $\{e_i\}_{i\in I}$ de vecteurs de E qui sont linéairement indépendants et t.q. tout $x \in E$ s'écrit comme une somme finie $x = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k$.

Remarque : Une base préhilbertienne n'est pas une base. En effet, une base préhilbertienne exprime les éléments $x \in E$ comme série (somme infinie) de termes de la base. Cette série converge à x. Ceci diffère d'une véritable base où x s'écrit comme une somme finie.

Problème : Bien qu'une base hilbertienne est explicite, une base induite par l'axiome du choix n'est pas constructive (peut être on ne saura jamais à quoi elle ressemble). Cas particulièrement problématique : Soit E := l'espace vectoriel des suites en $\mathbb{R}$ (suites possiblement infinies). L'axiome du choix garantit l'existence d'une base $\{e_i\}_{i\in I}$. Mais cette base n'est pas $e_1 = (1, 0, 0, ...)$, $e_2 = (0, 1, 0, ...)$,.... En effet, ces derniers e_i ne permettent pas d'écrire les éléments de E comme somme finie. Bref, on peut se demander quelle est la base $\{e_i\}_{i\in I}$. Personne ne sait. Et c'est précisément l'idée que : "cette base existe mais on ne la connaitra peut-être jamais" qui motive les détracteurs de l'axiome du choix. Bref : L'axiome du choix est louche.

Aussi : la base donnée par l'axiome du choix n'est pas forcément préhilbertienne car pas forcément orthogonale.

3.10 Dual algébrique V^* et topologique V' :

Définition : Un *espace vectoriel topologique* (*e.v.t*) est un espace vectoriel V sur un corps topologique $\mathbb{K}$ (ici $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni d'une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel. Plus précisément, l'addition $+ : V \times V \to V$ est continue et le produit par un scalaire av est continu.

Exemple : Tout espace de Banach ou d'Hilbert est un e.v.t. pour la topologie forte.

Définition : Soit V un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le *dual algébrique* V^* de V est l'espace vectoriel suivant :

$$V^* := \{\alpha : V \xrightarrow{\text{linéaire}} \mathbb{K}\}$$

Le *dual topologique* V' de V est l'espace vectoriel suivant :

$$V' := \{\alpha : V \xrightarrow{\text{linéaire et continu}} \mathbb{K}\} < V^*$$

3.11 Opérateurs bornés :

Définition : Soit $L : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou D). Alors L est dit être un opérateur *borné* si

$$\left\{\frac{\|Lu\|_F}{\|u\|_E} : u \in E\backslash\{0\}\right\} = \{\|Lu\|_F : \|u\|_E = 1\}$$

est borné en $\mathbb{K}$.

Remarque : De manière équivalente, L est borné s'il existe un nombre M tel que :

$$\forall u \in E,\ \|Lu\|_F \leq M\|u\|_E$$

Si L est borné, le plus petit tel M est la norme d'opérateur $\|L\|$ de L. Plus précisément :

$$\begin{aligned}\|L\| &:= \inf\{M : \forall u \in E,\ \|Lu\|_F \leq M\|u\|_E\}\\ &= \sup\left\{\frac{\|L(v)\|_F}{\|v\|_E}\middle| v \in E\backslash\{0\}\right\}\\ &= \sup\{\|L(v)\|_F | v \in E, \|v\|_E = 1\}\\ &= \sup\{\|L(v)\|_F | v \in E, \|v\|_E \leq 1\}\end{aligned}$$

Proposition : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors L est borné $\iff$ L est continu $\iff$ est continu à l'origine.

Preuve : TO DO ! ! ! □

Proposition : Soit $(V, (\cdot\,,\,\cdot))$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $v \in V$. Alors la musicalité bémol

$$v^\flat = (v,\ \cdot\ ) : V \to \mathbb{K}$$

appartient à V'.

Preuve : Le fait que $v^\flat$ soit dans le dual algébrique V^* est évident. Pour montrer que $v^\flat$ est continu pour la topologie forte, il suffit de montrer que $v^\flat$ est un opérateur borné pour la norme d'opérateurs. Ceci découle de Cauchy-Schwarz. En effet, pour $w \in V\backslash\{0\}$ quelconque, on a :

$$\frac{|v^\flat(w)|}{\|w\|} = \frac{|(v, w)|}{\|w\|} \leq \frac{\|v\|\|w\|}{\|w\|} = \|v\| < +\infty$$

□

3.12 Topologie forte et faible :

Remarque : Tel que définit plus haut, la *topologie forte* sur un espace vectoriel normé (V, N) est la topologie métrique pour la métrique d découlant de la norme N. Sur un espace préhilbertien se trouve non seulement la topologie forte, mais aussi une autre qui découle du produit scalaire $(\cdot\,,\,\cdot)$.

Définition : Soit $(V, (\cdot\,,\,\cdot))$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). La *topologie faible* $\sigma(V, V')$ sur V est celle initiale l'ensemble d'applications V'.

Remarque : Autrement dit, la topologie faible est celle la plus grossière tel que chaque forme linéaire fortement continue reste faiblement continue.

Remarque : Chaque $\alpha \in E'$ induit une semi-norme $\|\cdot\|_\alpha := |\langle\alpha,\,\cdot\rangle|$. Cette famille de semi-normes $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in E'\}$ fait de E un espace localement convexe pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. Aussi, la famille de semi-normes induit une famille de pseudo-métriques, i.e. une famille d'écarts, i.e. une jauge, i.e. une structure uniforme sur E pour la topologie faible.

Mettre la définition de semi-norme, de pseudo-métriques, d'écarts, de jauge, de structure uniforme plus haut. TO DO ! ! !

Remarque : Puisque chaque $v^\flat = (v,\,\cdot)$ est en V', les $v^\flat$ sont continus pour la topologie faible.

Remarque : Si V est hilbertien, V' est isomorphe à V (par le thm. de représ. de Riesz). Donc la définition de topologie faible peut être prise comme étant celle initiale pour la famille d'applications $\{v^\flat | v \in V\}$.

Remarque : Soit V un espace préhilbertien. On a vu plus haut que chaque $v^\flat$ est en V', i.e. est continu pour la topologie forte. Ainsi, par définition de la topologie faible, la topologie faible est plus grossière que celle forte. Autrement dit, il y a moins d'ouverts dans la topologie faible que dans la topologie forte.

Remarque : Si $f : X \to Y$ est continue pour une topologie T sur X et que T' est plus fine que T, alors f est continue aussi pour T'. Et vice versa. Bref, si une application $f : V \to W$ est continue pour la topologie faible sur V, alors elle est continue pour la topologie forte. Si $f : V \to W$ est continue pour la topologie forte sur V, elle n'est pas forcément continue pour la topologie faible sur V.

Remarque : Si une suite converge dans une topologie donnée, alors elle converge dans une topologie plus grossière. Et vice versa. Ainsi, si une suite converge dans la topologie forte, alors elle converge dans la topologie faible. Si elle converge dans la topologie faible, alors elle ne converge pas forcément dans la forte.

Remarque : En bref, dans la topologie faible moins d'applications sont continues mais plus de suites convergent. Inversement, dans la topologie forte plus d'applications sont continues mais moins de suites convergent.

3.13 Convergence forte et faible :

Définition : Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit (v_k) une suite en V. On dit que (v_k) *converge fortement* à $v \in V$ si (v_k) converge à v pour la topologie forte. Plus précisément, (v_k) converge fortement à v si $\|v_k - v\| \to 0$, i.e. si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall k \geq N,\ \|v_k - v\| < \epsilon$$

On écrit alors $v_k \to v$. On dit que (v_k) *converge faiblement* à $v \in V$ si (v_k) converge à v pour la topologie faible. Plus précisément, (v_k) converge faiblement à v si :

$$\forall \alpha \in V',\ \langle \alpha, v_k \rangle \to \langle \alpha, v \rangle$$

On écrit alors $v_k \rightharpoonup v$.

Proposition : Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit (v_k) une suite en V qui converge fortement à $v \in V$. Alors (v_k) converge aussi faiblement à v.

Preuve : Supposons que (v_k) converge fortement à v. Soit $\alpha \in V'$ quelconque. On veut montrer que $\langle \alpha, v_k \rangle \to \langle \alpha, v \rangle$. Pour cela, il suffit de montrer que $\langle \alpha, v_k - v \rangle \to 0$. Pour cela, il suffit de montrer que $|\langle \alpha, v_k - v \rangle| \to 0$. On utilise Cauchy-Schwarz :

$$|\langle \alpha, v_k - v \rangle| \leq \|\alpha\| \|v_k - v\| \to 0$$

Ici, j'ai utilisé le fait que $\|\alpha\| < +\infty$ car $\alpha \in V'$ et que $\|v_k - v\| \to 0$. □

Remarque : Si $(V, \|\cdot\|)$ était Banach (i.e. complet), on aurait aussi la convergence forte.

Proposition : Soit $(V, (\cdot, \cdot))$ un espace préhilbertien. Soit v_k une suite en V qui converge faiblement à $v \in V$. Supposons que $\|v_k\| \to \|v\|$. Alors v_k converge fortement à v.

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\|v_k - v\|^2 &= (v_k - v, v_k - v) \\
&= (v_k, v_k) - (v_k, v) - (v, v_k) + (v, v) \\
&= \|v_k\|^2 - 2\mathfrak{R}(v_k, v) + \|v\|^2 \\
&\to \|v\|^2 - 2\mathfrak{R}(v, v) + \|v\|^2 \\
&= \|v\|^2 - 2\|v\|^2 + \|v\|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\square$

3.14 V^* sépare V :

Proposition : Soit V un espace vectoriel topologique. Alors le dual algébrique V^* sépare V. C'est-à-dire :

$$\forall x \in V \backslash \{0\},\ \exists \alpha \in V^*,\ \text{t.q.}\ \ \alpha(x) \neq 0$$

Preuve : (1) Soit $x \in V \backslash \{0\}$. Par l'axiome du choix, V admet une base. Donc, il existe un sous-espace W de V tel que $V = \mathbb{K}\langle x \rangle \oplus W$. On pose $f \in V^*$ t.q. $f(x) = 1$ et $f|_W = 0$. Donc il existe $f \in V^*$ t.q. $f(x) \neq 0$. □

Preuve : (2) Soit $x \in V \backslash \{0\}$. Par l'axiome du choix, V admet une base $\{x\} \cup e_{i_{i \in I}}$ t.q. tout élément $v \in V$ s'écrit comme $v = a_0 x + \sum_{i \in I} a_i e_i$ où un nombre fini de a_i sont non nuls. On pose $f \in V^*$ par $f(a_0 x + \sum_{i \in I} a_i e_i) = a_0$. Ainsi, il existe $f \in V^*$ t.q. $f(x) = 1 \neq 0$. □

Remarque : Ici les deux preuves m'ont été données sur math.SE. Voir "2017-08-31" E^* sépare E.txt".

Remarque : Si V est un e.v.t. localement convexe, le dual topologique V' sépare aussi V. Voir plus bas la section *V' sépare V*.

3.15 Rudiments d'analyse fonctionnelle :

Théorème : (*de Banach-Schauder*, i.e. *de l'application ouverte*) : Toute application linéaire continue surjective entre deux e.v.t. complètement métrisables (i.e. admettant une métrique complète) est ouverte (i.e. l'image d'un ouvert est un ouvert).

Preuve : TO DO ! ! ! $\square$

Proposition : Tout espace de Banach est complètement métrisable.

Preuve : TO DO ! ! ! $\square$

Remarque : Le théorème de Banach-Schauder s'applique donc, en particulier, aux espaces de Banach.

Théorème : (*du graphe fermé*, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) : Soient E et F deux e.v.t. complètement métrisables sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire dont le graphe est fermé en $E \times F$. Alors f est continue.

Preuve : TO DO ! ! ! $\square$

Remarque : L'implication inverse est plus simplement : le graphe de toute application continue d'un espace topologique X dans un espace séparé Y est fermé dans $X \times Y$.

3.16 Perpendiculaire et somme directe orthogonale :

Définition : Soit $(V, (\cdot, \cdot))$ un espace vectoriel préhilbertien. Soit $W < V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors le *perpendiculaire* de W, est par définition :

$$W^\perp = \{v \in V | \forall w \in W,\ (v, w) = 0\} < V$$

Plus généralement, si $E \subset V$ est un sous-ensemble de V, le perpendiculaire de E est par définition :

$$E^\perp := \{v \in V | (v, e) = 0, \forall e \in E\} < V$$

Remarque : Bien que E ne soit qu'un sous-ensemble de V, $E^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V.

Définition : Soit V un espace vectoriel préhilbertien. Soient $W_1, W_2 < V$ deux sous-espaces vectoriels. On dit que W_1 et W_2 sont *perpendiculaires* si :

$$\forall w_1 \in W_1, \forall w_2 \in W_2,\ (w_1, w_2) = 0$$

Lorsque c'est le cas, on écrit $W_1 \perp W_2$.

Proposition : Soit V un espace vectoriel préhilbertien. Soient $W_1, W_2 < V$ deux sous-espaces vectoriels de V. Supposons $W_1 \perp W_2$. Alors $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Preuve : Soit $v \in W_1 \cap W_2$ quelconque. Alors $\|v\|^2 = (v, v) = 0$ car v est perpendiculaire à lui-même. D'où $v = 0$. □

Remarque : L'implication inverse de la dernière proposition n'est pas vraie. Par exemple, en $\mathbb{R}^2$, on a $\mathbb{R}\langle(1, 0)\rangle \cap \mathbb{R}\langle(1, 1)\rangle = \{0\}$ mais les deux sous-espaces $\mathbb{R}\langle(1, 0)\rangle$ et $\mathbb{R}\langle(1, 1)\rangle$ ne sont pas perpendiculaires.

Corollaire : Soit V préhilbertien. Soit $W < V$. Alors $W \cap W^\perp = \{0\}$.

Preuve : Découle de la dernière proposition et du fait que $W \perp W^\perp$. □

Définition : Soit V un espace vectoriel préhilbertien. Une *décomposition en somme directe orthogonale* :

$$V = W_1 \oplus W_2$$

est une paire de sous-espaces vectoriels W_1 et W_2 de V tels que :

1. transversalité : $V = W_1 + W_2$
2. orthogonalité : $W_1 \perp W_2$

Lorsque $V = W_1 \oplus W_2$, on dit que W_1 est un *supplémentaire* de W_2 et vice versa.

Proposition : Soit V préhilbertien. Supposons $V = W_1 \oplus W_2$ et aussi $V = W_1 \oplus W_3$. Alors $W_2 = W_3$.

Preuve : Par symétrie, il suffit de montrer que $W_2 < W_3$. Soit $v \in W_2$ non nul quelconque. Puisque $V = W_1 \oplus W_2$, on a $v \notin W_1$. Puisque $V = W_1 \oplus W_3$, on a $v \in W_3$. □

Proposition : Soit V préhilbertien. Soient $U < W < V$ des sous-espaces vectoriels. Alors $U = W \cap (W^\perp + U)$.

Preuve : Montrons l'inclusion $U < W \cap (W^\perp + U)$. Soit $u \in U$. Mais $U < W$, donc $u \in W$. Pour montrer que $u \in W \cap (W^\perp + U)$, il suffit donc de montrer que $u \in W^\perp + U$. Ce qui est vrai car $u \in U$. Montrons l'inclusion $W \cap (W^\perp + U) < U$. Soit $v \in W \cap (W^\perp + U)$. Alors $v \in W$ et $v \in W^\perp + U$. Puisque $v \in W^\perp + U$, $v = w + u$ pour certains $w \in W^\perp$ et $u \in U$. Puisque $v \in W$ et $u \in U < W$, alors $w = v - u \in W$. Donc $w \in W$ et $w \in W^\perp$. Donc $w = 0$. Donc $v = 0 + u = u \in U$. D'où $v \in U$. □

3.17 Perpendiculaire en dimension finie :

Proposition : Soit (V, g) un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire g. Soit $W < V$ un sous-espace vectoriel. Alors W induit une décomposition en somme directe orthogonale :

$$V = W \oplus W^\perp$$

Preuve : TO DO ! ! ! $\square$

Remarque : En dimension infinie c'est plus subtil. Voir plus bas.

Proposition : Soit (V, g) un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire g. Soit $W < V$ un sous-espace vectoriel. Alors $(W^\perp)^\perp = W$.

Preuve : On a $V = W \oplus W^\perp$ et $V = W^\perp \oplus W^{\perp\perp}$. D'où $W = W^{\perp\perp}$. $\square$

Remarque : En dimension infinie on a toujours $W < (W^\perp)^\perp$. Par contre l'inclusion dans l'autre sens n'est pas toujours vérifiée. Voir plus bas.

Proposition : Soit (V, g) de dimension finie. Soient $W_1, W_2 < V$. Alors :

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$$
$$W_1^\perp + W_2^\perp = (W_1 \cap W_2)^\perp$$

Preuve : Montrons la première égalité :

$$\begin{aligned} v \in (W_1 + W_2)^\perp &\iff \forall w \in W_1 + W_2,\ g(v, w) = 0 \\ &\iff \forall w_1 \in W_1,\ g(v, w_1) = 0 \text{ et } \forall w_2 \in W_2,\ g(v, w_2) = 0 \\ &\iff v \in W_1^\perp \text{ et } v \in W_2^\perp \\ &\iff v \in W_1^\perp \cap W_2^\perp \end{aligned}$$

D'où la première égalité $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$. Maintenant, on utilise le fait qu'en dimension finie on a toujours $W^{\perp\perp} = W$. En utilisant la première égalité, on trouve directement :

$$W_1^\perp + W_2^\perp = (W_1^\perp + W_2^\perp)^{\perp\perp} = (W_1^{\perp\perp} \cap W_2^{\perp\perp})^\perp = (W_1 \cap W_2)^\perp$$

$\square$

Proposition : Soit (V, g) de dimension finie. Soient $U < W < V$. Supposons $W \cap U^\perp = \{0\}$. Alors $U = W$.

Preuve : Puisque $U < W$, il suffit de montrer que $W < U$. Soit $w \in W$ quelconque. On a $V = U \oplus U^\perp$. Donc $w = u + u^\perp$ pour $u \in U$ et $u \in U^\perp$. Mais $U < W$. Donc $u \in W$. Donc $u^\perp = w - u \in W$. Donc $u^\perp \in W \cap U^\perp = \{0\}$. Donc $u^\perp = 0$. Donc $w = u$. Donc $w \in U$. Comme w était quelconque en W, alors $W < U$. □

Remarque : Cette proposition n'est pas toujours vraie en dimension infinie. Toutefois, dans le cas V hilbertien et U et W fermés, elle est encore vraie.

3.18 Décomposition orthogonale :

Théorème : (*théorème du supplémentaire orthogonal d'un fermé dans un espace de Hilbert*) : Soit V un espace de Hilbert. Soit W un sous-espace vectoriel fermé de V. Alors $W^\perp$ est un supplémentaire de W, i.e. $V = W \oplus W^\perp$.

Proposition : (version *préhilbertienne*) : Soit V un espace préhilbertien. Soit W un sous-espace vectoriel complet de V. Alors $V = W \oplus W^\perp$.

Remarque : La preuve utilise le *théorème de projection orthogonale sur un convexe complet dans un espace préhilbertien*.

Corollaire : Soit V un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $W < V$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors $V = W \oplus W^\perp$.

Preuve : W est forcément complet car est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. □

Remarque : Ce dernier corollaire est utile pour la preuve du théorème de décomposition de Hodge. En effet, la preuve en question utilise le fait que $\ker(\Delta)$ est de dimension finie pour dire que $\Omega^k(X) = \ker(\Delta) \oplus (\ker(\Delta))^\perp$.

Remarque : Pour d'autres résultats sur les histoires de perpendiculaires, voir "2018-11-25 décomposition en somme directe orthogonale.txt"

3.19 Le perpendiculaire (V préhilbertien) :

Proposition : Soit V un espace vectoriel préhilbertien. Soit $E \subset V$ un sous-ensemble. Alors le sous-espace vectoriel $E^\perp < V$ est fermé (pour la topologie forte) en V.

Preuve : Soit (x_i) une suite en $E^\perp$ qui converge à $x \in V$. Il suffit de montrer que $x \in E^\perp$. On a :

$$\begin{aligned} & (x_i, e) = 0, \ \forall i \\ & \implies \lim(x_i, e) = 0 \\ & \implies (\lim x_i, e) = 0 \qquad \text{car } (\cdot\,,\,\cdot) \text{ est continu} \\ & \implies (x, e) = 0 \\ & \implies x \in E^\perp \end{aligned}$$

□

Corollaire : Soit V un préhilbertien et $W < V$ un sous-espace vectoriel. Alors $W^\perp < V$ est fermé en V.

Proposition : Soit V préhilbertien. Soit $W < V$. Alors :

$$\overline{W}^\perp = W^\perp$$

Preuve : Montrons $\overline{W}^\perp < W^\perp$. Soit $x \in \overline{W}^\perp$. Alors $(x, y) = 0$ pour tout $y \in \overline{W}$. Mais $W \subset \overline{W}$. Donc $(x, y) = 0$ pour tout $y \in W$. Ok. Montrons $W^\perp < \overline{W}^\perp$. Soit $x \in W^\perp$. Alors $(x, y) = 0$ pour tout $y \in W$. Soit $y \in \overline{W}$ quelconque. Alors il existe une suite (y_k) en W qui tend à y. On a donc $(x, y) = (x, \lim y_k) = \lim(x, y_k) = 0$ où j'ai utilisé le fait que $(\cdot\,,\,\cdot)$ est continu. D'où $(x, y) = 0$. Comme y était quelconque en $\overline{W}$, on a $x \in \overline{W}^\perp$. Ok. □

Proposition : Soit V un espace préhilbertien et deux sous-ensembles $X, Y \subset V$ tels que $\emptyset \neq X \subset Y \subset V$. Alors $Y^\perp < X^\perp$.

Preuve : Soit $v \in Y^\perp$. Alors $(v, y) = 0$ pour tout $y \in Y$. Mais $X \subset Y$. Donc $(v, x) = 0$ pour tout $x \in X$. Donc $v \in X^\perp$. □

Proposition : Soit V un espace vectoriel préhilbertien. Supposons que V se décompose en somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels $W_1, W_2 < V$:

$$V = W_1 \oplus W_2$$

Alors W_1 et W_2 sont fermés en V.

Preuve : Puisque W_1 est perpendiculaire à W_2, on a $W_1 < W_2^\perp$. Mais $W_2^\perp$ est fermé en V (par le dernier corollaire). Donc la fermeture de $\overline{W}_1$ est en $W_2^\perp$. Soit $x \in \overline{W}_1$. On veut montrer que $x \in W_1$. Comme $x \in \overline{W}_1 < W_2^\perp$, on a $x \in W_2^\perp$. Comme $x \in V = W_1 \oplus W_2$, x se décompose de manière unique comme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in W_1$ et $x_2 \in W_2$. On a :

$$\begin{aligned}
& x \in W_2^\perp \\
& \implies (x, w) = 0, \forall w \in W_2 \\
& \implies (x_1 + x_2, w) = 0, \forall w \in W_2 \\
& \implies (x_1, w) + (x_2, w) = 0, \forall w \in W_2 \\
& \implies (x_2, w) = 0, \forall w \in W_2
\end{aligned}$$

Donc $x_2 \in W_2^\perp$. Mais $x_2 \in W_2$. Donc $x_2 = 0$. Donc $x = x_1 \in W_1$. □

Corollaire : Soit V un espace vectoriel préhilbertien. Soit $W < V$ non fermé. Alors :

$$V \neq W \oplus W^\perp$$

Preuve : Découle directement de la dernière proposition. □

Proposition : Soit V un espace vectoriel préhilbertien. Soit $W < V$ non fermé. Alors :

$$W^{\perp\perp} \neq W$$

Preuve : Par une proposition plus haut, le perpendiculaire est un fermé. Donc $W^\perp$ est fermé et $W^{\perp\perp} = (W^\perp)^\perp$ aussi. Mais W n'est pas fermé. Donc $W \neq W^{\perp\perp}$. □

Proposition : Soit V un espace vectoriel préhilbertien. Soit $W < V$. Alors :

$$W < W^{\perp\perp}$$

Preuve : $v \in W \implies \forall w \in W^\perp,\ (w, v) = 0 \implies v \in (W^\perp)^\perp = W^{\perp\perp}$. □

Proposition : Soit V un espace vectoriel préhilbertien. Soient $W_1, W_2 < V$. Alors :

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$$

$$W_1^\perp + W_2^\perp < (W_1 \cap W_2)^\perp$$

Preuve : Montrons la première égalité :

$$\begin{aligned} v \in (W_1 + W_2)^\perp &\iff \forall w \in W_1 + W_2,\ g(v, w) = 0 \\ &\iff \forall w_1 \in W_1,\ g(v, w_1) = 0 \text{ et } \forall w_2 \in W_2,\ g(v, w_2) = 0 \\ &\iff v \in W_1^\perp \text{ et } v \in W_2^\perp \\ &\iff v \in W_1^\perp \cap W_2^\perp \end{aligned}$$

D'où la première égalité $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$. Montrons la seconde égalité. Soit $v \in W_1^\perp + W_2^\perp$. Alors $v = v_1 + v_2$ pour $v_1 \in W_1^\perp$ et $v_2 \in W_2^\perp$. On veut montrer que $v \in (W_1 \cap W_2)^\perp$. Soit $w \in W_1 \cap W_2$ quelconque, i.e. $w \in W_1$ et $w \in W_2$. Alors :

$$(v, w) = (v_1, w) + (v_2, w) = 0 + 0 = 0$$

□

Proposition : Soit V un espace préhilbertien. Soient $U < W < V$ des sous-espaces vectoriels. Supposons U complet en V. Supposons $W \cap U^\perp = \{0\}$. Alors $U = W$.

Preuve : Puisque $U < W$, il suffit de montrer que $W < U$. Soit $w \in W$ quelconque. Puisque U est complet en V préhilbertien, on a $V = U \oplus U^\perp$. Donc $w = u + u^\perp$ pour $u \in U$ et $u \in U^\perp$. Mais $U < W$. Donc $u \in W$. Donc $u^\perp = w - u \in W$. Donc $u^\perp \in W \cap U^\perp = \{0\}$. Donc $u^\perp = 0$. Donc $w = u$. Donc $w \in U$. Comme w était quelconque en W, alors $W < U$. □

Proposition : Soit V préhilbertien. Soient $U < W < V$ des sous-espaces vectoriels de V. Supposons U complet en V. Alors $W = U \oplus (W \cap U^\perp)$.

Preuve : Le sous-espace W est préhilbertien. En W repose U qui est complet. Donc on peut écrire $W = U \oplus \{v \in W | v \perp U\}$. Ici :

$$\begin{aligned} \{v \in W | v \perp U\} &= \{v \in W | v \in U^\perp\} \\ &= \{v \in V | v \in W, v \in U^\perp\} \\ &= \{v \in V | v \in W \cap U^\perp\} \\ &= W \cap U^\perp \end{aligned}$$

□

Proposition : Soit V un espace préhilbertien. Soient $W_1, W_2 < V$ des sous-espaces vectoriels en V. Supposons $W_1 \cap W_2$ complet en V. Alors :

$$W_1 + W_2 = (W_1 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \oplus (W_1 \cap W_2) \oplus (W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp)$$

Preuve : Puisque $W_1 \cap W_2$ est complet, la dernière proposition implique deux décompositions :

$$W_1 = (W_1 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \oplus (W_1 \cap W_2)$$

$$W_2 = (W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \oplus (W_1 \cap W_2)$$

Ici :

$$\begin{aligned} & (W_1 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \cap (W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \\ = \; & (W_1 \cap W_2) \cap (W_1 \cap W_2)^\perp \\ = \; & \{0\} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & W_1 + W_2 \\ = \; & ((W_1 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \oplus (W_1 \cap W_2)) + ((W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \oplus (W_1 \cap W_2)) \\ = \; & (W_1 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \oplus (W_1 \cap W_2) \oplus (W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \end{aligned}$$

□

Remarque : Plus haut on a vu que l'intersection de sous-ensembles complets dans un espace métrique est un espace complet. La dernière proposition sera donc vraie, en particulier, lorsque W_1 et W_2 sont complets.

3.20 Le perpendiculaire (V hilbertien) :

Proposition : Soit V un espace de Hilbert. Soit $W < V$ fermé. Alors :

$$W = (W^\perp)^\perp$$

Preuve : V est un espace de Hilbert et W est fermé. Donc, par une proposition plus haut, on a $V = W \oplus W^\perp$. De la même manière, $W^\perp$ est fermé, donc $V = W^\perp \oplus (W^\perp)^\perp$. D'où $W^\perp \oplus W = V = W^\perp \oplus (W^\perp)^\perp$. D'où $W = (W^\perp)^\perp$. □

Proposition : Soit V un espace de Hilbert. Soit $W < V$. Alors :

$$\overline{W} = (W^\perp)^\perp$$

Preuve : Puisque $\overline{W}$ est fermé, on a $\overline{W} = (\overline{W}^\perp)^\perp$. Il suffit alors de montrer que $(\overline{W}^\perp)^\perp = (W^\perp)^\perp$. Ceci découle du fait que $\overline{W}^\perp = W^\perp$. □

Proposition : Soit V un espace vectoriel hilbertien. Soient $W_1, W_2 < V$. Alors :

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$$

$$W_1^\perp + W_2^\perp < (W_1 \cap W_2)^\perp$$

Preuve : Même chose que pour le cas préhilbertien. □

Remarque : Ici j'aurais aimé avoir une égalité pour le cas W_1, W_2 fermés en V. Mais même ça ça n'est pas assez. Le problème est que j'aurais besoin du fait que pour W_1 et W_2 deux fermés en V on a $W_1 + W_2$ fermé et $W_1 \oplus W_2$ fermé. Mais ces deux implications sont fausses. Il existe des contre-exemples.

Proposition : Soit V un espace de Hilbert. Soient $U < W < V$ des sous-espaces vectoriels. Supposons V fermé en V. Supposons $W \cap U^\perp = \{0\}$. Alors $U = W$.

Preuve : Puisque $U < W$, il suffit de montrer que $W < U$. Soit $w \in W$ quelconque. Puisque U est fermé en V hilbertien, on a $V = U \oplus U^\perp$. Donc $w = u + u^\perp$ pour $u \in U$ et $u \in U^\perp$. Mais $U < W$. Donc $u \in W$. Donc $u^\perp = w - u \in W$. Donc $u^\perp \in W \cap U^\perp = \{0\}$. Donc $u^\perp = 0$. Donc $w = u$. Donc $w \in U$. Comme w était quelconque en W, alors $W < U$. □

Proposition : Soit V hilbertien. Soient $U < W < V$ des sous-espaces vectoriels fermés en V. Alors $W = U \oplus (W \cap U^\perp)$.

Preuve : W est fermé en V hilbertien, donc W est hilbertien. U est fermé en W donc on peut écrire $W = U \oplus \{v \in W | v \perp U\}$. Ici :

$$\begin{aligned} \{v \in W | v \perp U\} &= \{v \in W | v \in U^\perp\} \\ &= \{v \in V | v \in W, v \in U^\perp\} \\ &= \{v \in V | v \in W \cap U^\perp\} \\ &= W \cap U^\perp \end{aligned}$$

□

Proposition : Soit V hilbertien. Soient $W_1, W_2 < V$ des sous-espaces vectoriels fermés en V. Alors :

$$W_1 + W_2 = (W_1 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \oplus (W_1 \cap W_2) \oplus (W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp)$$

Preuve : L'intersection de fermés est fermés. Donc $W_1 \cap W_2$ est fermé en les fermés W_1 et W_2. Donc, par la dernière proposition, on a deux décompositions :

$$W_1 = (W_1 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \oplus (W_1 \cap W_2)$$

$$W_2 = (W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \oplus (W_1 \cap W_2)$$

Ici :

$$\begin{aligned} & (W_1 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \cap (W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \\ = \;& (W_1 \cap W_2) \cap (W_1 \cap W_2)^\perp \\ = \;& \{0\} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & W_1 + W_2 \\ = \;& ((W_1 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \oplus (W_1 \cap W_2)) + ((W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \oplus (W_1 \cap W_2)) \\ = \;& (W_1 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \oplus (W_1 \cap W_2) \oplus (W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \end{aligned}$$

□

Proposition : Soit V un espace vectoriel normé. Soit $T : V \to V$ un opérateur linéaire borné. Alors $\ker(T)$ est fermé.

Preuve : Puisque T est borné, il est continu. Puisque T est continu, il commute avec la limite. Soit (x_i) une suite en $\ker(T)$ qui converge à $x \in V$. Alors :

$$\begin{aligned} &\lim T(x_i) = \lim 0 = 0 \\ &\implies T(\lim x_i) = 0 \\ &\implies T(x) = 0 \\ &\implies x \in W \end{aligned}$$

□

Corollaire : Soit $T : V \to V$ un opérateur linéaire borné entre deux espaces de Hilbert. Alors :

$$V = \ker T \oplus (\ker T)^{\perp}$$

Preuve : Comme T est borné, $\ker(T)$ est fermé. Comme $\ker(T)$ est fermé dans un espace hilbertien V, on a $V = \ker(T) \oplus (\ker(T))^{\perp}$. □

3.21 Opérateur elliptique :

Définition : (opérateur elliptique) TO DO ! ! ! (voir Warner)

Proposition : Le laplacien Δ est un opérateur elliptique.

Preuve : TO DO ! ! ! □

ATTENTION : le laplacien de Laplace-de Rham ne sera pas défini avant très longtemps, dans la section sur la théorie de Hodge plus bas, donc ici juste parler du laplacien en coordonnées $\Delta = \sum_i \partial_i \partial_i$?

Proposition : Soit M une variété lisse orientable fermée. Soit $E \to M$ un fibré vectoriel. Soit T un opérateur elliptique agissant sur les sections de E. Alors $\ker(T)$ est de dimension finie.

Preuve : TO DO ! ! ! □

3.22 Opérateur hypoelliptique :

Définition : (wiki) Soit P un opérateur différentiel défini sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Alors P est dit être *hypoelliptique* si pour toute distribution u définie sur un ouvert $V \subset U$ telle que Pu est lisse on a forcément u lisse.

Remarque : Plus simplement, P est hypoelliptique si :

$$Pu \in C^\infty \implies u \in C^\infty$$

Proposition : Tout opérateur elliptique est hypoelliptique.

Preuve : TO DO ! ! ! □

Exemple : Le laplacien Δ est hypoelliptique (car elliptique).

Exemple : L'opérateur de l'éq. de la chaleur $\partial_t - \Delta$ est hypoelliptique (mais non elliptique).

Exemple : L'opérateur de l'éq. d'onde (i.e. le D'Alembertien) $\Box = \partial_t\partial_t - \Delta$ n'est pas hypoelliptique (donc non elliptique).

Remarque : Bref, ce qui m'importe est que le laplacien est hypoelliptique :

$$\Delta\omega \in \Omega^k(X) \implies \omega \in \Omega^k(X)$$

C'est utile dans le théorème de décomposition de Hodge.

3.23 Opérateur de Green :

Soit M une variété riemannienne fermée (i.e. compacte et sans bord). Considérons le laplacien de Laplace-de Rham

$$\Delta : \Omega^k(X) \to \Omega^k(X)$$

Ici Ω^k dénote $\Omega^k(X)$. Le laplacien de Laplace-de Rham sera défini beaucoup plus bas dans la section sur la théorie de Hodge. On considère la corestriction du laplacien à son image :

$$\Delta : \Omega^k \to \Delta(\Omega^k)$$

Cette dernière application est évidemment surjective. On quotiente le domaine par le noyau de Δ :

$$\Delta : \Omega^k/\ker(\Delta) \to \Delta(\Omega^k)$$

Cette application est évidemment bijective. Cette bijection est inversible. L'inverse est l'opérateur de Green :

$$G : \Delta(\Omega^k) \to \Omega^k/\ker(\Delta)$$

Comme c'est l'inverse, il vérifie :

$$G \circ \Delta = \mathrm{id} \ \text{ sur } \ \Omega^k/\ker(\Delta)$$

$$\Delta \circ G = \mathrm{id} \ \text{ sur } \ \Delta(\Omega^k)$$

Remarque : Voir la section sur le théorème de décomposition de Hodge plus bas.

Remarque : Voir aussi la section sur la connexion de Coulomb sur $\mathcal{A}$.

3.24 Espace localement convexe :

Définition : Un e.v.t. E est dit *localement convexe* s'il vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

1. il existe une famille de semi-normes $P = \{p\}$ telle que la topologie de E est initiale pour les applications en $\{x \mapsto p(x-y) | y \in E, p \in P\}$.
2. le vecteur nul possède une base de voisinages formée de convexes.
3. la topologie est engendrée par les translations de parties convexes, équilibrées et absorbantes.

Remarque : Pour la définition de topologie initiale, de semi-norme, de convexe, d'équilibré, d'absorbant, voir :

1. "2017-08-01 espace topologique.txt"
2. "2018-08-07 espace normé.txt"
3. "2017-08-23 partie convexe.txt"
4. "2017-08-23 partie équilibrée.txt"
5. "2017-08-23 partie absorbante.txt"

La notion d'espace localement convexe est le bon contexte pour parler de dualité. Pour plus de détails, voir "2017-08-01 espace convexe.txt". Pour l'instant je garde ça au minimum ici, car la théorie des espaces localement convexes pourrait prendre un livre au complet.

3.25 Injection naturelle J dans le bidual (pour les espaces normés) :

Soit (X, N) un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit T la topologie forte sur X induite par N. Soit X' le dual topologique de X pour la topologie forte T :

$$X' := \{f : X \to \mathbb{K} | f \text{ linéaire continue } \}$$

Proposition : X' est un espace de Banach (pour la norme d'opérateurs).

Preuve : (car le dual d'un espace vectoriel normé est un espace de Banach) TO DO ! ! ! □

Soit $X'' := (X')'$ le *bidual* topologique de X :

$$X'' := \{\phi : X' \to \mathbb{K} | \phi \text{ linéaire continue } \}$$

Proposition : X'' est aussi un espace de Banach.

Preuve : Car c'est le dual d'un espace vectoriel normé E'. □

Définition : L'*injection naturelle* de X en X'' est :

$$J : X \to X''; (J(x))(f) := f(x), \forall x \in X, f \in X'$$

Proposition : L'injection naturelle $J : E \to E''$ est une application linéaire.

Preuve : Évident. □

Proposition : Soit (X, N) un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors, pour $x \in E$ et $f \in E'$ quelconques, on a :

$$|\langle f, x\rangle| \leq N(f)N(x)$$

Preuve : Si x est nul, l'inégalité est évidente (on a égalité). Si x est non nul, on procède comme suit. Pour $f \in E'$ quelconque, on a $N(f) = \sup_{x\in E\backslash\{0\}} |\langle f, x\rangle|/N(x) < +\infty$. Ceci implique que pour $x \in E\backslash\{0\}$ quelconque on a $N(f) \geq |\langle f, x\rangle|/N(x)$. C'est-à-dire qu'on a $|\langle f, x\rangle| \leq N(f)N(x)$. □

Proposition : L'injection naturelle $J : E \to E''$ est bel et bien à valeurs en E''.

Preuve : Soit $x \in E$ quelconque. En utilisant l'inégalité de la dernière proposition, on trouve :

$$\begin{aligned}
N(J(x)) &= \sup_{f\in E'\setminus\{0\}} |\langle J(x), f\rangle|/N(f) \\
&= \sup_{f\in E'\setminus\{0\}} |J(x)(f)|/N(f) \\
&= \sup_{f\in E'\setminus\{0\}} |f(x)|/N(f) \\
&= \sup_{f\in E'\setminus\{0\}} |\langle f, x\rangle|/N(f) \\
&\leq \sup_{f\in E'\setminus\{0\}} N(f)N(x)/N(f) \\
&= \sup_{f\in E'\setminus\{0\}} N(x) \\
&= N(x) \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

D'où $N(J(x)) < +\infty$. D'où $J(x)$ de norme finie (car N(x) de norme finie). D'où $J(x)$ repose en E''. □

Proposition : L'injection naturelle $J : E \to E''$ préserve la norme, i.e. :

$$\|J(x)\| = \|x\|$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\|J(x)\| &= \sup_{f\in E'\setminus\{0\}} |J(x)(f)|/\|f\| \\
&= \sup_{f\in E'\setminus\{0\}} |f(x)|/\|f\| \\
&= \sup_{f\in E'\setminus\{0\}} \|f\|\|x\|/\|f\| \\
&= \|x\|
\end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité découle d'un corollaire en "2017-08-28 thm de Hahn-Banach.txt". □

Proposition : L'injection naturelle $J : E \to E''$ est une application linéaire injective.

Preuve : (1) Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Par le corollaire en "2017-08-28 thm de Hahn-Banach.txt", il existe $f \in E'$ t.q. $\langle f, x\rangle = N(f)N(x)$ et t.q. $N(f) = N(x) \neq 0$. C'est-à-dire, il existe $f \in E'$ t.q. :

$$J(x)(f) = \langle f, x\rangle = N(f)N(x) = N(x)^2 \neq 0$$

D'où $J(x) \neq 0 \in E''$. D'où J injective. □

Preuve : (2) Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Par la dernière proposition, J préserve la norme, i.e. $\|J(x)\| = \|x\|$. Puisque $\|x\| \neq 0$, alors $\|J(x)\| \neq 0$, alors $J(x) \neq 0$. □

Remarque : L'injection naturelle J est aussi dite *evaluation map*. En effet, J revient à évaluer la valeur d'un élément du dual en un $x \in E$ donné.

3.26 Injection naturelle J dans le bidual (pour les espaces localement convexes) :

Soit E un espace localement convexe. Soit E' le dual topologique de E. Donnons à E' la topologie $\beta(E',E)$. Posons

$$J : E \to (E')^*; J(x)(f) := \langle f, x\rangle$$

Proposition : $J(x) \in E''$.

Preuve : L'application $J(x) \in (E')^*$ est continue pour la topologie $\sigma(E',E)$ sur E'. Mais la topologie $\beta(E',E)$ sur E' est plus fine que $\sigma(E',E)$. Donc $J(x)$ est $\beta(E',E)$-continue. Donc $J(x) \in E''$. On peut alors considérer la corestriction de J à E'', i.e. on a :

$$J : E \to E''$$

CLARIFIER CETTE PREUVE WIKI : TO DO ! ! ! □

Proposition : L'application J est injective.

Preuve : Soit E localement convexe sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Montrons que $J(x) \neq 0$, i.e. montrons qu'il existe $f \in E''$ t.q. $J(x)(f) \neq 0$, i.e. montrons qu'il existe $f \in E''$ t.q. $\langle f, x\rangle \neq 0$. Ceci découle de Hahn-Banach sur les espaces localement convexes : on prend $f : \mathbb{K}\langle x\rangle \to \mathbb{K}; f(x) = 1$ qu'on étend à tout E (par Hahn-Banach). □

3.27 Espace réflexif :

Définition : Soit (X, N) un espace vectoriel normé. X est dit *réflexif* si l'injection naturelle $J : X \to X''$ est surjective.

Remarque : Comme J est injective, on aura X réflexif si J est bijective.

Remarque : Tout (X, N) normé réflexif est Banach puisque :

$$\begin{aligned} E \text{ réflexif } &\implies E \text{ isométriquement isomorphe à } E'' \\ &\implies E \text{ complet (car } E'' \text{ complet)} \\ &\implies E \text{ Banach} \end{aligned}$$

Définition : Soit E un espace localement convexe. Considérons $J : E \to E''$. Alors E est dit :

- *semi-réflexif* si J est surjective.
- *réflexif* si J est surjective et continue.

Exemple : Tout $(X, (\cdot\,,\,\cdot))$ Hilbert est réflexif (par double application du thm. de représ. de Riesz).

Exemple : Tout L^p, $1 < p < +\infty$, est réflexif.

Exemple : Les espaces de suites c_0, ℓ^2, ℓ^∞ ne sont pas réflexifs.

Exemple : L'espace $C^0([0, 1])$ n'est pas réflexif.

Remarque : Pour certaines propriétés des espaces réflexifs, voir "2017-08-08 espace réflexif.txt".

3.28 Paire duale :

Remarque : Ici je suis de très près la page wiki :fr sur les paires duales. En même temps, c'est moi qui a écrit le plus gros de cette page...

Définition : Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$. Soit $B : E \times F \to \mathbb{K}$ une application bilinéaire. B induit deux applications linéaires :

$$E \to F^*; x \mapsto B(x, \cdot)$$

$$F \to E^*; y \mapsto B(\cdot, y)$$

B est dite :

1. *non dégénérée à gauche* (ou *injective à gauche*) si $E \to F^*$ est injective,
2. *non dégénérée à droite* (ou *injective à droite*) si $F \to E^*$ est injective,
3. *non dégénérée* si elle est non dégénérée à gauche et à droite.

Lorsque B est non dégénérée :

1. E et F sont dits *être en dualité* par B (ou encore être mis en dualité *séparante* par B).
2. on écrit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ au lieu de B.
3. le triple $(E, F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est nommé *paire duale*.
4. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est dit être un *appariement dual*.

Remarque : *Pairing*, en anglais, est *appariement*.

Remarque : Un exemple évident d'appariement de dualité est l'*accouplement de dualité* entre E et son dual algébrique E^* :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E^* \times E \to \mathbb{K}; (f, x) \mapsto \langle f, x \rangle := f(x)$$

On a donc une paire duale $(E^*, E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (peu intéressant). Un cas plus intéressant est la paire duale $(E', E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ pour E localement convexe et E' son dual topologique (voir les exemples plus bas).

Définition : ("définition") Soit $(E, F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une paire duale. Considérons les deux applications linéaires

$$E \to F^*; x \mapsto B(x, \cdot)$$

$$F \to E^*; y \mapsto B(\cdot, y)$$

induites par l'application bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La paire duale $(E, F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est dite :

1. *forte à gauche* si $E \to F^*$ est surjective,
2. *forte à droite* si $F \to E^*$ est surjective,
3. *forte* si elle est forte à gauche et à droite.

L'appariement dual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est dit *fort* lorsque $(E, F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est une paire duale forte.

Proposition : En dimension finie, toute paire duale est forte.

Preuve : Soit $(E, F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une paire duale. Alors on a deux injections $E \to F^*$ et $F^* \to E$. Alors $\dim(E) \leq \dim(F^*) = \dim(F)$ et $\dim(F) \leq \dim(E^*) = \dim(E)$. D'où $\dim(E) = \dim(F)$. D'où $E \cong F$. Les injections $E \to F^*$ et $F^* \to E$ sont donc surjectives. Donc $(E, F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est une paire duale forte. □

Proposition : En dimension infinie, aucune paire duale est forte.

Preuve : Soit $(E, F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une paire duale forte. Montrons que E et F sont de dimension finie. Comme la paire duale est forte, on a deux isomorphismes

$$\phi : E \to F^*; x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$$

$$\psi : F \to E^*; y \mapsto \langle \cdot, y \rangle$$

Puisque tout isomorphisme est inversible, on a aussi deux isomorphismes :

$$\phi^{-1} : F^* \to E; \beta \mapsto x_\beta \text{ t.q. } \beta(y) = \langle x_\beta, y \rangle, \ \forall y \in F$$

$$\psi^{-1} : E^* \to F; \alpha \mapsto y_\alpha \text{ t.q. } \alpha(x) = \langle x, y_\alpha \rangle, \ \forall x \in E$$

On considère alors les applications transposées (i.e. pull-back) de ces deux derniers isomorphismes

$$(\phi^{-1})^* : E^* \to (F^*)^*; (\phi^{-1})^*(\alpha) = \alpha \circ \phi^{-1}$$

$$(\psi^{-1})^* : F^* \to (E^*)^*; (\psi^{-1})^*(\beta) = \beta \circ \psi^{-1}$$

Ce sont deux isomorphismes. Considérons alors les deux isomorphismes suivants :

$$J_E : E \to (E^*)^*; J_E := (\psi^{-1})^* \circ \phi$$

$$J_F : F \to (F^*)^*; J_F := (\phi^{-1})^* \circ \psi$$

Pour $x \in E$, que vaut $J_E(x) \in (E^*)^*$? Soit $\alpha \in E^*$ quelconque. On calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
(J_E(x))(\alpha) &= (((\psi^{-1})^* \circ \phi)(x))(\alpha) \\
&= ((\psi^{-1})^*(\phi(x)))(\alpha) \\
&= ((\psi^{-1})^*\langle x, \cdot\rangle)(\alpha) \\
&= \langle x, \psi^{-1}(\,\cdot\,)\rangle(\alpha) \\
&= \langle x, \psi^{-1}(\alpha)\rangle \\
&= \langle x, y_\alpha\rangle \\
&= \alpha(x)
\end{aligned}$$

D'où :

$$(J_E(x))(\alpha) = \alpha(x)$$

C'est-à-dire, J_E est l'injection naturelle de E dans son bidual algébrique $(E^*)^*$. Mais l'injection naturelle J_E est surjective seulement si E est de dimension finie (voir Paul R. Halmos (1958), *Finite-dimensional vector spaces*). Puisqu'ici J_E est un isomorphisme, on en conclut que E est de dimension finie. De la même manière, on trouve :

$$(J_F(y))(\beta) = \beta(y)$$

et on conclut que F est aussi de dimension finie. D'où la paire duale forte $(E, F, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ est forcément de dimension finie. □

Remarque : Bref, la définition de *paire duale forte* semble inutile. En fait, elle n'a d'utilité qu'en tant que prototype de définition qui doit être adaptée en fonction du contexte (voir Abraham, Marsden et Ratiu (1988), *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, p. 103.). Voir l'exemple $(E', E, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ pour E localement convexe plus bas.

Définition : Soit E un espace vectoriel. Soit E^* sont dual algébrique. La paire duale $(E^*, E, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ donnée par :

$$\langle\cdot, \cdot\rangle : E^* \times E \to \mathbb{K}; (f, x) \mapsto \langle f, x\rangle := f(x)$$

est dit être l'*appariement naturel*. C'est-à-dire, l'appariement naturel est l'appariement dual correspondant à l'accouplement de dualité. (l'accouplement de dualité est un exemple particulier d'appariement de dualité).

Définition : Soit $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ une paire duale. Alors $x \in X$ et $y \in Y$ sont dits *orthogonaux* si $\langle x, y\rangle = 0$.

Définition : Soit $(X, Y, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ une paire duale. Soit $M \subset X$. Soit $N \subset Y$. Alors M et N sont dits *orthogonaux* si pour tous $x \in X$, $y \in Y$ on a $\langle x, y\rangle = 0$.

Exemple : (appariement naturel) Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Soit E^* son dual algébrique. Considérons le triple $(E^*, E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ où :

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle : E^* \times E &\to \mathbb{K}\\ (f, x) &\mapsto \langle f, x\rangle := f(x)\end{aligned}$$

Alors on a deux applications :

$$E^* \to E^*; f \mapsto \langle f, \cdot\rangle = f(\cdot)$$

$$E \to (E^*)^*; x \mapsto \langle\cdot, x\rangle =: J(x)(\cdot)$$

où J est l'injection naturelle de E dans son bidual algébrique $(E^*)^*$. La première application est bijective (c'est l'identité). La seconde application J_E est injective car le dual algébrique E^* de E sépare toujours E (en supposant l'axiome du choix vrai), i.e. pour tout $x \in E\backslash\{0\}$, il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) \neq 0$. Enfin, l'application J_E sera surjective si et seulement si E est de dimension finie (voir plus haut). Bref, $(E^*, E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est une paire duale et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un appariement dual dit *appariement naturel* (ou encore *accouplement de dualité*). Cette paire duale est forte si et seulement si E est de dimension finie.

Exemple : Soit $(E, F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ une paire duale. Alors on peut définir une nouvelle paire duale $(F, E, \langle\cdot,\cdot\rangle')$ où $\langle y, x\rangle' := \langle x, y\rangle$.

Exemple : Soit E un e.v.t. localement convexe. Soit E' son dual topologique. Considérons le triple $(E', E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ où :

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\cdot\rangle : E^* \times E &\to \mathbb{K}\\ (f, x) &\mapsto \langle f, x\rangle := f(x)\end{aligned}$$

Alors on a deux applications :

$$E' \to E^*; f \mapsto \langle f, \cdot \rangle = f(\cdot)$$

$$E \to (E')^*; x \mapsto \langle \cdot, x \rangle =: J(x)(\cdot)$$

La première application est injective et a pour image $E' < E^*$. Sa corestriction E' est donc l'identité

$$E' \to E'$$

La seconde application est :

$$J : E \to (E')^*; J(x)(f) = \langle f, x \rangle$$

Donné $x \in E$, l'application

$$J(x) : E' \to \mathbb{K}; f \mapsto J(x)(f) = \langle f, x \rangle$$

est continue pour la topologie $\sigma(E', E)$ sur E'. Elle est donc continue pour la topologie $\beta(E', E)$ (car $\beta(E', E)$ est plus fine que $\sigma(E', E)$). Donc $J(x) \in E''$. Donc $J(E) < E''$. En considérant la corestriction de J à $E'' < E^*$, on a alors une application

$$J : E \to E''$$

L'application J est-elle injective ? Soit $x \in E \backslash \{0\}$. Alors existe-t-il $f \in E'$ t.q. $\langle f, x \rangle \neq 0$? Oui, ceci découle de Hahn-Banach sur les espaces réflexifs (on prend $f : \mathbb{K}\langle x \rangle \to \mathbb{K}; f(x) = 1$ qu'on étend à tout E, voir plus bas). Cette application est-elle surjective sur E'' ? Seulement si E est semi-réflexif. Bref, au sens strict, $(E', E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est une paire duale faible. En considérant les corestrictions

$$E' \to E'$$

$$E \to E''$$

le triple $(E', E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est une paire duale forte si et seulement si E est semi-réflexif.

Remarque : Dire c'est quoi la topologie $\sigma(E', E)$ et la topologie $\beta(E', E)$. TO DO ! ! !

Exemple : Soit M une variété lisse réelle de dimension finie n. Soit $\Omega_c^k(M)$ l'espace des k-formes différentielles lisses à support compact sur M. Alors :

$$\begin{aligned} \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle : \Omega_c^k(M) \times \Omega_c^{n-k}(M) &\to \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\to \langle \alpha, \beta \rangle := \int_M \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

est un appariement dual (car injectif à gauche et à droite). Ce faisant, le triple

$$(\Omega_c^k(M), \Omega_c^{n-k}(M), \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$$

est une paire duale.

3.29 Théorème de Hahn-Banach :

Définition : (fonction convexe) TO DO ! ! !

Théorème : (*de Hahn-Banach analytique*) Soit E un espace vectoriel réel. Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe réelle. Soit $F < E$ un sous-espace vectoriel de E. Soit $f : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire (i.e. $f \in F^*$ le dual algébrique). Supposons

$$f(x) \leq p(x), \ \forall x \in F$$

Alors, il existe un prolongement linéaire g de f sur E t.q. :

$$g(x) \leq p(x), \ \forall x \in E$$

Preuve : TO DO ! ! ! □

Définition : (un convexe C en un e.v.t. E) TO DO ! ! !

Définition : (sous-espace affine) TO DO ! ! !

Définition : (sous-ensembles disjoints, sous-ensembles séparés, etc.) à mettre dans une éventuelle section sur la théorie des ensembles plus haut, TO DO ! ! !

Théorème : (*de Hahn-Banach géométrique*) Soit E un e.v.t.. Soit C un convexe ouvert non vide de E. Soit L un sous-espace affine de E qui est disjoint de C. Alors il existe un hyperplan affine qui contient L, qui est disjoint de C, qui est fermé.

Preuve : TO DO ! ! ! □

Corollaire : (du thm. d'Hahn-Banach analytique) Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit $F < E$ un sous-espace vectoriel de E. Soit $f \in F'$ une forme linéaire continue sur F. Alors on peut prolonger f à une forme linéaire continue $g \in E'$ sur E de même norme que f, i.e. :

$$g|_F = f$$
$$N(g) = N(f)$$

Preuve : Soit $f \in F'$. Comme f est continue, f est bornée, i.e. $N(f) < +\infty$. Considérons la fonction convexe $p(x) := N(f)N(x)$. Pour $x \in F$ quelconque, on sait que :

$$
\begin{aligned}
N(f) = \sup_{x\neq 0} \frac{|\langle f,x\rangle|}{N(x)} &\geq \frac{|\langle f,x\rangle|}{N(x)} \\
\implies N(f) &\geq \frac{|\langle f,x\rangle|}{N(x)} \\
\implies |\langle f,x\rangle| &\leq N(f)N(x) \\
\implies f(x) = \langle f,x\rangle &\leq |\langle f,x\rangle| \leq N(f)N(x) = p(x)
\end{aligned}
$$

D'où $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in F$. Par le théorème de Hahn-Banach analytique, il existe $g \in E^*$ tel que :

$$
\begin{aligned}
g|_F &= f \\
g(x) &\leq p(x), \quad \forall x \in E
\end{aligned}
$$

On vient donc de montrer que f s'étend à une fonctionnelle linéaire $g \in E^*$. Montrons que g est de même norme que f :

$$
\begin{aligned}
& g(x) \leq p(x) \\
& \implies |g(x)| \leq p(x) \quad \text{car } p(x) \text{ non négative} \\
& \implies |\langle g,x\rangle| \leq N(f)N(x) \\
& \implies \frac{|\langle g,x\rangle|}{N(x)} \leq N(f) \\
& \implies \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{|\langle g,x\rangle|}{N(x)} \leq N(f) \\
& \implies N(g) \leq N(f)
\end{aligned}
$$

D'où $N(g) \leq N(f)$. Mais g est une extension de f et donc $N(g) \geq N(f)$. D'où $N(g) = N(f)$. Enfin, $N(g) = N(f) < +\infty$, donc g est bornée, donc g est continue, donc $g \in E'$ le dual topologique. □

Corollaire : Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Soit $x \in E$. Alors il existe (au moins) un *élément conjugué dual* $f \in E'$ t.q. :

$$
\begin{aligned}
\langle f,x\rangle &= N(f)N(x) \\
N(f) &= N(x)
\end{aligned}
$$

Preuve : Si $x = 0$, on prend $f = 0$ et c'est terminé. Supposons $x \neq 0$. Considérons l'espace vectoriel $F = \mathbb{K}\langle x\rangle$ engendré par x. Sur F on prend $f \in F'$ tel que $f(x) \neq$

0. On peut choisir f tel que $N(f) = N(x)$. Ainsi $\langle f, x\rangle = f(x) = N(f)N(x)$. Par le dernier corollaire, on peut étendre f à $g \in E'$ t.q. $N(g) = N(f)$. On a alors $\langle g, x\rangle = N(g)N(x)$ et $N(g) = N(x)$. $\square$

3.30 E' sépare E :

Proposition : Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Alors le dual topologique E' sépare E, i.e. :

$$\forall x \in E\backslash\{0\},\ \exists f \in E',\ \text{ t.q. } f(x) \neq 0$$

Preuve : Soit $x \in E\backslash\{0\}$ quelconque. On considère l'espace vectoriel de dimension 1 engendré par x : Comme cet espace est de dimension finie, il y existe une forme linéaire (et continue) f telle que $f(x) = 1$. Par un des corollaires du théorème de Hahn-Banach, f s'étend à $g \in E'$ linéaire et continue. Donc il existe $g \in E'$ tel que $g(x) = 1 \neq 0$.

Remarque : La proposition est vraie pour E un e.v.t. localement convexe (et pas que le cas normé). Faire la preuve dans ce contexte plus général. TO DO ! ! !

Remarque : Soit E un e.v.t. localement convexe. À $x \in E$ il existe $f \in E'$ t.q. $f(x) \neq 0$. Ceci est utile pour montrer que le triple $(E', E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est une paire duale. En effet, comme E' sépare E, l'inclusion canonique J de E dans son bidual topologique E''

$$\begin{aligned} J : E &\to E'' \\ x &\mapsto J(x) \end{aligned}$$

où $J(x)(x) := f(x)$ est bel et bien une injection :

$$x \neq 0 \implies \exists f \in E' \text{ t.q. } f(x) \neq 0 \implies J(x)(f) = f(x) \neq 0 \implies J(x) \neq 0$$

4 Géométrie différentielle

4.1 Introduction :

Dans cette section je voudrais établir les principales définitions et les principaux théorèmes de géométrie différentielle. Pour l'instant je vais me contenter du théorème de Stokes.

4.2 Théorème de Stokes :

Théorème : (*de Stokes*) Soit M une variété différentielle orientée de dimension n. Soit $\alpha \in \Omega_c^{n-1}(M)$ une $(n-1)$-forme différentielle à support compact sur M de classe C^1. Alors :

$$\int_M \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial M} \iota^* \alpha$$

où d est la dérivée extérieure, ∂M est le bord de M, muni de l'orientation sortante, $\iota : \partial M \to M$ est l'injection canonique du bord de M en M.

Remarque : Ici je cite le théorème de Stokes énoncé sur wiki :fr. Si je le cite ici, c'est pour rappeler le fait que α doit être à support compact. Considérons les deux exemples suivants.

Exemple : $M = [0, 1]$, $\partial M = \{0, 1\}$, $\alpha = x$. Alors :

$$\int_M \mathrm{d}\alpha = \int_{[0,1]} \mathrm{d}x = 1$$

$$\int_{\partial M} \alpha = \int_{\{0,1\}} x = x|_0^1 = 1 - 0 = 1$$

Le théorème de Stokes est vérifié. Ici, α est à support compact car M est compacte.

Exemple : $M =]0, 1[$, $\partial M = \emptyset$, $\alpha = x$. Alors :

$$\int_M \mathrm{d}\alpha = \int_{]0,1[} \mathrm{d}x = 1$$

$$\int_{\partial M} \alpha = \int_{\emptyset} x = 0$$

Ici, le théorème de Stokes "échoue" car α n'est pas à support compact (son support est tout M qui n'est pas un compact).

Remarque : Il me faudra donc faire attention à la condition d'avoir α à support compact lorsque j'utilise le théorème de Stokes (et aussi à la condition d'avoir M orientable). Revenir sur les présentes réflexions plus bas quand je parlerai de la relation entre la codifférentielle δ et l'opérateur $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_g$-adjoint d' de la dérivée extérieure d.

Question : Il me semble que si je suis dans le contexte de l'exemple 1, j'aimerais pouvoir utiliser Stokes pareil, même si α n'est pas à support compact. Existe-t-il une manière simple de compactifier M pour utiliser Stokes lorsque α n'est pas à support compact ? Idéalement ça permettrait d'aller de l'exemple 1 à l'exemple 2 sans complications. Dans un contexte de $]0,1[\subset \mathbb{R}$ c'est facile, on prend la fermeture en $\mathbb{R}$. Mais pour une variété différentielle non compacte M qui n'est pas dans une variété ambiante, peut-être il y a des subtilités. Revenir là-dessus. TO DO ! ! !

5 Théorie de Lie

5.1 Groupe de Lie et algèbre de Lie :

Définition : Un *groupe de Lie* G est un groupe G qui est une variété lisse dont les actions à gauche et à droite sur lui-même sont différentiables.

Définition : L'*algèbre de Lie* $\text{Lie}(G)$ de G est l'ensemble des champs vectoriels invariants à gauche sur G, i.e. $(L_g)_*X = X$, muni du crochet de Lie.

Proposition : L'algèbre de Lie est isomorphe au tangent à l'identité T_eG muni du crochet de Lie.

Je parlerai donc du tangent à l'identité lorsqu'il sera question de l'algèbre de Lie de G. On dénote aussi $\text{Lie}(G)$ par $\mathfrak{g}$. Ainsi :

$$\mathfrak{g} := T_eG$$

Remarque : Toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est munie d'un crochet de Lie :

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

bilinéaire et antisymétrique qui vérifie l'identité de Jacobi :

$$0 = [\xi_1, [\xi_2, \xi_3]] + [\xi_2, [\xi_3, \xi_1]] + [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]], \quad \forall \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{g}$$

5.2 Action de groupe :

Définition : Soit X un ensemble et un homomorphisme

$$\Phi : G \to \mathrm{Aut}(X)$$

On dit alors que X est un *G-ensemble*. Ou encore que G agit sur X via l'*action de groupe* Φ.

Remarque : Ici j'utilise la notation $\mathrm{Aut}(X)$ même si X est juste un ensemble qui n'a pas forcément de "structure". Il serait donc peut-être préférable d'utiliser $\mathrm{Sym}(X)$, le groupe symétrique de X, i.e. des permutations de l'ensemble X, au lieu de $\mathrm{Aut}(X)$ le groupe des automorphismes de X.

Notation : On dénote par X^G l'ensemble des points G-invariants de X. C'est-à-dire, l'ensemble des points fixes de Φ.

Définition : Soit $x \in X$. L'*orbite de x* est le sous-ensemble

$$O_x := \{\Phi_g(x) | g \in G\} \subset X$$

Définition : Soit $x \in X$. Le *stabilisateur* de x est le sous-groupe

$$G_x := \mathrm{stab}_G(x) := \{g \in G | \Phi_g(x) = x\} < G$$

Définition : On dit que l'action Φ est *transitive* s'il n'y a qu'une seule orbite, i.e. si $\forall x, y \in X, \exists g \in G$ tel que $\Phi_G(x) = y$.

Proposition : Il y a une bijection entre G/G_x et O_x donnée par

$$[g] \mapsto \Phi_g(x)$$

Définition : L'action Φ est dite *libre* si :

$$G_x = \{e\}, \quad \forall x \in X$$

5.3 Quotient de groupe :

Soit $H < G$ un sous-groupe de G.

$$G/H := \{gH | g \in G\}$$

où

$$gH := \{gh | h \in H\}$$

On définit aussi

$$H\backslash G := \{Hg | g \in G\}$$

où

$$Hg := \{hg | h \in H\}$$

Rappel : G agit sur lui-même par la gauche et par la droite :

$$L : G \times G \to G; (g_1, g_2) \mapsto L_{g_1} g_2 = g_1 g_2$$

$$R : G \times G \to G; (g_1, g_2) \mapsto R_{g_1} g_2 = g_2 g_1$$

Ces deux actions sont évidemment transitives.

Remarque : Les actions L et R descendent respectivement aux actions

$$\tilde{L} : G \times G/H \to G/H; (g_1, g_2 H) \mapsto \tilde{L}_{g_1} g_2 H = (g_1 g_2) H$$

$$\tilde{R} : G \times H\backslash G \to H\backslash G; (g_1, H g_2) \mapsto \tilde{R}_{g_1} H g_2 = H(g_2 g_1)$$

Au vu de la définition de G/H et $H\backslash G$, ces deux dernières actions sont aussi transitives.

5.4 Représentation de groupe :

Définition : Pour G un groupe et V un espace vectoriel, une *représentation de G sur V* est un homomorphisme

$$\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$$

Remarque : Une représentation $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ induit une *représentation duale* :

$$\begin{aligned} \rho^* : G &\to \mathrm{Aut}(V^*) \\ g &\mapsto \rho^*(g) := (\rho(g))^* \end{aligned}$$

Proposition : Pour tout $g \in G$ et tout $\alpha \in V^*$ on a :

$$\rho^*(g)\alpha = \alpha \circ \rho(g^{-1})$$

Preuve : On calcule directement :

$$\rho^*(g)\alpha := (\rho(g))^*\alpha = \alpha \circ (\rho(g))^{-1} = \alpha \circ \rho(g^{-1})$$

□

Corollaire : On a :

$$\langle \rho^*(g)\alpha, v\rangle := \langle \alpha, \rho(g^{-1})v\rangle, \quad \forall g \in G, \alpha \in V^*, v \in V$$

$$\langle \rho^*(g)\alpha, \rho(g)v\rangle = \langle \alpha, v\rangle$$

Proposition : La représentation duale ρ^* est bel et bien un homomorphisme.

Preuve : On veut montrer que $\rho^*(g_1)\rho^*(g_2) = \rho^*(g_1g_2)$. On calcule directement :

$$\begin{aligned} (\rho^*(g_1)\rho^*(g_2))\alpha &= \rho^*(g_1)(\rho^*(g_2)\alpha) \\ &= \rho^*(g_1)(\alpha \circ \rho(g_2^{-1})) \\ &= \alpha \circ \rho(g_2^{-1}) \circ \rho(g_1^{-1}) \\ &= \alpha \circ \rho(g_2^{-1}g_1^{-1}) \\ &= \alpha \circ \rho((g_1g_2)^{-1}) \\ &= \rho^*(g_1g_2)\alpha \end{aligned}$$

□

Remarque : De même, ρ induit une représentation sur les tensorisations $V^m \otimes (V^*)^n$:

$$\rho \otimes ... \otimes \rho \otimes \rho^* \otimes ... \otimes \rho^* : G \to \mathrm{Aut}(V^m \otimes (V^*)^n)$$

Remarque : La *représentation infinitésimale duale* (ou *duale infinitésimale*) est donnée par

$$\langle (\rho^*)_*(A)\alpha, v\rangle = \langle (\rho_*)^*(A)\alpha, v\rangle = \langle \alpha, \rho_*(-A)v\rangle$$

pour $A \in \mathfrak{g}$.

5.5 Automorphisme intérieur $\iota : G \to \mathrm{Aut}(G)$:

Définition : Soit G un groupe. Alors l'homomorphisme

$$\iota : G \to \mathrm{Aut}(G); \quad \iota_g(h) := ghg^{-1}$$

est dit être l'*automorphisme intérieur sur* G. Pour tout $g \in G$, on a alors

$$\iota_g : G \to G; \quad h \mapsto ghg^{-1}$$

Proposition : $\iota_g(e) = e, \ \forall g \in G.$

Preuve : $\iota_g(e) = geg^{-1} = gg^{-1} = e.$ □

Proposition : $\iota_{g_1 g_2} = \iota_{g_1} \circ \iota_{g_2}, \ \forall g_1, g_2 \in G.$

Preuve : Pour $g_3 \in G$ quelconque on trouve :

$$\begin{aligned}
\iota_{g_1 g_2}(g_3) &= (g_1 g_2) g_3 (g_1 g_2)^{-1} \\
&= g_1 g_2 g_3 g_2^{-1} g_1^{-1} \\
&= \iota_{g_1}(g_2 g_3 g_2^{-1}) \\
&= \iota_{g_1}(\iota_{g_2}(g_3)) \\
&= (\iota_{g_1} \circ \iota_{g_2})(g_3)
\end{aligned}$$

□

5.6 Représentation adjointe $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$:

Définition : L'homomorphisme

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$$

dit *représentation adjointe de G sur* $\mathfrak{g}$ est défini via l'isomorphisme

$$\mathrm{Ad}_g := (\iota_g)_*|_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

Proposition : Si G est un groupe de Lie matriciel, $\mathrm{Ad}_g\xi = g\xi g^{-1}$ pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$ et $g \in G$.

Preuve : Soit $g(t)$ une courbe en G telle que $g(0) = e$ et $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t) = \xi$. Alors pour un $g \in G$ quelconque :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_g\xi &= (\iota_g)_*|_e(\xi) \\
&= (\iota_g)_*|_e \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t) \right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \big(\iota_g g(t)\big) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(g g(t) g^{-1}\right) \\
&= g \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t) \right) g^{-1} \\
&= g\xi g^{-1}
\end{aligned}$$

□

Proposition : La représentation adjointe $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est un homomorphisme de groupes :

$$\mathrm{Ad}_{g_1 g_2} = \mathrm{Ad}_{g_1} \circ \mathrm{Ad}_{g_2}, \ \forall g_1, g_2 \in G$$

Preuve : En utilisant la dernière proposition on trouve directement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_{g_1g_2} &= (\iota_{g_1g_2})_*|_e \\
&= (\iota_{g_1}\circ\iota_{g_2})_*|_e \\
&= \big((\iota_{g_1})_*\circ(\iota_{g_2})_*\big)\,|_e \\
&= \big((\iota_{g_1})_*|_e\big)\circ\big((\iota_{g_2})_*|_e\big) \\
&= \mathrm{Ad}_{g_1}\circ\mathrm{Ad}_{g_2}
\end{aligned}$$

□

Corollaire : $(\mathrm{Ad}_g)^{-1} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}},\ \forall g\in G.$

Preuve : Il suffit de montrer que $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}$ est bel et bien l'inverse de Ad_g. On vérifie directement :

$$\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\mathrm{Ad}_g = \mathrm{Ad}_{g^{-1}g} = \mathrm{Ad}_e = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$$
$$\mathrm{Ad}_g\mathrm{Ad}_{g^{-1}} = \mathrm{Ad}_{gg^{-1}} = \mathrm{Ad}_e = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$$

□

Proposition : $\mathrm{Ad}_{g_1}\circ\mathrm{Ad}_{g_2}\circ\mathrm{Ad}_{g_1^{-1}} = \mathrm{Ad}_{\iota_{g_1}g_2},\ \forall g_1,g_2\in G.$

Preuve : $\mathrm{Ad}_{g_1}\circ\mathrm{Ad}_{g_2}\circ\mathrm{Ad}_{g_1^{-1}} = \mathrm{Ad}_{g_1g_2g_1^{-1}} = \mathrm{Ad}_{\iota_{g_1}g_2}.$ □

Proposition : Le crochet de Lie est Ad-équivariant au sens où :

$$\mathrm{Ad}_g[\xi_1,\xi_2] = [\mathrm{Ad}_g\xi_1,\mathrm{Ad}_g\xi_2],\ \forall g\in G,\ \xi_1,\xi_2\in\mathfrak{g}$$

Preuve : Si G est un groupe de Lie matriciel, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_g[\xi_1,\xi_2] &= g(\xi_1\xi_2-\xi_2\xi_1)g^{-1} \\
&= g\xi_1\xi_2g^{-1} - g\xi_2\xi_1g^{-1} \\
&= g\xi_1g^{-1}g\xi_2g^{-1} - g\xi_2g^{-1}g\xi_1g^{-1} \\
&= (\mathrm{Ad}_g\xi_1)(\mathrm{Ad}_g\xi_2) - (\mathrm{Ad}_g\xi_2)(\mathrm{Ad}_g\xi_1) \\
&= [\mathrm{Ad}_g\xi_1,\mathrm{Ad}_g\xi_2]
\end{aligned}$$

Le cas général est aussi vérifié en utilisant le fait que $\mathrm{Ad}_g = (\iota_g)_*|_e$ est un *push-forward* et entre donc dans le crochet (de Lie) $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$. □

Corollaire : $[\mathrm{Ad}_g\xi_1, \xi_2] = \mathrm{Ad}_g[\xi_1, \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi_2],\ \forall g \in G,\ \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}.$

Preuve : Découle directement de la dernière proposition. □

5.7 Représentation coadjointe duale $\mathrm{Ad}^* : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^*)$:

Soit $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$. On a un *appariement de dualité* (alias *pairing*) entre $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{g}$ naturel donné par l'évaluation

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} &\to \mathbb{R} \\ (\alpha, \xi) &\mapsto \langle \alpha, \xi \rangle := \alpha(\xi) \end{aligned}$$

Définition : L'homomorphisme

$$\mathrm{Ad}^* : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^*)$$

dit *représentation coadjointe de G sur* $\mathfrak{g}^*$ est défini implicitement par

$$\langle \mathrm{Ad}^*_g \alpha, \xi \rangle = \langle \alpha, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \xi \rangle, \quad \forall g \in G, \xi \in \mathfrak{g}, \alpha \in \mathfrak{g}^*$$

Remarque : On prend g^{-1} pour que Ad^* soit un homomorphisme et non un anti-homomorphisme.

Proposition : $\mathrm{Ad}^*_{g_1 g_2} = \mathrm{Ad}^*_{g_1} \mathrm{Ad}^*_{g_2}$, $\forall g_1, g_2 \in G$.

Preuve : Pour $\xi \in \mathfrak{g}$ et $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ quelconques, on trouve directement :

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Ad}^*_{g_1 g_2} \alpha, \xi \rangle &= \langle \alpha, \mathrm{Ad}_{(g_1 g_2)^{-1}} \xi \rangle \\ &= \langle \alpha, \mathrm{Ad}_{g_2^{-1} g_1^{-1}} \xi \rangle \\ &= \langle \alpha, \mathrm{Ad}_{g_2^{-1}} \mathrm{Ad}_{g_1^{-1}} \xi \rangle \\ &= \langle \alpha, \mathrm{Ad}_{g_2^{-1}} (\mathrm{Ad}_{g_1^{-1}} \xi) \rangle \\ &= \langle \mathrm{Ad}^*_{g_2} \alpha, \mathrm{Ad}_{g_1^{-1}} \xi \rangle \\ &= \langle \mathrm{Ad}^*_{g_1} (\mathrm{Ad}^*_{g_2} \alpha), \xi \rangle \\ &= \langle (\mathrm{Ad}^*_{g_1} \circ \mathrm{Ad}^*_{g_2}) \alpha, \xi \rangle \end{aligned}$$

$\square$

5.8 Représentation adjointe $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$:

Définition : La *représentation adjointe de* $\mathfrak{g}$ *sur* $\mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : \mathfrak{g} &\to \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \\ \xi &\mapsto \mathrm{ad}_\xi \end{aligned}$$

est par définition

$$\mathrm{ad} := \mathrm{Ad}_*|_e : T_e G \to T_{\mathrm{Id}_\mathfrak{g}} \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$$

Remarque : On a une G-action de groupe sur $\mathfrak{g}$ via Ad. À $\xi \in \mathfrak{g}$ correspond le champ vectoriel fondamental $\xi^* = \mathrm{ad}_\xi \in \mathfrak{X}(\mathfrak{g})$ sur $\mathfrak{g}$.

Proposition : $\mathrm{Ad}_{\exp} = \exp \circ \mathrm{ad}$.

Preuve : Plus généralement, si $f : G \to H$ est un homomorphisme de groupes de Lie, alors $f_*|_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ vérifie $f \circ \exp = \exp \circ f_*|_e$. En prenant $H = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{h} = \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, $f = \mathrm{Ad}$, $f_*|_e = \mathrm{ad}$, on a ce qu'on cherche. □

Proposition : L'évaluation du champ vectoriel $\mathrm{ad}_{\xi_1} \in \mathfrak{X}(\mathfrak{g})$ en $\xi_2 \in \mathfrak{g}$ est donnée par :

$$\mathrm{ad}_{\xi_1}|_{\xi_2} = \mathrm{ad}_{\xi_1}(\xi_2) = [\xi_1, \xi_2]$$

Ici, ξ_1 et ξ_2 sont, dans les trois premiers membres, en $\mathfrak{g}$ et sont, dans le dernier membre, vus comme champ vectoriel invariant à gauche sur G.

Preuve : On montre d'abord la première égalité :

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_{\xi_1}|_{\xi_2} &= \xi_1^*|_{\xi_2} \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\exp(t\xi_1)}\xi_2 \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(\mathrm{ad}_{t\xi_1})\xi_2 \\ &= \mathrm{ad}_{\xi_1}\xi_2 \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{\xi_1}(\xi_2) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\exp(t\xi_1)}\xi_2 \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(t\xi_1)\xi_2\exp(-t\xi_1) \\
&= \xi_1 \circ \xi_2 - \xi_2 \circ \xi_1 \\
&= [\xi_1, \xi_2]
\end{aligned}$$

□

Proposition : Le crochet de Lie est ad-adapté au sens où

$$\mathrm{ad}_{\xi_1}[\xi_2, \xi_3] = [\mathrm{ad}_{\xi_1}\xi_2, \xi_3] + [\xi_2, \mathrm{ad}_{\xi_1}\xi_3], \ \forall \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{g}$$

Preuve : Comme ad = Ad$_*$ on applique la règle de Leibniz sur la dérivée par t de $\mathrm{Ad}_{g(t)}[\xi_2, \xi_3] = [\mathrm{Ad}_{g(t)}\xi_2, \mathrm{Ad}_{g(t)}\xi_3]$ en $t = 0$ pour une courbe $g(t)$ en G telle que $g(0) = e$ et $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t) = \xi_1$. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{\xi_1}[\xi_2, \xi_3] &= (\mathrm{Ad}_*|_e(\xi_1))([\xi_2, \xi_3]) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\mathrm{Ad}_{g(t)}[\xi_2, \xi_3]\right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} [\mathrm{Ad}_{g(t)}\xi_2, \mathrm{Ad}_{g(t)}\xi_3] \\
&= [\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{g(t)}\xi_2, \mathrm{Ad}_{g(0)}\xi_3] + [\mathrm{Ad}_{g(0)}\xi_2, \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{g(t)}\xi_3] \\
&= [(\mathrm{Ad}_*|_e\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t)\right))\xi_2, \mathrm{Ad}_e\xi_3] + [\mathrm{Ad}_e\xi_2, (\mathrm{Ad}_*|_e\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t)\right))\xi_3] \\
&= [(\mathrm{Ad}_*|_e(\xi_1))\xi_2, \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\xi_3] + [\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\xi_2, (\mathrm{Ad}_*|_e(\xi_1))\xi_3] \\
&= [\mathrm{ad}_{\xi_1}\xi_2, \xi_3] + [\xi_2, \mathrm{ad}_{\xi_1}\xi_3]
\end{aligned}$$

Ou encore, une autre manière de montrer l'égalité recherchée $\mathrm{ad}_{\xi_1}[\xi_2, \xi_3] = [\mathrm{ad}_{\xi_1}\xi_2, \xi_3] + [\xi_2, \mathrm{ad}_{\xi_1}\xi_3]$ est d'utiliser l'*identité de Jacobi* sur la somme cyclique des crochets :

$$0 = [\xi_1, [\xi_2, \xi_3]] + [\xi_2, [\xi_3, \xi_1]] + [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]]$$

□

Corollaire : $[\mathrm{ad}_\xi\cdot\,,\,\cdot\,] = \mathrm{ad}_\xi[\,\cdot\,,\,\cdot\,] - [\,\cdot\,,\mathrm{ad}_\xi\cdot\,]$.

Preuve : Découle directement de la dernière proposition. □

Proposition : $\mathrm{Ad}_g\circ\mathrm{ad}_\xi\circ\mathrm{Ad}_{g^{-1}} = \mathrm{ad}_{\mathrm{Ad}_g\xi},\ \forall g\in G,\ \xi\in\mathfrak{g}$.

Preuve : Soient $g\in G$, $\xi_1,\xi_2\in\mathfrak{g}$ quelconques. Si G est un groupe de Lie matriciel, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ad}_g\circ\mathrm{ad}_{\xi_1}\circ\mathrm{Ad}_{g^{-1}})(\xi_2) &= \mathrm{Ad}_g(\mathrm{ad}_{\xi_1}(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\xi_2)))\\
&= \mathrm{Ad}_g(\mathrm{ad}_{\xi_1}(g^{-1}\xi_2 g))\\
&= \mathrm{Ad}_g([\xi_1, g^{-1}\xi_2 g])\\
&= [\mathrm{Ad}_g(\xi_1),\mathrm{Ad}_g(g^{-1}\xi_2 g)]\\
&= [\mathrm{Ad}_g(\xi_1), gg^{-1}\xi_2 gg^{-1}]\\
&= [\mathrm{Ad}_g(\xi_1),\xi_2]\\
&= \mathrm{ad}_{\mathrm{Ad}_g\xi_1}(\xi_2)
\end{aligned}$$

Montrons le cas générique. Souvenons-nous de l'égalité $\mathrm{Ad}_{g_1}\circ\mathrm{Ad}_{g_2}\circ\mathrm{Ad}_{g_1^{-1}} = \mathrm{Ad}_{\iota_{g_1}g_2},\ \forall g_1,g_2\in G$. Considérons une courbe $g(t)$ en G telle que $g(0)=e$ et $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t)=\xi_1$. On calcule directement :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Ad}_g\circ\mathrm{ad}_{\xi_1}\circ\mathrm{Ad}_{g^{-1}})(\xi_2) &= \mathrm{Ad}_g(\mathrm{ad}_{\xi_1}(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\xi_2)))\\
&= \mathrm{Ad}_g(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{Ad}_{g(t)}(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\xi_2)))\\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{Ad}_g(\mathrm{Ad}_{g(t)}(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\xi_2)))\\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\mathrm{Ad}_{gg(t)g^{-1}}\xi_2)\\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\mathrm{Ad}_{\iota_g g(t)}\xi_2)\\
&= \mathrm{ad}_{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\iota_g g(t)}\xi_2\\
&= \mathrm{ad}_{(\iota_g)_*|_e\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}g(t)}\xi_2\\
&= \mathrm{ad}_{\mathrm{Ad}_g\xi_1}\xi_2
\end{aligned}$$

□

Proposition : La représentation adjointe $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ est un homomorphisme d'algèbres :

$$\mathrm{ad}_{[\xi_1,\xi_2]} = [\mathrm{ad}_{\xi_1}, \mathrm{ad}_{\xi_2}]$$

Preuve : Soient $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{g}$ quelconques. En utilisant l'identité de Jacobi, on trouve directement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{[\xi_1,\xi_2]}\xi_3 &= [[\xi_1, \xi_2], \xi_3] \\
&= -[[\xi_2, \xi_3], \xi_1] - [[\xi_3, \xi_1], \xi_2] \\
&= [\xi_1, [\xi_2, \xi_3]] - [\xi_2, [\xi_1, \xi_3]] \\
&= \mathrm{ad}_{\xi_1}\mathrm{ad}_{\xi_2}\xi_3 - \mathrm{ad}_{\xi_2}\mathrm{ad}_{\xi_1}\xi_3 \\
&= (\mathrm{ad}_{\xi_1} \circ \mathrm{ad}_{\xi_2} - \mathrm{ad}_{\xi_2} \circ \mathrm{ad}_{\xi_1})\xi_3 \\
&= [\mathrm{ad}_{\xi_1}, \mathrm{ad}_{\xi_2}]\xi_3
\end{aligned}$$

□

Remarque : On peut définir la structure d'algèbre $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g} := T_eG$ à partir de la représentation adjointe ad comme :

$$[\xi_1, \xi_2] := \mathrm{ad}_{\xi_1}(\xi_2)$$

5.9 Représentation coadjointe duale $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$:

De la représentation adjointe

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$$

de $\mathfrak{g}$ on peut définir l'homomorphisme d'algèbres

$$\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$$

dit *représentation coadjointe de* $\mathfrak{g}$ *sur* $\mathfrak{g}^*$ comme l'opérateur adjoint de $-\mathrm{ad}$:

$$\langle \mathrm{ad}^*_{\xi_1}\alpha, \xi_2\rangle = \langle \alpha, -\mathrm{ad}_{\xi_1}\xi_2\rangle, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}, \ \alpha \in \mathfrak{g}^*$$

Proposition : On peut exprimer ad^* depuis $\mathrm{Ad}^* : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^*)$ comme :

$$\mathrm{ad}^* = (\mathrm{Ad}^*)_*|_e : T_eG \to T_{\mathrm{Id}_\mathfrak{g}}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^*)$$

Preuve : Soit $g_t = \exp(t\xi_1)$ pour $\xi_1 \in \mathfrak{g}$. Soient $\eta \in \mathfrak{g}^*$ et $\xi_2 \in \mathfrak{g}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\langle ((\mathrm{Ad}^*)_*|_e(\xi_1))\eta, \xi_2\rangle &= \langle ((\mathrm{Ad}^*)_*|_e(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(t\xi_1)))\eta, \xi_2\rangle \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \langle \mathrm{Ad}^*_{\exp(t\xi_1)}\eta, \xi_2\rangle \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \langle \eta, \mathrm{Ad}_{\exp(-t\xi_1)}\xi_2\rangle \\
&= \langle \eta, \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\exp(-t\xi_1)}\xi_2\rangle \\
&= \langle \eta, \mathrm{Ad}_*|_e(-\xi_1)\xi_2\rangle \\
&= \langle \eta, -\mathrm{ad}_{\xi_1}\xi_2\rangle \\
&= \langle \mathrm{ad}^*_{\xi_1}\eta, \xi_2\rangle
\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{ad}^* = (\mathrm{Ad}^*)_*|_e$. □

Remarque : Pour $\xi \in \mathfrak{g}$, ad^*_ξ est le champ vectoriel fondamental ξ^* sur $\mathfrak{g}^*$ donné par la représentation coadjointe Ad^*. C'est-à-dire,

$$\mathrm{ad}^*_\xi \in \mathfrak{X}(\mathfrak{g}^*)$$

En particulier,

$$\mathrm{ad}^*_\xi|_\eta \in T_\eta\mathfrak{g}^*$$

et

$$\mathrm{ad}^*_\xi(\eta) \in \mathfrak{g}^*$$

peuvent être vus comme équivalents en associant $T_\eta\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{g}^*$.

5.10 Forme de Killing et algèbre de Lie semi-simple :

Définition : La *forme de Killing* est par définition :

$$\begin{aligned} K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\to \mathbb{R} \\ (\xi_1, \xi_2) &\mapsto K(\xi_1, \xi_2) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\xi_1} \circ \mathrm{ad}_{\xi_2}) \end{aligned}$$

Proposition : K est Ad-invariant :

$$K(\mathrm{Ad}_g A, \mathrm{Ad}_g B) = K(A, B), \quad \forall g \in G, A, B \in \mathfrak{g}$$

Preuve : On calcule directement

$$\begin{aligned} K(\mathrm{Ad}_g A, \mathrm{Ad}_g B) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\mathrm{Ad}_g A} \mathrm{ad}_{\mathrm{Ad}_g B}) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}_g \mathrm{ad}_A \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \mathrm{Ad}_g \mathrm{ad}_B \mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}_g \mathrm{ad}_A \mathrm{ad}_B \mathrm{Ad}_{g^{-1}}) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_A \mathrm{ad}_B) \\ &= K(A, B) \end{aligned}$$

□

Proposition : $K([\xi_1, \xi_2], \xi_3) = K(\xi_1, [\xi_2, \xi_3])$, $\forall \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{g}$.

Preuve : En utilisant le fait que $\mathrm{ad}_{[\xi_1,\xi_2]} = [\mathrm{ad}_{\xi_1}, \mathrm{ad}_{\xi_2}]$ pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$, on calcule directement :

$$\begin{aligned} K([\xi_1, \xi_2], \xi_3) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{[\xi_1,\xi_2]} \circ \mathrm{ad}_{\xi_3}) \\ &= \mathrm{Tr}([\mathrm{ad}_{\xi_1}, \mathrm{ad}_{\xi_2}] \circ \mathrm{ad}_{\xi_3}) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\xi_1} \circ \mathrm{ad}_{\xi_2} \circ \mathrm{ad}_{\xi_3}) - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\xi_2} \circ \mathrm{ad}_{\xi_1} \circ \mathrm{ad}_{\xi_3}) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\xi_1} \circ \mathrm{ad}_{\xi_2} \circ \mathrm{ad}_{\xi_3}) - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\xi_1} \circ \mathrm{ad}_{\xi_3} \circ \mathrm{ad}_{\xi_2}) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\xi_1} \circ [\mathrm{ad}_{\xi_2}, \mathrm{ad}_{\xi_3}]) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\xi_1} \circ \mathrm{ad}_{[\xi_2,\xi_3]}) \\ &= K(\xi_1, [\xi_2, \xi_3]) \end{aligned}$$

□

Corollaire : $K([\xi_1, \xi_2], \xi_2) = 0, \ \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$.

Preuve : En utilisant la dernière proposition :

$$K([\xi_1, \xi_2], \xi_2) = K(\xi_1, [\xi_2, \xi_2]) = K(\xi_1, 0) = 0$$

□

Définition : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (je suppose toujours sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$. Alors :

- $\mathfrak{h}$ est dit être une *sous-algèbre de Lie* de $\mathfrak{g}$ si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] < \mathfrak{h}$, i.e. si elle est fermée pour le crochet.
- $\mathfrak{h}$ est dit être un *idéal* de $\mathfrak{g}$ si de plus $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] < \mathfrak{h}$.

Remarque : Ici les crochets dénotent plus spécifiquement le span des crochets, i.e. :

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = \mathbb{K}\langle [\xi_1, \xi_2] : \xi_1 \in \mathfrak{g}_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}_2 \rangle$$

où $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition : $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est un idéal en $\mathfrak{g}$.

Preuve : D'abord, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ car est un span linéaire. Donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] < \mathfrak{g}$. Donc $[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{g}] < [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est un idéal en $\mathfrak{g}$. □

Définition : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Alors :

- $\mathfrak{g}$ est dit être *simple* si $\mathfrak{g}$ est non abélienne et si les seuls idéaux de $\mathfrak{g}$ sont $\{0\}$ et $\mathfrak{g}$.
- $\mathfrak{g}$ est dit être *semi-simple* si $\mathfrak{g}$ est une somme directe d'algèbres de Lie simples.

Proposition : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple. Alors $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Preuve : Soit $\mathfrak{g}$ simple. Par la dernière proposition, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est un idéal en $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{g}$ est simple, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est soit $\{0\}$ soit $\mathfrak{g}$. Mais $\mathfrak{g}$ est non abélien car simple. Donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. □

Proposition : Soit $\mathfrak{g}$ semi-simple. Alors $\mathfrak{g}$ est simple.

Preuve : Évident. □

Proposition : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple. Alors $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Preuve : Soit $\mathfrak{g}$ semi-simple. Alors $\mathfrak{g}$ se décompose en somme directe $\mathfrak{g} = \oplus_i \mathfrak{g}_i$ où les $\mathfrak{g}_i$ sont des idéaux tels que $[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j] = \delta_{i,j}\mathfrak{g}_i$. Ainsi,

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = [\oplus_i \mathfrak{g}_i, \oplus_j \mathfrak{g}_j] = \oplus_i \oplus_j [\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j] = \oplus_i \oplus_j \delta_{i,j}\mathfrak{g}_i = \oplus_i \mathfrak{g}_i = \mathfrak{g}$$

□

Définition : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Posons $\mathfrak{g}^{(k+1)} := [\mathfrak{g}^{(k)},\mathfrak{g}^{(k)}]$, où $\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}$, la *série dérivée* de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{g}$ est dite *résoluble* s'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$.

Proposition : Soit $\mathfrak{g}$ semi-simple. Alors $\mathfrak{g}$ n'est pas résoluble.

Preuve : Soit $\mathfrak{g}$ semi-simple. Par la dernière proposition, $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Par induction on trouve $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathfrak{g}$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathfrak{g}^{(k)} \neq \{0\}$. D'où $\mathfrak{g}$ non résoluble. □

Proposition : *(critère de Cartan)* : Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie sur un corps de caractéristique 0 (e.g. sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est résoluble si et seulement si $K(\mathfrak{g},[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0$, où K est la forme de Killing.

Preuve : TO DO ! ! ! □

Proposition : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Supposons $\mathfrak{g}$ simple. Alors K est non dégénérée sur $\mathfrak{g}$.

Preuve : Soit $\mathfrak{h} := \{\xi \in \mathfrak{g} : K(\xi,\cdot) = 0\}$. Montrons que $\mathfrak{h}$ est un idéal en $\mathfrak{g}$, i.e. montrons que pour $\xi_1 \in \mathfrak{h}$ et $\xi_2 \in \mathfrak{g}$ on a $[\xi_1,\xi_2] \in \mathfrak{h}$. Ceci découle du fait que :

$$K([\xi_1,\xi_2],\cdot) = K(\xi_1,[\xi_2,\cdot]) = 0$$

Maintenant, $\mathfrak{g}$ est simple, donc $\mathfrak{h}$ est soit $\{0\}$ soit $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{h}$ est $\{0\}$, alors K est non dégénérée sur $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$, alors K est nul sur $\mathfrak{g}$. Donc, par le critère de Cartan, $\mathfrak{g}$ est résoluble. Mais $\mathfrak{g}$ est simple, donc non résoluble, ce qui est une contradiction. D'où le fait que K est non dégénérée sur $\mathfrak{g}$. □

Proposition : Soit $\mathfrak{g}$ semi-simple. Alors K est non dégénérée sur $\mathfrak{g}$.

Preuve : Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple, alors $\mathfrak{g}$ est une somme directe d'algèbres simples. Mais K est non dégénérée sur chacune de ces algèbres simples. Donc K est non dégénérée sur la somme directe $\mathfrak{g}$. $\square$

5.11 Groupes $\mathrm{U}(2)$ et $\mathrm{SU}(2)$:

Définition : Les groupes $\mathrm{U}(2)$ et $\mathrm{SU}(2)$ sont définis par :

$$\mathrm{U}(2) = \{g \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{C}) | g^\dagger g = 1\}$$

$$\mathrm{SU}(2) = \{g \in \mathrm{U}(2) | \det(g) = 1\}$$

Proposition : Les algèbres de Lie $\mathfrak{u}(2)$ et $\mathfrak{su}(2)$ de $\mathrm{U}(2)$ et $\mathrm{SU}(2)$ sont respectivement :

$$\mathfrak{u}(2) = \{g \in \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{C}) | g^\dagger + g = 0\}$$

$$\mathfrak{su}(2) = \{g \in \mathfrak{u}(2) | \mathrm{Tr}(g) = 0\}$$

C'est-à-dire, les matrices anti-hermitiennes forment une base de $\mathfrak{u}(2)$ et celles anti-hermitiennes qui sont de plus de trace nulle forment une base de $\mathfrak{su}(2)$.

Définition : Les "quatre" matrices de Pauli sont par définition :

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Remarque : La première matrice est la matrice identité et n'est usuellement pas définie comme étant une matrice de Pauli.

Proposition : Les algèbres de Lie $\mathfrak{u}(2)$, $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{gl}(2,2;\mathbb{C}) = \mathrm{Mat}(2,2;\mathbb{C})$ peuvent respectivement s'écrire en base vectorielle :

$$\mathfrak{u}(2) = \mathbb{R}\langle i\sigma_0, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\rangle$$

$$\mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}\langle i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\rangle$$

$$\mathfrak{gl}(2,2;\mathbb{C}) = \mathbb{R}\langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, i\sigma_0, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\rangle = \mathbb{C}\langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\rangle$$

Si on pose $x_k := i\sigma_k$ et $t_k = -x_k/2 = \sigma_k/(2i)$, pour $k = 0, 1, 2, 3$, alors :

$$\mathfrak{u}(2) = \mathbb{R}\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle = \mathbb{R}\langle t_0, t_1, t_2, t_3\rangle$$

$$\mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}\langle x_1, x_2, x_3\rangle = \mathbb{R}\langle t_1, t_2, t_3\rangle$$

$$\mathfrak{gl}(2,2;\mathbb{C}) = \mathbb{C}\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle = \mathbb{C}\langle t_0, t_1, t_2, t_3\rangle$$

Remarque : La composition des matrices de Pauli σ_k (resp. des x_k et des t_k) est donnée par :

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = i\sigma_3 \qquad \sigma_2 \circ \sigma_3 = i\sigma_1 \qquad \sigma_3 \circ \sigma_1 = i\sigma_2$$

$$x_1 \circ x_2 = -x_3 \qquad x_2 \circ x_3 = -x_1 \qquad x_3 \circ x_1 = -x_2$$

$$t_1 \circ t_2 = t_3/2 \qquad t_2 \circ t_3 = t_1/2 \qquad t_3 \circ t_1 = t_2/2$$

La permutation des matrices vérifie :

$$\sigma_i \circ \sigma_j = -\sigma_j \circ \sigma_i$$

$$x_i \circ x_j = -x_j \circ x_i$$

$$t_i \circ t_j = -t_j \circ t_i$$

Le crochet des matrices est donné par :

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3 \qquad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1 \qquad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2$$

$$[x_1, x_2] = -2x_3 \qquad [x_2, x_3] = -2x_1 \qquad [x_3, x_1] = -2x_2$$

$$[t_1, t_2] = t_3 \qquad [t_2, t_3] = t_1 \qquad [t_3, t_1] = t_2$$

Proposition : Pour $\mathfrak{su}(2)$, la forme de Killing $K(\xi_1, \xi_2) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\xi_1} \circ \mathrm{ad}_{\xi_2})$ est définie négative et vérifie :

$$K(\xi_1, \xi_2) = 4\mathrm{Tr}(\xi_1 \circ \xi_2), \qquad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{su}(2)$$

Preuve : On a vu plus haut que $\mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}\langle x_1, x_2, x_3\rangle$. Puisque $\mathfrak{su}(2)$ est un espace vectoriel réel de dimension 3 en base x_1, x_2, x_3, on peut voir ces matrices complexes de taille 2×2 comme vecteurs réels de l'espace tridimensionnel :

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dans cette base, les matrices réelles de taille 3×3 correspondantes aux endomorphismes ad_{x_1}, ad_{x_2} et ad_{x_3} sont données par :

$$\mathrm{ad}_{x_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{ad}_{x_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{ad}_{x_3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On remarque alors que :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{x_1} \circ \mathrm{ad}_{x_1}) = -8 \qquad \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{x_2} \circ \mathrm{ad}_{x_2}) = -8 \qquad \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{x_3} \circ \mathrm{ad}_{x_3}) = -8$$

La forme de Killing est donc définie négative. Maintenant, un simple calcul montre qu'en tant que matrices complexes 2x2 :

$$\mathrm{Tr}(x_1 \circ x_1) = -2 \qquad \mathrm{Tr}(x_2 \circ x_2) = -2 \qquad \mathrm{Tr}(x_3 \circ x_3) = -2$$

La forme de Killing $K : \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \to \mathbb{R}$ vérifie donc :

$$K(\xi_1, \xi_2) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\xi_1} \circ \mathrm{ad}_{\xi_2}) = 4\mathrm{Tr}(\xi_1 \circ \xi_2), \qquad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{su}(2)$$

□

Remarque : On a $K(\xi_1, \xi_2) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\xi_1} \circ \mathrm{ad}_{\xi_2}) = 4\mathrm{Tr}(\xi_1 \circ \xi_2)$ qui sont définis négatifs pour $G = \mathrm{SU}(2)$. Dans la section sur la théorie de jauge, il faut faire attention à cela en posant $\kappa^\sharp := -K$ au lieu de $\kappa^\sharp = K$ et ainsi avoir $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{\mathfrak{g},\kappa}$ défini positif (e.g. pour Yang-Mills et Chern-Simons).

5.12 Groupes $\mathrm{O}(p,q)$ et $\mathrm{SO}(p,q)$:

On se donne $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{p+q}$ muni d'une métrique de Minkowski η de signature (p,q), i.e. $(+,...,+,-,...,-)$ avec p "+" et q "−".

Définition : Le *groupe orthogonal indéfini* (et divers sous-groupes) est défini par :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{O}(p,q) & := & \{g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) | \eta(g(\cdot), g(\cdot)) = \eta\} \\ \mathrm{O}^+(p,q) & := & \mathrm{O}_o(p,q) := \{g \in \mathrm{O}(p,q) | g \text{ est dans la composante identité}\} \\ \mathrm{SO}(p,q) & := & \{g \in \mathrm{O}(p,q) | \det(g) = 1\} \\ \mathrm{SO}^+(p,q) & := & \mathrm{SO}_o(p,q) := \{g \in \mathrm{SO}(p,q) | g \text{ est dans la composante identité}\} \end{array}$$

Les algèbres de Lie de ces trois groupes sont les mêmes et les dimensions sont les mêmes. En particulier, $\mathfrak{so}(p,q) = (p,q)$. Le *groupe orthogonal* est un cas particulier du groupe orthogonal indéfini :

$$\mathrm{O}(n) := \mathrm{O}(n,0)$$

En termes de dimensions, pour $n = p + q$, on a :

$$\dim \mathrm{O}(p,q) = \dim \mathrm{O}(n) = n(n-1)/2$$

Cas particuliers :

- $\mathrm{O}(1,3)$ est le *groupe de Lorentz*,
- $\mathrm{O}^+(1,3)$ est le *groupe de Lorentz orthochrone*,
- $\mathrm{SO}(1,3)$ est le *groupe de Lorentz propre*,
- $\mathrm{SO}^+(1,3)$ est le *groupe de Lorentz restreint* (i.e. orthochrone et propre),
- $\mathrm{O}(1,3)/\mathrm{SO}^+(1,3) = \{1, T, P, PT\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ est le *4-groupe de Klein*,
- $\mathrm{O}(1,4)$ est le *groupe de de Sitter*.
- $M_{\mathrm{dS}} := \mathrm{O}(1,4)/\mathrm{O}(1,3)$ est l'*espace de de Sitter*.
- $\mathrm{O}(p) := \mathrm{O}(p,0)$ est le groupe orthogonal usuel.

On a :

$$\begin{array}{rcl} \dim \mathrm{O}(3) & = & 3 \\ \dim \mathrm{O}(1,3) & = & 6 \\ \dim \mathrm{O}(1,4) & = & 10 \\ \dim \mathcal{M}_{\mathrm{dS}} & = & 4 \end{array}$$

On a un split d'algèbre :

$$\mathfrak{so}(1,4) = \mathfrak{so}(1,3) \oplus \mathbb{R}^4$$

où $\mathbb{R}^4 \cong \mathfrak{so}(1,4)/\mathfrak{so}(1,3)$. Ce split est Ad-invariant pour l'action de du groupe de Lorentz $\mathrm{O}(1,3) < \mathrm{O}(1,4)$. Ce split en est un d'espaces vectoriels mais perd l'information algébrique de $\mathfrak{so}(1,4)$ quand on passe au $\mathbb{R}^4 = \mathfrak{so}(1,4)/\mathfrak{so}(1,3)$.

Proposition : Les éléments de $\mathfrak{so}(p,q)$ vus comme matrices $n \times n$ vérifient cette équation matricielle :

$$\xi^T = -\eta\xi\eta$$

Preuve : Pour $\xi \in \mathfrak{so}(p,q)$, on a $g_t := \exp(t\xi) \in \mathrm{SO}^+(p,q)$ et donc $\eta(g_t(\,\cdot\,), g_t(\,\cdot\,)) = \eta$. Si on dérive ça à $t = 0$ on a :

$$0 = \eta(\xi(\,\cdot\,),\,\cdot\,) + \eta(\,\cdot\,,\xi(\,\cdot\,))$$

Donnons à $\mathbb{R}^{p+q}$ sa base canonique e_i et soit e^i sa base duale de sorte que :

$$\eta = \eta_{ij} e^i \otimes e^j$$

pour $\eta_{ij} = \eta(e_i, e_j)$. En termes de matrice et de vecteurs colonne et ligne, on a :

$$\eta(v,w) = v^T \eta w$$

où η est la matrice :

$$\eta = \begin{bmatrix} 1_{p\times p} & 0 \\ 0 & -1_{q\times q} \end{bmatrix}$$

Ce faisant, l'égalité $0 = \eta(\xi(\,\cdot\,),\,\cdot\,) + \eta(\,\cdot\,,\xi(\,\cdot\,))$ devient matriciellement :

$$0 = \xi^T \eta + \eta\xi$$

i.e. :

$$\xi^T = -\eta\xi\eta^{-1} = -\eta\xi\eta$$

□

Remarque : Une base de $\mathfrak{so}(1,3)$ est explicitement donnée par :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0 \end{bmatrix} \quad K_3 = \begin{bmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et elle vérifie :

$$\begin{aligned} [K_1, K_2] &= J_{12} \\ [K_1, K_3] &= J_{13} \\ [K_2, K_3] &= J_{23} \end{aligned}$$

Les matrices symétriques K_i correspondent à des boosts. Les matrices antisymétriques J_{ij} correspondent à des rotations.

Remarque : Une base de $\mathfrak{so}(1,4)$ est explicitement donnée par :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{14} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad J_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

et elle vérifie :

$$\begin{aligned} [K_1, K_2] &= J_{12} \\ [K_1, K_3] &= J_{13} \\ [K_1, K_4] &= J_{14} \\ [K_2, K_3] &= J_{23} \\ [K_2, K_4] &= J_{24} \\ [K_3, K_4] &= J_{34} \end{aligned}$$

Les matrices symétriques K_i correspondent à des boosts. Les matrices antisymétriques J_{ij} correspondent à des rotations.

Proposition : Pour tout $\xi \in \mathfrak{so}(1,n)$, la forme bilinéaire :

$$B_\xi(\,\cdot\,,\,\cdot\,) := \eta(\,\cdot\,,\xi(\,\cdot\,)) : \mathbb{R}^{1+n} \times \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$$

est antisymétrique.

Preuve : Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{1+n}$. En utilisant $0 = \eta(\xi(\,\cdot\,),\,\cdot\,) + \eta(\,\cdot\,,\xi(\,\cdot\,))$, on a :

$$B_\xi(v_1, v_2) = \eta(v_1, \xi(v_2)) = -\eta(\xi(v_1), v_2) = -\eta(v_2, \xi(v_1)) = -B_\xi(v_2, v_1)$$

□

Remarque : C'est ainsi que les éléments de $\mathfrak{so}(1,n)$ correspondent aux éléments de $\wedge^2\mathbb{R}^{1+n}$. En particulier, en termes de matrices, on a :

$$B_\xi = \eta\xi$$

car $B_\xi(v_1, v_2) = v_1^T B_\xi v_2 = v_1^T \eta\xi v_2 = \eta(v_1, \xi v_2)$.

Remarque : On peut voir $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)$ comme sous-groupe de $\mathrm{O}(4) < \mathrm{SO}(1,4)$. Ce faisant, l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(2)$ s'injecte en celle $\mathfrak{so}(1,4)$. On a $\mathfrak{u}(1) =$

$\mathbb{R}\langle X_0\rangle$ et $\mathfrak{su}(2) = \mathbb{R}\langle X_1, X_2, X_3\rangle$ où :

$$\begin{aligned} X_0 &= -J_{13} - J_{24} \\ X_1 &= -J_{23} - J_{14} \\ X_2 &= J_{12} + J_{34} \\ X_3 &= -J_{13} + J_{24} \end{aligned}$$

Explicitement :

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les crochet de Lie sont :

$$\begin{aligned} [X_0, X_1] &= 0 \\ [X_0, X_2] &= 0 \\ [X_0, X_3] &= 0 \\ [X_1, X_2] &= -2X_3 \\ [X_3, X_1] &= -2X_2 \\ [X_2, X_3] &= -2X_1 \end{aligned}$$

5.13 Déterminant, relativité et forme de Killing

Proposition : Le déterminant de toute matrice de $\mathrm{U}(2)$ repose en $\mathrm{U}(1)$, i.e. :

$$\det : \mathrm{U}(2) \to \mathrm{U}(1)$$

Preuve : Suite d'implications directe :

$$\begin{aligned} g \in \mathrm{U}(2) &\implies g^\dagger g = 1 \\ &\implies \det(g^\dagger g) = \det(1) \\ &\implies \overline{\det(g)}\det(g) = 1 \\ &\implies \det(g) \in \mathrm{U}(1) \end{aligned}$$

□

Proposition : $\det : \mathrm{U}(2) \to \mathrm{U}(1)$ est un homomorphisme de groupes.

Preuve : Évident. □

Remarque : Ce qui est intéressant ce n'est pas tant le déterminant sur $\mathrm{U}(2)$ que le déterminant sur $\mathfrak{u}(2)$.

Notation : L'espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ est, par définition, naturellement muni d'une base vectorielle canonique :

$$\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}\langle e_0, e_1, e_2, e_3\rangle$$

où :

$$e_0 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad e_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad e_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad e_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Par abus de langage, j'écrirai ces vecteurs comme vecteurs lignes et non comme vecteurs colonnes (les vecteurs lignes devraient représenter des éléments du dual). À la base vectorielle $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{C}^4$ correspond une base duale $\{e^0, e^1, e^2, e^3\}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4; \mathbb{C})$ qui est définie par $e^i(e_j) := \delta^i_j$. Considérons deux vecteurs complexes :

$$\vec{z} = (z^0, z^1, z^2, z^3) = \sum_{k=0}^{3} z^k e_k \in \mathbb{C}^4$$

$$\vec{w} = (w^0, w^1, w^2, w^3) = \sum_{k=0}^{3} w^k e_k \in \mathbb{C}^4$$

Définition : La *forme de Minkowski* est par définition :

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 &\to \mathbb{C} \\ (\vec{z}, \vec{w}) &\mapsto \eta(\vec{z}, \vec{w}) := z_0 w_0 - z_1 w_1 - z_2 w_2 - z_3 w_3 \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\eta = e^0 \otimes e^0 - e^1 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^2 - e^3 \otimes e^3$$

Proposition : Pour $\vec{z} = (z^0, z^1, z^2, z^3) \in \mathbb{C}^4$, on a l'égalité suivante :

$$\det\left(\sum_{k=0}^{3} z^k \sigma_k\right) = \eta(\vec{z}, \vec{z})$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned} \det\left(\sum_{k=0}^{3} z^k \sigma_k\right) &= \det\begin{bmatrix} z^0 + z^3 & z^1 - iz^2 \\ z^1 + iz^2 & z^0 - z^3 \end{bmatrix} \\ &= (z^0 + z^3)(z^0 - z^3) - (z^1 + iz^2)(z^1 - iz^2) \\ &= (z^0)^2 - (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2 \\ &= \eta(\vec{z}, \vec{z}) \end{aligned}$$

□

Proposition : Pour $\vec{z} = \vec{a} + i\vec{b} \in \mathbb{C}^4$, où $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^4$, on a les deux égalités suivantes :

$$\det\left(\sum_{k=0}^{3} z^k \sigma_k\right) = \eta(\vec{a}, \vec{a}) + 2i\eta(\vec{a}, \vec{b}) - \eta(\vec{b}, \vec{b})$$

$$\eta(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2i}\left(\det\left(\sum_{k=0}^{3}(a^k + ib^k)\sigma_k\right) - \det\left(\sum_{k=0}^{3} a^k \sigma_k\right) + \det\left(\sum_{k=0}^{3} b^k \sigma_k\right)\right)$$

Preuve : Découle du fait que :

$$\eta(\vec{z}, \vec{z}) = \eta(\vec{a} + i\vec{b}, \vec{a} + i\vec{b}) = \eta(\vec{a}, \vec{a}) + 2i\eta(\vec{a}, \vec{b}) - \eta(\vec{b}, \vec{b})$$

□

Remarque : On peut aussi faire ceci sans $i = \sqrt{-1}$.

Proposition : Pour $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^4$ on a les deux égalités suivantes :

$$\det\left(\sum_{k=0}^{3}(a^k + b^k)\sigma_k\right) = \eta(\vec{a},\vec{a}) + 2\eta(\vec{a},\vec{b}) + \eta(\vec{b},\vec{b})$$

$$\eta(\vec{a},\vec{b}) = \frac{1}{2}\left(\det\left(\sum_{k=0}^{3}(a^k + b^k)\sigma_k\right) - \det\left(\sum_{k=0}^{3} a^k\sigma_k\right) - \det\left(\sum_{k=0}^{3} b^k\sigma_k\right)\right)$$

Preuve : Découle du fait que :

$$\eta(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}) = \eta(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}) = \eta(\vec{a},\vec{a}) + 2\eta(\vec{a},\vec{b}) + \eta(\vec{b},\vec{b})$$

□

Remarque : La dernière proposition est ce qui permet de relier la relativité $(+,-,-,-)$ à la théorie de jauge $\mathrm{U}(2)$. En particulier, la forme de Killing sur $\mathfrak{su}(2)$ est la partie $(-,-,-)$ du $(+,-,-,-)$ de $\mathfrak{u}(2)$.

5.14 Espace de structures

On a vu plus haut qu'à une une action transitive $\Phi : G \to \mathrm{Aut}(X)$ correspond un isomorphisme entre $G/\mathrm{stab}(x)$ et X. On peut, en particulier, prendre diverses représentation de $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ pour étudier l'espace de diverses structures.

Exemple : (espace des produits scalaires euclidiens) Tout produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est un point x de $X := ((\mathbb{R}^n)^* \odot (\mathbb{R}^n)^*)\backslash\{0\}$. $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ agit sur X via $(\rho^* \otimes \rho^*)$ où $\rho : \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}); \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n); g \mapsto g$ est la représentation fondamentale de $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$. Comme l'espace des produits scalaires est $X = \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})/\mathrm{stab}(x)$, déterminons ce qu'est $\mathrm{stab}(x)$. On sait que x s'écrit $x = x_{ij} e_i^* \otimes e_j^*$ où on somme sur les indices, où $\{e_i^*\}_{i=1\ldots n}$ est la base duale canonique de la base canonique $\{e_i\}_{i=1\ldots n}$, où $x_i j \in \mathbb{R}, \forall i, j = 1\ldots n$. Pour l'étude des produits scalaires, on peut supposer que $x = \delta_{ij} e_i^* \otimes e_j^* = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$ est le produit scalaire canonique euclidien sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, que vaut $\mathrm{stab}(x)$? On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{stab}(x) &= \{g \in G | \rho^*(g) \otimes \rho^*(g) x = x\} \\
&= \{g \in G | x(g^{-1}\cdot, g^{-1}\cdot) = x(\cdot,\cdot)\} \\
&= \{g \in G | \langle g^{-1}\cdot, g^{-1}\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}\} \\
&= \{g \in G | \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle g\cdot, g\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}\}
\end{aligned}$$

Mais il est bien connu que le sous-groupe de $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ qui préserve $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$ est $\mathrm{O}(n)$. Il suit que l'espace des structures euclidiennes est $X \cong \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})/\mathrm{stab}(x) = \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$. En particulier, comme $X = ((\mathbb{R}^n)^* \odot (\mathbb{R}^n)^*)\backslash\{0\}$, on a un isomorphisme $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})/\mathrm{O}(n) \cong ((\mathbb{R}^n)^* \odot (\mathbb{R}^n)^*)\backslash\{0\}$, un espace de dimension $n(n+1)/2$.

Exemple : (espace des structures complexes) On regarde X l'espace des structures complexes sur $\mathbb{R}^{2n}$ et on y fait agir transitivement $\mathrm{GL}(2n;\mathbb{R})$. On prend la structure complexe canonique $x = \delta_{ij} e_i^* \otimes e_{i+n} - \delta_{ij} e_{i+n}^* \otimes e_i$ où la somme est sur $i, j = 1\ldots n$. L'homomorphisme $\Phi(x) : g \mapsto (\rho^*(g) \otimes \rho(g))x$ est alors $\Phi_g(x) = g \circ x \circ g^{-1}$. Le stabilisateur est $\mathrm{stab}(x) = \{g \in \mathrm{GL}(2n;\mathbb{R}) | g \circ x \circ g^{-1} = x\}$. C'est-à-dire, l'ensemble des matrices qui commutent avec la structure complexe x. Ce qui est $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$. D'où que l'espace des structures complexes est isomorphe à $\mathrm{GL}(2n;\mathbb{R})/\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$.

Exemple : (espace des structures symplectiques) L'espace des structures symplectiques sur $\mathbb{R}^{2n}$ est $\mathrm{GL}(2n;\mathbb{R})/\mathrm{Sp}(2n;\mathbb{R})$.

5.15 Représentation irréductible

Soit $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$, une représentation de G sur un espace vectoriel V.

Définition : Un sous-espace vectoriel $W \subset V$ est dit G-invariant si $\rho(G)V = V$.

Définition : Une représentation ρ est dite *irréductible* si V n'admet aucun sous-espace propre G-invariant.

Proposition : Toute représentation irréductible $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ est transitive sur $V \backslash \{0\}$.

Preuve : Supposons ρ non transitive. Alors il existe $x, y \neq 0$ tels qu'il n'existe aucun $g \in G$ tel que $\rho(g)x = y$. Donc $y \notin \rho(G)x$. Donc $\rho(G)x$ est un sous-espace propre G-invariant. Donc ρ n'est pas irréductible. La contraposée est ce qu'on cherche. □

Définition : Soit $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(X)$, une G-action de groupe sur X. Alors l'action Φ est dite :

- *fidèle* si elle est injective, i.e. si $\ker(\Phi) = e \in G$;
- *libre* si pour tous $g \in G \backslash \{e\}$ et $x \in X$, $\Phi_g(x) \neq x$;
- *transitive* si pour tous $x, y \in X$ il existe $g \in G$ tel que $\Phi_g(x) = y$;
- *simplement transitive* si Φ est transitive et libre.

Remarque : Dans mon mémoire je disais "efficace" (=effective) au lieu de "fidèle". Remarquons que "libre" est plus fort que "fidèle".

Proposition : Si l'action est libre, alors $\Phi_*|_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(X)$ et $(\Phi_*|_e)_x : \mathfrak{g} \to T_x X$ sont injectives. Si l'action est transitive, alors pour tout $x \in X$, l'application $(\Phi_*|_e)_x : \mathfrak{g} \to T_x X$ est surjective.

Corollaire : Toute représentation ρ irréductible a $\rho_*|_e : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ surjectif.

Exemple : L'action de $\mathrm{GL}(3; \mathbb{R})$ est transitive sur $\mathbb{R}^3$ mais pas libre car chaque rotation laisse toujours une droite invariante. Autre exemple : l'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ par translation en x est libre mais pas transitive.

5.16 1-forme de Maurer-Cartan et équation structurelle de Maurer-Cartan

Définition : Soit G un groupe de Lie. La *1-forme de Maurer-Cartan* $\theta \in \Omega^1(G;\mathfrak{g})$ est définie en tout $g \in G$ par :

$$\theta_g := (L_{g^{-1}})_*$$

Proposition : La 1-forme de Maurer-Cartan est invariante à gauche :

$$L_g^*\theta = \theta; \qquad \forall g \in G$$

et est équivariante à droite :

$$R_g^*\theta = \mathrm{Ad}_g^{-1} \circ \theta; \qquad \forall g \in G$$

Preuve : Soient g_1 et g_2 quelconques en G. Montrons la première égalité :

$$\begin{aligned}
(L_{g_1}^*\theta)_{g_2} &= \theta|_{L_{g_1}(g_2)}(L_{g_1})_* \\
&= \theta|_{g_1 g_2}(L_{g_1})_* \\
&= (L_{g_1 g_2}^{-1})_*(L_{g_1})_* \\
&= (L_{g_2}^{-1}L_{g_1}^{-1})_*(L_{g_1})_* \\
&= (L_{g_2}^{-1}L_{g_1}^{-1}L_{g_1})_* \\
&= (L_{g_2}^{-1})_* \\
&= \theta_{g_2}
\end{aligned}$$

Montrons la seconde égalité :

$$\begin{aligned}
(R_{g_1}^*\theta)_{g_2} &= \theta|_{R_{g_1}(g_2)}(R_{g_1})_* \\
&= \theta|_{g_2 g_1}(R_{g_1})_* \\
&= (L_{g_2 g_1}^{-1})_*(R_{g_1})_* \\
&= (L_{g_1}^{-1}L_{g_2}^{-1})_*(R_{g_1})_* \\
&= (L_{g_1}^{-1}L_{g_2}^{-1}R_{g_1})_* \\
&= (L_{g_1}^{-1})_*(L_{g_2}^{-1})_*(R_{g_1})_* \\
&= (L_{g_1}^{-1})_*\theta_{g_2}(R_{g_1})_* \\
&= \mathrm{Ad}_{g_1}^{-1} \circ \theta_{g_2}
\end{aligned}$$

□

Remarque : L'égalité $R_g^*\theta = \mathrm{Ad}_g^{-1} \circ \theta$ est l'archétype de la condition d'Ad-équivariance $\Phi_g^* A = \mathrm{Ad}_g^{-1} \circ A$ d'une forme de connexion A sur un G-fibré principal à droite P.

Proposition : $\theta([X, Y]) = [\theta(X), \theta(Y)]$.

Preuve : On sait que le push-forward commute avec le crochet de Lie de champs vectoriels. On trouve alors directement :

$$\theta_g([X, Y]) = (L_{g^{-1}})_*[X, Y] = [(L_{g^{-1}})_* X, (L_{g^{-1}})_* Y] = [\theta_g X, \theta_g Y]$$

□

Proposition : $\mathrm{d}\theta + [\theta, \theta] = 0$

Preuve : Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$. Sans pertes de généralités, on peut supposer X et Y invariants à gauche, i.e. $X_g = (L_g)_* X_e$ et $Y_g = (L_g)_* Y_e$. Ce faisant, $\theta(X) = X_e$ constant et $\theta(Y) = Y_e$ constant. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\theta(X, Y) &= X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X, Y]) \\ &= -[\theta(X), \theta(Y)] \\ &= -[\theta, \theta](X, Y) \end{aligned}$$

D'où l'égalité recherchée $\mathrm{d}\theta + [\theta, \theta] = 0$. □

Remarque : L'équation structurelle de Maurer-Cartan se réécrit

$$\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = 0$$

où $[\,\cdot \wedge \cdot\,]$ représente à la fois le wedge et le crochet. (plus de détails plus bas).

Remarque : G est un G-fibré principal trivial dont la base est un point. La 1-forme de Maurer-Cartan est une forme de connexion. Son noyau est nul, i.e. toutes les directions sont verticales et aucune n'est horizontale. Comme la distribution horizontale est vide, elle est intégrable. Ce qui concorde avec le fait que la courbure $F_\theta^\sharp = \mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = 0$. De la même manière, puisque la distribution horizontale est vide, la projection horizontale tue tout vecteur. Ce qui concorde encore avec le fait que $F_\theta^\sharp = h^*(\mathrm{d}\theta) = 0$.

5.17 Pull-back de la forme de Maurer-Cartan

Soit $\theta \in \Omega^1(G;\mathfrak{g})$ la 1-forme de Maurer-Cartan sur G définie par $\theta_g = (L_{g^{-1}})_*$.

Proposition : Soit $f : M \to G$ où G est un groupe matriciel. Alors le rappel (i.e. le pull-back) de θ par f est donné par :

$$f^*\theta = f^{-1}\mathrm{d}f$$

Preuve : On calcule directement :

$$f^*\theta = \theta_f f_* = (L_{f^{-1}}))_* f_* = f^{-1}\mathrm{d}f$$

où $f_* = \mathrm{d}f$ car le groupe est matriciel. □

Proposition : $[f^*\theta, f^*\theta] = -\mathrm{d}f^*\theta$

Preuve : On calcule directement :

$$[f^*\theta, f^*\theta] = f^*[\theta,\theta] = -f^*(\mathrm{d}\theta) = -\mathrm{d}f^*\theta$$

□

Remarque : Ceci concorde avec $f^*\theta = f^{-1}\mathrm{d}f$. En effet :

$$\mathrm{d}f^*\theta = \mathrm{d}(f^{-1}\mathrm{d}f) = -f^{-1}(\mathrm{d}f)(\wedge,\circ)f^{-1}\mathrm{d}f = [f^{-1}\mathrm{d}f, f^{-1}\mathrm{d}f] = [f^*\theta, f^*\theta]$$

Proposition : Soient deux applications $f, g : M \to G$. Alors on a l'égalité

$$(fg)^*\theta = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} f^*\theta + g^*\theta$$

Preuve : On doit se souvenir que $\mathrm{Ad}_g = (\iota_g)_* = (L_g R_{g^{-1}})_* = (L_g)_*(R_{g^{-1}}) = (R_{g^{-1}})(L_g)_*$. Soit $X \in TM$ quelconque. En utilisant la règle de Leibniz, on calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
((fg)^*\theta)(X) &= \theta_{fg}(fg)_*(X) \\
&= \theta_{fg}(f_*(X)\cdot g + f\cdot g_*(X)) \\
&= \theta_{fg}((R_g)_*f_*(X) + (L_f)_*g_*(X)) \\
&= \theta_{fg}(R_g)_*f_*(X) + \theta_{fg}(L_f)_*g_*(X) \\
&= (L_{(fg)^{-1}})_*(R_g)_*f_*(X) + (L_{(fg)^{-1}})_*(L_f)_*g_*(X) \\
&= (L_{g^{-1}}L_{f^{-1}})_*(R_g)_*f_*(X) + (L_{g^{-1}}L_{f^{-1}})_*(L_f)_*g_*(X) \\
&= (L_{g^{-1}}(R_g)_*L_{f^{-1}})_*f_*(X) + (L_{g^{-1}})_*g_*(X) \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(L_{f^{-1}})_*f_*(X) + \theta_g g_*(X) \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\theta_f f_*(X) + (g^*\theta)(X) \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(f^*\theta)(X) + (g^*\theta)(X)
\end{aligned}$$

D'où l'égalité recherchée $(fg)^*\theta = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} f^*\theta + g^*\theta$. □

Corollaire : Soit $g : M \to G$. Alors, on a l'égalité

$$(g^{-1})^*\theta = -\mathrm{Ad}_g g^*\theta$$

Preuve : par la dernière proposition, on sait que $(fg)^*\theta = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} f^*\theta + g^*\theta$. Prenons $f = g^{-1}$. Alors on trouve $(e)^*\theta = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(g^{-1})^*\theta + g^*\theta$. Mais e est une application constante. Donc le terme de gauche meurt. On trouve alors $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(g^{-1})^*\theta = -g^*\theta$. Ce qui se reformule $(g^{-1})^*\theta = -\mathrm{Ad}_g g^*\theta$. □

Remarque : Ce dernier corollaire $(g^{-1})^*\theta = -(\mathrm{d}g)g^{-1}$ s'obtient aussi directement comme suit :

$$(g^{-1})^*\theta = (g^{-1})^{-1}\mathrm{d}(g^{-1}) = -gg^{-1}(\mathrm{d}g)g^{-1} = -(\mathrm{d}g)g^{-1}$$

5.18 Règle de Leibniz sur les groupes

Proposition : Soient $f, g : M \to G$. Alors

$$(fg)_* = (R_g)_* f_* + (L_f)_* g_*$$

Preuve : Soit $X \in TM$ quelconque. On calcule directement :

$$\begin{aligned} (fg)_*(X) &= (f_*(X) \cdot g + f \cdot g_*(X)) \\ &= (R_g)_* f_*(X) + (L_f)_* g_*(X) \\ &= ((R_g)_* f_* + (L_f)_* g_*)(X) \end{aligned}$$

□

Remarque : En particulier, deux courbes $g_1(t), g_2(t)$, on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_1(t)g_2(t)) = (R_{g_2(t)})_* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_1(t) + (L_{g_1(t)})_* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_2(t)$$

Proposition : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(t))^{-1} = -(L^{-1}_{g(t)} R^{-1}_{g(t)})_* \dot{g}(t)$

Preuve : Soient deux courbes $g(t) = g_1(t)$ et $g_2(t) = g_1(t)^{-1} = g(t)^{-1}$. Ainsi, $g_1(t)g_2(t) = e \in G$. Alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_1(t)g_1(t)^{-1}) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_1(g)g_2(t)) \\ &= (R_{g_2(t)})_* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_1(t) + (L_{g_1(t)})_* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_2(t) \\ &= (R^{-1}_{g(t)})_* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t) + (L_{g(t)})_* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t)^{-1} \end{aligned}$$

En appliquant $(L^{-1}_{g(t)})_*$ à gauche et à droite on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= (L^{-1}_{g(t)})_* (R^{-1}_{g(t)})_* \dot{g}(t) + (L^{-1}_{g(t)})_* (L_{g(t)})_* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t)^{-1} \\ &= (L^{-1}_{g(t)} R^{-1}_{g(t)})_* \dot{g}(t) + (L^{-1}_{g(t)} L_{g(t)})_* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t)^{-1} \\ &= (L^{-1}_{g(t)} R^{-1}_{g(t)})_* \dot{g}(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t)^{-1} \end{aligned}$$

D'où
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t)^{-1} = -(L^{-1}_{g(t)}R^{-1}_{g(t)})_*\dot{g}(t)$$
□

Remarque : Voici une autre petite preuve informelle :
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t)^{-1} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(t)^{-1}g(t)g(t)^{-1}) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(t)^{-1})g(t)g(t)^{-1} + g(t)^{-1}\dot{g}(t)g(t)^{-1} + g(t)^{-1}g(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(t)^{-1}) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(t)^{-1}) + g(t)^{-1}\dot{g}(t)g(t)^{-1} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(t)^{-1}) \\
&= 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(t)^{-1}) + g(t)^{-1}\dot{g}(t)g(t)^{-1}
\end{aligned}$$
D'où
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(t)^{-1}) = -g(t)^{-1}\dot{g}(t)g(t)^{-1}$$
□

Proposition : Soit ξ_t une courbe en $\mathfrak{g}$. Alors :
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(\xi_t) = \exp(\xi_t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\mathrm{ad}^k_{\xi_t}}{(k+1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_t$$

Preuve : Voir pile de feuilles de je ne sais plus quelle date... (À FAIRE ! ! !) □

Proposition : Soit $\xi : M \to \mathfrak{g}$. Alors $\exp(\xi) : M \to G$ et $(\exp(\xi))_* : TM \to T_{\exp(\xi)}G$ est donnée par :
$$(\exp(\xi))_* = \exp(\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\mathrm{ad}^k_{\xi}}{(k+1)!}\mathrm{d}\xi$$

Preuve : Voir pile de feuilles de je ne sais plus quelle date... (À FAIRE ! ! !) □

Remarque : Pour un groupe matriciel c'est simplement :
$$\exp(\xi)^{-1}\mathrm{d}\exp(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\mathrm{ad}^k_{\xi}}{(k+1)!}\mathrm{d}\xi$$

En particulier, puisque $f^*\theta = f^{-1}\mathrm{d}f$ on trouve directement :

$$\exp(\xi)^*\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathrm{ad}_\xi^k}{(k+1)!}\mathrm{d}\xi$$

Proposition : $\exp(\mathrm{ad}_\xi) = \mathrm{Ad}_{\exp(\xi)}$ et $\exp(\mathrm{Ad}_g\xi) = \iota_g \exp(\xi)$.

Proposition : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(t\xi) = \xi\exp(t\xi) = \exp(t\xi)\xi$ pour tout t et tout $\xi \in \mathfrak{g}$.

Preuve : Calcul direct :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(t\xi) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 + t\xi + t^2\xi^2/2! + t^3\xi^3/3! + \ldots\right) \\
&= \xi + t\xi^2 + t^2\xi^3/2! + \ldots \\
&= \xi\left(1 + t\xi + t^2\xi^2/2! + \ldots\right) \\
&= \xi\exp(t\xi)
\end{aligned}$$

L'autre égalité découle du fait que ξ commute avec lui-même. □

Proposition : $\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)}\xi = \xi$ pour tout t.

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_{t\xi}\xi &= \exp(\mathrm{ad}_{t\xi})\xi \\
&= \xi + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\xi,\xi]^k}{k!} \\
&= \xi
\end{aligned}$$

où la dernière égalité du fait que $[\xi,\xi] = 0$. □

Proposition : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)} = \mathrm{ad}_\xi\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)} = \mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)}\mathrm{ad}_\xi$.

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=t}\mathrm{Ad}_{\exp((s-t+t)\xi)} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=t}\mathrm{Ad}_{\exp((s-t)\xi)}\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)} \\
&= \mathrm{ad}_{\frac{d}{ds}|_{s=t}\exp((s-t)\xi)}\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)} \\
&= \mathrm{ad}_{\xi\exp((s-t)\xi)|_{s=t}}\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)} \\
&= \mathrm{ad}_{\xi}\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)}
\end{aligned}$$

Pour la seconde égalité :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)} &= \mathrm{ad}_{\xi}\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)} \\
&= [\xi, \mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)}(\,\cdot\,)] \\
&= \mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)}[\mathrm{Ad}_{\exp(-t\xi)}\xi,\,\cdot\,] \\
&= \mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)}[\xi,\,\cdot\,] \\
&= \mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)}\mathrm{ad}_{\xi}
\end{aligned}$$

$\square$

Corollaire : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}|_{s=t}\mathrm{Ad}_{\exp((s-t)\xi)} = \mathrm{ad}_{\xi}$.

Remarque : La dernière égalité est évidente avec un simple changement de variable, i.e. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi)} = \mathrm{ad}_{\xi}$.

5.19 Égalités utiles

Voici quelques égalités utiles à avoir en tête :

$$\mathrm{Ad}_g[\xi_1, \xi_2] = [\mathrm{Ad}_g\xi_1, \mathrm{Ad}_g\xi_2]$$

$$\begin{aligned}
[\mathrm{Ad}_g\xi_1, \xi_2] &= \mathrm{Ad}_g[\xi_1, \mathrm{Ad}_g^{-1}\xi_2] \\
\mathrm{ad}_\xi[\xi_1, \xi_2] &= [\mathrm{ad}_\xi\xi_1, \xi_2] + [\xi_1, \mathrm{ad}_\xi\xi_2] \\
[\mathrm{ad}_\xi\xi_1, \xi_2] &= \mathrm{ad}_\xi[\xi_1, \xi_2] - [\xi_1, \mathrm{ad}_\xi\xi_2]
\end{aligned}$$

Aussi :

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{ad}_\xi) &= \mathrm{Ad}_{\exp(\xi)} \\
\exp(\mathrm{ad}_{\ln(g)}) &= \mathrm{Ad}_g \\
\mathrm{ad}_{\ln(g)} &= \ln(\mathrm{Ad}_g)
\end{aligned}$$

Bref, on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{ad}"] \arrow[d, "\exp"] & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\exp"] \\
G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] \arrow[d, "\ln"] & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\ln"] \\
\mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{ad}"] & \mathrm{End}(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}$$

5.20 Application $\iota_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(G)$

Souvenons-nous de l'automorphisme intérieur

$$\iota : G \to \mathrm{Aut}(G)$$

On sait que pour tout $g \in G$,

$$(\iota_g)_*|_e = \mathrm{Ad}_g$$

La question se pose : que vaut $\iota_*|_e$? On sait que $\mathrm{Aut}(G) < \mathrm{Diff}(G)$. Donc forcément :

$$\iota_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(G)$$

L'image de ι_* consiste donc en des champs vectoriels sur G. Mais quelles propriétés ont-ils ?

Proposition : Soit $\xi \in \mathfrak{g}$. Soit $\xi^* = \iota_*|_e(\xi_e)$ son champ vectoriel fondamental sur G. Alors, pour tout $h \in G$ on a :

$$\xi^*|_h = (R_h)_*\xi_e - (L_h)_*\xi_e$$

Preuve : $\xi_e \in \mathfrak{g}$ peut s'écrire $\xi_e = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t)$ où $g(t)$ est une courbe en G telle que $g(0) = e$. On a alors :

$$\xi^*|_h = (\iota_*|_e(\xi_e))|_h = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \iota_{g(t)}h = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (g(t)hg(t)^{-1}) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} ((g(t)h)g(t)^{-1})$$

On doit alors dériver un produit de courbes en G. En utilisant l'égalité suivante démontrée plus haut :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_1(t)g_2(t)) = (R_{g_2(t)})_*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_1(t) + (L_{g_1(t)})_*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_2(t)$$

pour $g_1(t) = g(t)h$ et $g_2(t) = g(t)^{-1}$ on trouve alors directement :

$$\xi^*|_h = (R_{g(0)^{-1}})_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (g(t)h) + (L_{g(0)h})_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t)^{-1}$$

En utilisant l'autre égalité démontrée plus haut $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}_t}(g(t))^{-1} = -(L_{g(t)}^{-1}R_{g(t)}^{-1})_*\dot{g}(t)$ et en utilisant le fait que $g(0) = e$, on calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
\xi^*|_h &= (R_{g(0)^{-1}})_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (g(t)h) + (L_{g(0)h})_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t)^{-1} \\
&= (R_e)_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (g(t)h) + (L_{eh})_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t)^{-1} \\
&= (\mathrm{Id}_G)_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (R_h g(t)) + (L_h)_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t)^{-1} \\
&= (R_h)_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t) - (L_h)_*(L_{g(0)}^{-1}R_{g(0)}^{-1})_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t) \\
&= (R_h)_*\xi_e - (L_h)_*\xi_e
\end{aligned}$$

□

Corollaire : $\xi^*|_e = 0$.

Preuve : $\xi^*|_e = (R_e)_*\xi_e - (L_e)_*\xi_e = \xi_e - \xi_e = 0$. □

Proposition : $\theta_g(\xi^*|_g) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi_e - \xi_e$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\theta_g(\xi^*|_g) &= (L_{g^{-1}})_*((R_g)_*\xi_e - (L_g)_*\xi_e) \\
&= (L_{g^{-1}}R_g)_*\xi_e - (L_{g^{-1}}L_g)_*\xi_e \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi_e - \xi_e
\end{aligned}$$

Remarque : Une telle réflexion semble utile pour définir la dérivée covariante d^A de fonctions équivariantes $P \to G$ et la dérivée covariante d_A de sections du fibré Aut$P$.

5.21 Applications $L_*|_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(G)$ et $R_*|_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(G)$

Proposition : Les applications $L_*|_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(G)$ et $R_*|_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(G)$ sont explicitement données sur chaque $\xi \in \mathfrak{g}$ et en chaque $g \in G$ par :

$$(L_*|_e(\xi))|_g = (R_g)_*(\xi)$$

$$(R_*|_e(\xi))|_g = (L_g)_*(\xi)$$

Soit g_s tel que $g_0 = e \in G$ et tel que $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} g_s = \xi$. Alors :

$$\begin{aligned}
(L_*|_e(\xi))|_g &= \left(L_*|_e\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} g_s\right)\right)_g \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} L_{g_s}\right)_g \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} L_{g_s}(g) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} g_s g \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} R_g(g_s) \\
&= (R_g)_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} g_s \\
&= (R_g)_*(\xi)
\end{aligned}$$

De la même manière, on a :

$$
\begin{aligned}
(R_*|_e(\xi))|_g &= \left(R_*|_e\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} g_s\right)\right)_g \\
&= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} R_{g_s}\right)_g \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} R_{g_s}(g) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} g g_s \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} L_g(g_s) \\
&= (L_g)_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} g_s \\
&= (L_g)_*(\xi)
\end{aligned}
$$

□

Remarque : Les champs vectoriels invariants à gauche $X \in \mathfrak{X}(G)$ sur G sont définis par :

$$X_g = (L_g)_* X_g \qquad \forall g \in G$$

de sorte que $\theta(X) = X_e$. Par la dernière proposition, on voit que ces champs invariants à gauche sont en fait les champs vectoriels fondamentaux pour l'action à droite :

$$X = R_*|_e(X_e)$$

Ça semble être la raison pour laquelle on considère des G-fibrés principaux à droite, de sorte que les champs vectoriels fondamentaux sont invariants à gauche.

5.22 Cosets et quotient de groupes

Définition : Soit G un groupe de Lie. Soit $H < G$ un sous-groupe de Lie. Alors :

- $gH := \{gh : h \in H\}$ est le *coset* à gauche de H par rapport à g.
- $G/H := \{gH : g \in G\}$ est l'ensemble des cosets à gauche de H.
- On dénote les éléments de G/H par $\bar{g}$.
- Il y a une projection $\overline{\cdot} : G \to G/H; g \mapsto \overline{g}$ qui envoie g à sa classe d'équivalence où la relation d'équivalence sur G est $g \sim gh$, i.e. $\overline{g} = \overline{gh}$.
- Si $\overline{g} \in G/H$, on dit que $g \in G$ représente la classe d'équivalence $\overline{g}$.

Remarque : Tout comme il y a un élément distingué en le groupe G, i.e. l'élément identité $e \in G$, il y a un élément distingué $\overline{e} \in G$. En particulier, cet élément correspond au coset :

$$\overline{e} = eH = H$$

Proposition : L'action de groupe à gauche $L : G \to \mathrm{Aut}(G)$ descend à une action de groupe :

$$\overline{L} : G \to \mathrm{Diff}(G/H)$$

qui est bien définie en tout $g_1 \in G$ et tout $\bar{g}_2 \in G/H$ par :

$$\overline{L}_{g_1}(\overline{g}_2) := \overline{L_{g_1}(g_2)} = \overline{g_1 g_2}$$

Preuve : Soit g_1 et $\overline{g}_2 \in G/H$. On peut représenter $\overline{g}_2$ par $g_2 \in G$ sujet à la relation d'équivalence $g_2 \sim g_2 h$ pour tout $h \in H$. Alors :

$$\overline{L}_{g_1}(\overline{g}_2) = \overline{g_1 g_2} = \overline{g_1 g_2 h} = \overline{L}_{g_1}(\overline{g_2 h})$$

□

6 Isotopies

6.1 Sous-groupe à 1-paramètre d'un groupe de Lie G

Définition : Un *sous-groupe à 1-paramètre* d'un groupe de Lie réel G est un homomorphisme de groupes de Lie

$$c : (\mathbb{R}, +) \to G$$

Étant un homomorphisme de groupes de Lie, c est différentiable et vérifie :

$$c(t+s) = c(t)c(s), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

$$c(0) = e \in G$$

Proposition : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(t) = (L_{c(t)})_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} c(t)$.

Remarque : Il y a une correspondance biunivoque entre les sous-groupes à 1-paramètre de G et les éléments de $\mathfrak{g}$:

- À tout $c : \mathbb{R} \to G$ est associé $v := c'(0) \in \mathfrak{g}$.
- À tout $v \in \mathfrak{g}$ est associé $c : \mathbb{R} \to G$ par l'équation différentielle $c'(t) = (L_{c(t)})_*(v)$ ainsi que la condition initiale $c(0) = e \in G$.

Définition : L'*application exponentielle* est par définition

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\to G \\ v &\mapsto c(1) \end{aligned}$$

Remarque : Tout sous-groupe à 1-paramètre $c : \mathbb{R} \to G$ s'écrit de manière unique comme $c(t) = \exp(tv)$ où $v = c'(0)$.

6.2 Groupe à 1-paramètre de difféomorphismes

Définition : Un *groupe à 1-paramètre de difféomorphismes* est un sous-groupe à 1-paramètre d'un groupe de difféomorphismes. C'est-à-dire, c'est un homomorphismes de groupes de Lie

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}, +) &\to \mathrm{Diff}(M) \\ t &\mapsto \varphi_t \end{aligned}$$

Autrement dit, c'est une application différentiable vérifiant $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ et $\varphi_0 = \mathrm{id}_M$.

Remarque : À tout groupe à 1-paramètre de difféomorphismes φ de M est associé un unique champ vectoriel $X \in \mathfrak{X}(M)$ donné par :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t(x) = X \circ \varphi_t(x)$$

Inversement, si un champ vectoriel $X \in \mathfrak{X}(M)$ est complet (e.g. si M est compact), alors à X est associé un unique groupe à 1-paramètre de difféomorphismes φ déterminé par la même relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t(x) = X \circ \varphi_t(x)$. On dit alors que φ est le *flot* de X, auquel cas :

$$\varphi_t = \exp(tX)$$

Remarque : Soulignons le fait que les groupes à 1-paramètre de difféomorphismes ont X indépendants du temps. En particulier, on peut à la fois utiliser :

$$X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{s=t}\varphi_{s-t}$$

tout comme on peut utiliser

$$X = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \varphi_t$$

Remarque : Si φ est le flot de X, alors pour toute k-forme différentielle α :

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\varphi_t^*\alpha\right) = \mathcal{L}_X\alpha$$

6.3 Isotopie et champ vectoriel dépendant du temps

Définition : Une *isotopie* est une application différentiable $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$ telle que $\varphi_0 = \mathrm{id}_M$.

Remarque : Une isotopie ne vérifie en général pas $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$. Ainsi, tout groupe à 1-paramètre de difféomorphismes est une isotopie, mais l'inverse n'est pas vrai.

Remarque : À une isotopie φ_t on peut associer deux champs vectoriels dépendants du temps X_t et Y_t :

$$X_t := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \varphi_s \circ \varphi_t^{-1} = \dot{\varphi}_t \circ \varphi_t^{-1}$$
$$Y_t := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \varphi_t^{-1} \circ \varphi_s = \varphi_t^{-1} \circ \dot{\varphi}_t$$

C'est-à-dire :

$$\dot{\varphi}_t := X_t \circ \varphi_t$$
$$\dot{\varphi}_t := (\varphi_t)_* Y_t$$

Alors que la première définition est celle généralement utilisée, la seconde peut être très utile pour certains calculs. On peut se poser la question si la première définition est plus *naturelle* que la seconde. Il me semble que non. En effet, l'isotopie φ_t est un chemin en le groupe de Lie $\mathrm{Diff}(M)$ et X_t et Y_t sont des chemins en $\mathrm{Lie}(\mathrm{Diff}(M)) = \mathfrak{X}(M)$ donnés par :

$$X_t = (R_{\varphi_t^{-1}})_* \dot{\varphi}_t$$
$$Y_t = (L_{\varphi_t^{-1}})_* \dot{\varphi}_t$$

où L et R dénotent les action à gauche et à droite de $\mathrm{Diff}(M)$ sur lui-même. Choisir l'action à droite R ou l'action à gauche L n'est qu'un choix de convention. Les deux chemins de champs vectoriels X_t et Y_t sont reliés comme :

$$Y_t = \mathrm{Ad}_{\varphi_t^{-1}} X_t$$

où Ad est l'action adjointe de $\mathrm{Diff}(M)$ sur $\mathfrak{X}(M)$. Ici, l'action adjointe de $\mathrm{Diff}(M)$ sur $\mathfrak{X}(M)$ est :

$$\mathrm{Ad}_\psi X = \psi_* X \circ \psi^{-1}, \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M),\ \psi \in \mathrm{Diff}(M)$$

Remarque : Si φ_t est donné, obtenir X_t ou Y_t est facile. Par contre, si X_t ou Y_t est donné, trouver φ_t n'est pas évident. Dans le cas de $X_t = \dot{\varphi}_t \circ \varphi_t^{-1}$, on peut trouver φ_t en utilisant un théorème d'ÉDO. Par contre, dans le cas de $X_t = (\varphi_t^{-1})_* \dot{\varphi}_t$, il faut résoudre une ÉDP et non qu'une ÉDO (discuté avec Jordan le 2018-11-20). En ce sens, Y_t est moins "naturel" que X_t. Ceci dit, par symétrie $Y_t = \mathrm{Ad}_{\varphi_t^{-1}} X_t$, il devrait être possible d'établir un théorème d'existence et d'unicité de courbes intégrales de Y_t.

Remarque : Si φ_t est un groupe à 1-paramètre de difféomorphismes, alors $\varphi_t = \exp(tX)$ pour un certain $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dans ce cas, $X = X_t = Y_t$.

Remarque : Alors que les groupes de difféomorphismes à 1-paramètre vérifient $\varphi_t = \exp(tX)$ et donc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tX) = X \circ \exp(tX)$, cette dernière égalité n'est pas forcément vraie pour les isotopies. En effet, tel que vu plus haut, pour ξ_t un courbe en $\mathfrak{g}$ on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(\xi_t) = \exp(\xi_t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathrm{ad}_{\xi_t}^k}{(k+1)!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \xi_t$$

Proposition : Pour φ_t une isotopie, on a l'égalité suivante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi_t^{-1} = -(\varphi_t^{-1})_* \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi_t \right) \circ \varphi_t^{-1}$$

Preuve : Ça découle du fait que la dérivée de l'identité $\mathrm{id}_M = \varphi_t \circ \varphi_t^{-1}$ est nulle :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{id}_M \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\varphi_t \circ \varphi_t^{-1} \right) \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi_t \right) \circ \varphi_t^{-1} + (\varphi_t)_* \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi_t^{-1} \end{aligned}$$

En multipliant par le push-forward $(\varphi_t^{-1})_*$, on trouve ce qu'on cherche. $\square$

6.4 Dérivée de Lie de formes différentielles

Définition : Soit φ_t une isotopie. La *dérivée de Lie*, agissant sur les k-formes différentielles, est définie par la dérivée temporelle du pull-back par φ_t :

$$\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}\varphi_t} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t^*$$

Proposition : Soit φ_t une isotopie. Soient $X_t := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \varphi_s \circ \varphi_t^{-1}$ et $Y_t := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \varphi_t^{-1}\varphi_s$. Alors :

$$\mathcal{L}_{X_t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} (\varphi_s \circ \varphi_t^{-1})^*$$

$$\mathcal{L}_{Y_t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} (\varphi_t^{-1} \circ \varphi_s)^*$$

Preuve : La définition $\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}\varphi_t} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t^*$ se réécrit $\mathcal{L}_{\frac{d}{ds}|_{s=t}\varphi_s} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \varphi_s^*$. En y substituant φ_s par $\varphi_s \circ \varphi_t^{-1}$ ou par $\varphi_t^{-1} \circ \varphi_s$, on trouve :

$$\mathcal{L}_{\frac{d}{ds}|_{s=t}\varphi_s\circ\varphi_t^{-1}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} (\varphi_s \circ \varphi_t^{-1})^*$$

$$\mathcal{L}_{\frac{d}{ds}|_{s=t}\varphi_t^{-1}\circ\varphi_s} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} (\varphi_t^{-1} \circ \varphi_s)^*$$

En y remplaçant la définition de X_t et de Y_t, on trouve ce qu'on cherche. □

Proposition : Pour ψ_1 et ψ_2 deux difféomorphismes et φ_t une isotopie, on a :

$$\mathcal{L}_{(\psi_1)_*\frac{d}{dt}\varphi_t\circ\psi_2} = \psi_2^*\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}\varphi_t}\psi_1^*$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(\psi_1)_*\frac{d}{dt}\varphi_t\circ\psi_2} &= \mathcal{L}_{\frac{d}{dt}(\psi_1\circ\varphi_t\circ\psi_2)} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi_1 \circ \varphi_t \circ \psi_2)^* \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_2^*\varphi_t^*\psi_1^* \\
&= \psi_2^*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t^*\right)\psi_1^* \\
&= \psi_2^*\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}\varphi_t}\psi_1^*
\end{aligned}$$

□

Proposition : Pour φ_t une isotopie, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^{-1})^* = -(\varphi_t^{-1})^*\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}\varphi_t}(\varphi_t^{-1})^*$$

Preuve : En utilisant le fait démontré plus haut que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t^{-1} = -(\varphi_t^{-1})_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t\right)\varphi_t^{-1}$$

et en utilisant la dernière proposition, on calcule directement :

$$\begin{array}{rcl}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^{-1})^* & = & \mathcal{L}_{\frac{d}{dt}(\varphi_t^{-1})} \\ & = & \mathcal{L}_{-(\varphi_t^{-1})_*(\frac{d}{dt}\varphi_t)\varphi_t^{-1}} \\ & = & -(\varphi_t^{-1})^*\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}\varphi_t}(\varphi_t^{-1})^*\end{array}$$

□

Proposition : Soit φ_t une isotopie. Soient $X_t := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\varphi_s\circ\varphi_t^{-1}$ et $Y_t := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}\varphi_t^{-1}\circ\varphi_s$. Alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t^* = \varphi_t^*\mathcal{L}_{X_t} = \mathcal{L}_{Y_t}(\varphi_t)^*$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^{-1})^* = -\mathcal{L}_{X_t}(\varphi_t^{-1})^* = -(\varphi_t^{-1})^*\mathcal{L}_{Y_t}$$

Preuve : Montrons d'abord la première égalité :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t^* &= \mathcal{L}_{\frac{d}{dt}\varphi_t} \\ &= \mathcal{L}_{\frac{d}{ds}|_{s=t}\varphi_s} \\ &= \mathcal{L}_{\frac{d}{ds}|_{s=t}(\varphi_s\varphi_t^{-1}\varphi_t)} \\ &= \mathcal{L}_{\frac{d}{ds}|_{s=t}(\varphi_s\varphi_t^{-1})\varphi_t} \\ &= \varphi_t^*\mathcal{L}_{\frac{d}{ds}|_{s=t}(\varphi_s\varphi_t^{-1})} \\ &= \varphi_t^*\mathcal{L}_{X_t}\end{aligned}$$

Montrons la seconde égalité :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t^* &= \mathcal{L}_{\frac{d}{dt}\varphi_t} \\
&= \mathcal{L}_{\frac{d}{ds}|_{s=t}\varphi_s} \\
&= \mathcal{L}_{\frac{d}{ds}|_{s=t}(\varphi_t\varphi_t^{-1}\varphi_s)} \\
&= \mathcal{L}_{(\varphi_t)_*\frac{d}{ds}|_{s=t}(\varphi_t^{-1}\varphi_s)} \\
&= \mathcal{L}_{\frac{d}{ds}|_{s=t}(\varphi_t^{-1}\varphi_s)}(\varphi_t)^* \\
&= \mathcal{L}_{Y_t}(\varphi_t)^*
\end{aligned}$$

Montrons la troisième égalité :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^{-1})^* &= \mathcal{L}_{\frac{d}{dt}(\varphi_t^{-1})} \\
&= \mathcal{L}_{-(\varphi_t^{-1})_*(\frac{d}{dt}\varphi_t)\varphi_t^{-1}} \\
&= \mathcal{L}_{-(\varphi_t^{-1})_*(\frac{d}{ds}|_{s=t}\varphi_s)\varphi_t^{-1}} \\
&= -\mathcal{L}_{(\frac{d}{ds}|_{s=t}\varphi_s\varphi_t^{-1})}(\varphi_t^{-1})^* \\
&= -\mathcal{L}_{X_t}(\varphi_t^{-1})^*
\end{aligned}$$

Montrons la quatrième égalité :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^{-1})^* &= \mathcal{L}_{\frac{d}{dt}(\varphi_t^{-1})} \\
&= \mathcal{L}_{-(\varphi_t^{-1})_*(\frac{d}{dt}\varphi_t)\varphi_t^{-1}} \\
&= \mathcal{L}_{-(\varphi_t^{-1})_*(\frac{d}{ds}|_{s=t}\varphi_s)\varphi_t^{-1}} \\
&= (\varphi_t^{-1})^*\mathcal{L}_{-\frac{d}{ds}|_{s=t}\varphi_t^{-1}\circ\varphi_s} \\
&= -(\varphi_t^{-1})^*\mathcal{L}_{Y_t}
\end{aligned}$$

□

Proposition : Soit φ_t une isotopie. Soit α_t une k-forme différentielle dépendante du temps. Alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^*\alpha_t) = \varphi_t^*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_t + \mathcal{L}_{X_t}\alpha_t\right)$$

Preuve : En utilisant la règle de Leibniz, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^*\alpha_t) &= \varphi_t^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_t + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t)^*\alpha_t \\
&= \varphi_t^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_t + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}(\varphi_s)^*\alpha_t \\
&= \varphi_t^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_t + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}(\varphi_s\varphi_t^{-1}\varphi_t)^*\alpha_t \\
&= \varphi_t^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_t + \varphi_t^*\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}(\varphi_s\varphi_t^{-1})^*\alpha_t \\
&= \varphi_t^*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_t + \mathcal{L}_{X_t}\alpha_t\right)
\end{aligned}$$

□

Remarque : Cette dernière proposition nous permet de retrouver certaines égalités précédentes. En effet, si $\alpha_t = \alpha$, on retrouve la première égalité de la proposition précédente :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t^*\alpha = \varphi_t^*\mathcal{L}_{X_t}\alpha$$

Si $\alpha_t = (\varphi_t^{-1})^*\alpha$, on retrouve la troisième égalité de la proposition précédente :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi_t^{-1})^*\alpha = -\mathcal{L}_{X_t}(\varphi_t^{-1})^*\alpha$$

7 Action symplectique, application moment et réduction symplectique

7.1 Rappels symplectiques

Définition : Une *forme symplectique* $\omega \in \Omega^2(M)$ sur M est une 2-forme différentielle fermée non dégénérée.

Définition : Une *variété symplectique* (M,ω) est une variété lisse M munie d'une forme symplectique ω.

Définition : Le *champ vectoriel hamiltonien* $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ d'un hamiltonien $H \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ est défini implicitement par l'*équation d'Hamilton* :

$$\iota_{X_H}\omega = -\mathrm{d}H$$

Définition : Le *crochet de Poisson* sur une variété symplectique (M,ω) est par définition

$$\begin{aligned}\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M;\mathbb{R}) \times C^\infty(M;\mathbb{R}) &\to C^\infty(M;\mathbb{R})\\ (H_1,H_2) &\mapsto \{H_1,H_2\} := -\omega(X_{H_1},X_{H_2})\end{aligned}$$

Remarque : Le crochet de Poisson fait de $C^\infty(M;\mathbb{R})$ une algèbre dite *algèbre de Poisson*.

7.2 Action de groupe symplectique

Définition : Le *groupe des symplectomorphismes* d'une variété symplectique (M, ω) est par définition :

$$\mathrm{Symp}(M, \omega) = \{g \in \mathrm{Diff}(M) | g^* \omega = \omega\} < \mathrm{Diff}(M)$$

Définition : Une *action de groupe symplectique* par la gauche (resp. par la droite) d'un groupe G sur (M, ω) est un homomorphisme (resp. anti-homomorphisme)

$$\Phi : G \to \mathrm{Symp}(M, \omega)$$

Remarque : Tout comme l'algèbre de Lie de $\mathrm{Diff}(M)$ est l'ensemble $\mathfrak{X}(M)$ des champs vectoriels sur M, l'algèbre de Lie de $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ est l'ensemble $\mathfrak{X}^\omega(M)$ des *champs vectoriels symplectiques* sur M :

$$\mathfrak{X}^\omega(M) := \{X \in \mathfrak{X}(M) | \mathcal{L}_X \omega = 0\}$$

Remarque : Si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, une action symplectique $\Phi : G \to \mathrm{Symp}(M, \omega)$ induit une application

$$\begin{aligned} \Phi_*|_e : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{X}^\omega(M) \\ \xi &\mapsto \xi^* \end{aligned}$$

qui envoie $\xi \in \mathfrak{g}$ à son champ vectoriel fondamental symplectique ξ^* sur M.

7.3 Action hamiltonienne et application moment

Définition : Soit G un groupe de Lie et (M, ω) une variété symplectique. Une action symplectique $\Phi : G \to \mathrm{Symp}(M, \omega)$ est dite *hamiltonienne* s'il existe une application

$$\mu : M \to \mathfrak{g}^*$$

dite *application moment* vérifiant

$$X_{\langle \mu, \xi \rangle} = \xi^*, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}$$

et qui est Ad^*-équivariante, i.e. pour tout $g \in G$ et tout $x \in M$:

$$\mu|_{g \cdot x} = \mathrm{Ad}^*_g \mu|_x \quad \text{(si } \Phi \text{ agit par la gauche)}$$

$$\mu|_{x \cdot g} = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} \mu|_x \quad \text{(si } \Phi \text{ agit par la droite)}$$

Le quadruple (M, ω, G, μ) est alors dit être un G*-espace hamiltonien*.

Remarque : La version infinitésimale de l'équivariance est :

$$(\mathrm{d}\mu)|_x(\xi^*) = \mathrm{ad}^*_\xi \mu|_x \quad \text{(si } \Phi \text{ agit par la gauche)}$$

$$(\mathrm{d}\mu)|_x(\xi^*) = -\mathrm{ad}^*_\xi \mu|_x \quad \text{(si } \Phi \text{ agit par la droite)}$$

Remarque : Lorsque G est abélien, la représentation adjointe est triviale. La condition d'équivariance sur μ l'implique alors G-invariante sur M.

Remarque : À toute application moment $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ correspond naturellement, par curryfication, une *application comoment* $\mu^* : \mathfrak{g} \to C^\infty(M; \mathbb{R})$. Explicitement, elle est donnée par $(\mu^*(\xi))|_x = \langle \mu|_x, \xi \rangle$ pour tous $x \in M, \xi \in \mathfrak{g}$.

Proposition : L'application comoment μ^* est un (anti-)homomorphisme d'algèbres allant de l'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ à l'algèbre de Poisson $(C^\infty(M; \mathbb{R}), \{\,\cdot\,,\,\cdot\,\})$. C'est-à-dire, pour tous $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$ on a :

$$\mu^*([\xi_1, \xi_2]) = \{\mu^*(\xi_1), \mu^*(\xi_2)\}, \quad \text{(si } \Phi \text{ agit par la gauche)}$$

$$\mu^*([\xi_1, \xi_2]) = -\{\mu^*(\xi_1), \mu^*(\xi_2)\}, \quad \text{(si } \Phi \text{ agit par la droite)}$$

Preuve : Fixons $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$. Il suffit de faire le calcul pour l'action par la gauche :

$$\begin{aligned}
\mu^*([\xi_1, \xi_2]) &= \langle \mu, [\xi_1, \xi_2] \rangle \\
&= \langle \mu, \mathrm{ad}_{\xi_1}(\xi_2) \rangle \\
&= -\langle \mathrm{ad}^*_{\xi_1} \mu, \xi_2 \rangle \\
&= -\langle (\mathrm{d}\mu)|_x(\xi_1^*), \xi_2 \rangle \\
&= -(\mathrm{d}\langle \mu, \xi_2 \rangle)|_x(\xi_1^*) \\
&= -\iota_{\xi_1^*}(\mathrm{d}\langle \mu, \xi_2 \rangle)|_x \\
&= \iota_{\xi_1^*}\omega|_x(X_{\langle \mu, \xi_2 \rangle}, \cdot) \\
&= \omega|_x(X_{\langle \mu, \xi_2 \rangle}, \xi_1^*) \\
&= \omega|_x(X_{\langle \mu, \xi_2 \rangle}, X_{\langle \mu, \xi_1 \rangle}) \\
&= -\omega|_x(X_{\langle \mu, \xi_1 \rangle}, X_{\langle \mu, \xi_2 \rangle}) \\
&= \{\langle \mu, \xi_1 \rangle, \langle \mu, \xi_2 \rangle\} \\
&= \{\mu^*(\xi_1), \mu^*(\xi_2)\}
\end{aligned}$$

□

Remarque : Cette dernière proposition se réécrit en termes d'application moment $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ comme :

$$\langle \mu, [\xi_1, \xi_2] \rangle = \{\langle \mu, \xi_1 \rangle, \langle \mu, \xi_2 \rangle\}, \quad \text{(si } \Phi \text{ agit par la gauche)}$$

$$\langle \mu, [\xi_1, \xi_2] \rangle = -\{\langle \mu, \xi_1 \rangle, \langle \mu, \xi_2 \rangle\}, \quad \text{(si } \Phi \text{ agit par la droite)}$$

7.4 Produit cartésien et action de groupe symplectique

Proposition : Soient

$$\Phi_1 : G \to \mathrm{Symp}(M_1, \omega_1)$$
$$\Phi_2 : G \to \mathrm{Symp}(M_2, \omega_2)$$

deux actions symplectiques. Alors

$$\Phi := \Phi_1 \times \Phi_2 : G \to \mathrm{Diff}(M_1 \times M_2)$$

agit symplectiquement sur $(M := M_1 \times M_2, \omega := \omega_1 \oplus (-\omega_2))$.

Preuve : Soit $g \in G$. Soit $x := (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$. Soient $v := (v_1, v_2), w := (w_1, w_2) \in T_{(x_1,x_2)} M_1 \times M_2$. Alors :

$$\begin{aligned}
& (\Phi_g^* \omega)|_x(v, w) \\
= \ & \omega|_{\Phi_g(x)}((\Phi_g)_* v, (\Phi_g)_* w) \\
= \ & \omega|_{\Phi_g(x)}((\Phi_{1,g} \times \Phi_{2,g})_*(v_1, v_2), (\Phi_{1,g} \times \Phi_{2,g})_*(w_1, w_2)) \\
= \ & (\omega_1 \oplus (-\omega_2))|_{(\Phi_{1,g}(x_1), \Phi_{2,g}(x_2))}(((\Phi_{1,g})_* v_1, (\Phi_{2,g})_* v_2), ((\Phi_{1,g})_* w_1, (\Phi_{2,g})_* w_2)) \\
= \ & \omega_1|_{\Phi_{1,g}(x_1)}((\Phi_{1,g})_* v_1, (\Phi_{1,g})_* w_1) - \omega_2|_{\Phi_{2,g}(x_2)}((\Phi_{2,g})_* v_2, (\Phi_{2,g})_* w_2) \\
= \ & (\Phi_{1,g}^* \omega_1)|_{x_1}(v_1, w_1) - (\Phi_{2,g}^* \omega_2)|_{x_2}(v_2, w_2) \\
= \ & \omega_1|_{x_1}(v_1, w_1) - \omega_2|_{x_2}(v_2, w_2) \\
= \ & (\omega_1 \oplus (-\omega_2))|_{(x_1,x_2)}((v_1, v_2), (w_1, w_2)) \\
= \ & \omega|_x(v, w)
\end{aligned}$$

□

Remarque : On aurait aussi pu prendre $\omega_1 \oplus \omega_2$.

Proposition : Soient $\Phi_1 : G \to \mathrm{Symp}(M_1, \omega_1)$ et $\Phi_2 : G \to \mathrm{Symp}(M_2, \omega_2)$ deux actions hamiltoniennes d'applications moment $\mu_1 : M_1 \to \mathfrak{g}^*$ et $\mu_2 : M_2 \to \mathfrak{g}^*$ qui agissent soit simultanément à gauche soit simultanément à droite. Alors l'action $\Phi_1 \times \Phi_2 : G \to \mathrm{Symp}(M := M_1 \times M_2, \omega := \omega_1 \oplus (-\omega_2))$ est non seulement symplectique mais hamiltonienne d'application moment $\mu := \mu_1 - \mu_2$, i.e. $\mu|_{(x_1,x_2)} := \mu_1|_{x_1} - \mu_2|_{x_2}$.

Preuve : Sans pertes de généralités, supposons que les actions Φ_1 et Φ_2 agissent simultanément par la gauche. Montrons d'abord que μ est G-équivariante :

$$\begin{aligned}
\mu|_{g\cdot(x_1,x_2)} &= \mu|_{(g\cdot x_1, g\cdot x_2)} \\
&= \mu_1|_{g\cdot x_1} - \mu_2|_{g\cdot x_2} \\
&= \mathrm{Ad}_g^*\mu_1|_{x_1} - \mathrm{Ad}_g^*\mu_2|_{x_2} \\
&= \mathrm{Ad}_g^*\left(\mu_1|_{x_1} - \mu_2|_{x_2}\right) \\
&= \mathrm{Ad}_g^*\mu|_{(x_1,x_2)}
\end{aligned}$$

Montrons ensuite que pour $\xi \in \mathfrak{g}$ on a $\xi^* = X_{\langle\mu,\xi\rangle}$:

$$\begin{aligned}
\omega(\xi^*|_{M_1\times M_2},\cdot) &= \omega((\xi^*|_{M_1}) \oplus (\xi^*|_{M_2}),\cdot) \\
&= \omega_1((\xi^*|_{M_1}),\cdot) \oplus -\omega_2((\xi^*|_{M_2}),\cdot) \\
&= \omega_1(X_{\langle\mu_1,\xi\rangle}|_{M_1},\cdot) \oplus -\omega_2(X_{\langle\mu_2,\xi\rangle}|_{M_2},\cdot) \\
&= -\mathrm{d}\langle\mu_1,\xi\rangle \oplus \mathrm{d}\langle\mu_2,\xi\rangle \\
&= \langle -\mathrm{d}\mu_1 \oplus \mathrm{d}\mu_2,\xi\rangle \\
&= \langle -\mathrm{d}\mu,\xi\rangle \\
&= -\mathrm{d}\langle\mu,\xi\rangle \\
&= \omega(X_{\langle\mu,\xi\rangle}|_{M_1\times M_2},\cdot)
\end{aligned}$$

L'égalité recherchée $\xi^*|_{M_1\times M_2} = X_{\langle\mu,\xi\rangle}|_{M_1\times M_2}$ découle de la non dégénérescence de ω. □

Remarque : Si on avait eu $\omega = \omega_1 \oplus \omega_2$ alors il aurait fallu prendre $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

7.5 Préliminaires coadjoints :

Soit G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$. On fait agir G sur sur $\mathfrak{g}^*$ via la représentation coadjointe :

$$\mathrm{Ad}^* : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^*);\ g \mapsto \mathrm{Ad}^*_g, \quad \text{(action par la gauche)}$$

$$\mathrm{Ad}^*_{\cdot^{-1}} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}^*),\ g \mapsto \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} \quad \text{(action par la droite)}$$

Ainsi, à tout $\xi \in \mathfrak{g}$ est associé un champ vectoriel fondamental ξ^* sur $\mathfrak{g}^*$:

$$\xi^* = (\mathrm{Ad}^*)_*|_e(\xi) = \mathrm{ad}^*_\xi \in \mathfrak{X}(\mathfrak{g}^*), \quad \text{(action par la gauche)}$$

$$\xi^* = -(\mathrm{Ad}^*)_*|_e(\xi) = -\mathrm{ad}^*_\xi \in \mathfrak{X}(\mathfrak{g}^*), \quad \text{(action par la droite)}$$

Remarque : Comme $\mathfrak{g}^*$ est un espace vectoriel, $T_\eta\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*$ pour tout $\eta \in \mathfrak{g}^*$.

Proposition : Soient $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$ et $\eta \in \mathfrak{g}^*$. Alors le champ vectoriel fondamental $\xi^* \in \mathfrak{X}(\mathfrak{g}^*)$ vérifie :

$$\langle \xi_1^*|_\eta, \xi_2\rangle = -\langle \eta, [\xi_1, \xi_2]\rangle, \quad \text{(action par la gauche)}$$

$$\langle \xi_1^*|_\eta, \xi_2\rangle = \langle \eta, [\xi_1, \xi_2]\rangle, \quad \text{(action par la droite)}$$

Preuve : Pour $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$ et $\eta \in \mathfrak{g}^*$, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\langle \xi_1^*|_\eta, \xi_2\rangle &= \langle ((\mathrm{Ad}^*)_*|_e(\xi_1))|_\eta, \xi_2\rangle \\
&= \langle \mathrm{ad}^*_{\xi_1}|_\eta, \xi_2\rangle \\
&= \langle \mathrm{ad}^*_{\xi_1}(\eta), \xi_2\rangle \\
&= -\langle \eta, \mathrm{ad}_{\xi_1}\xi_2\rangle \\
&= -\langle \eta, [\xi_1, \xi_2]\rangle
\end{aligned}$$

□

7.6 Orbite coadjointe :

Définition : L'*orbite coadjointe* de $\eta \in \mathfrak{g}^*$ est par définition

$$\mathcal{O}_\eta := \mathrm{Ad}^*_G(\eta) := \{\mathrm{Ad}^*_g(\eta) | g \in G\} \subset \mathfrak{g}^*$$

Remarque : En considérant le stabilisateur

$$\mathrm{Stab}(\eta) := \{g \in G | \mathrm{Ad}^*_g(\eta) = \eta\} < G$$

on peut aussi exprimer l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_\eta$ de manière intrinsèque via la bijection

$$G/\mathrm{Stab}(\eta) \to \mathcal{O}_\eta; \quad [g] \mapsto \mathrm{Ad}^*_g(\eta)$$

où $[g] = \{hgh^{-1} | h \in \mathrm{Stab}(\eta)\}$ est la classe d'équivalence de g. En particulier, on a l'isomorphisme d'espace vectoriels

$$\mathfrak{g}/\mathrm{stab}(\eta) \to T_\eta \mathcal{O}_\eta; \quad [\xi] \mapsto \mathrm{ad}^*_\xi|_\eta$$

où

$$\mathrm{stab}(\eta) := \mathrm{Lie}(\mathrm{Stab}(\eta)) := \{\xi \in \mathfrak{g} | \mathrm{ad}^*_\xi \eta = \eta\} \subset \mathfrak{g}$$

Autrement dit, les champs vectoriels fondamentaux engendrent le tangent des orbites coadjointes.

Remarque : J'écrirai plus simplement $\mathcal{O}$ au lieu de $\mathcal{O}_\eta$

Corollaire : Tout $v \in T_\eta \mathcal{O}$ admet un $\xi \in \mathfrak{g}$ tel que

$$v = \xi^*|_\eta = \mathrm{ad}^*_\xi \eta, \quad \text{(action par la gauche)}$$

$$v = \xi^*|_\eta = -\mathrm{ad}^*_\xi \eta, \quad \text{(action par la droite)}$$

Ce ξ est défini à $\mathrm{stab}(\eta)$ près.

Proposition : Pour $\eta \in \mathcal{O}$ et $h \in G$, on a :

$$\mathrm{Stab}(\mathrm{Ad}^*_h \eta) = \mathrm{Ad}_h \mathrm{Stab}(\eta)$$

Preuve : On calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Stab}(\mathrm{Ad}_h^*\eta) &= \{g \in G | \mathrm{Ad}_g^*(\mathrm{Ad}_h^*\eta) = \mathrm{Ad}_h^*\eta\} \\
&= \{g \in G | (\mathrm{Ad}_{h^{-1}}^*\mathrm{Ad}_g^*\mathrm{Ad}_h^*)\eta = \eta\} \\
&= \{g \in G | \mathrm{Ad}_{h^{-1}gh}^*\eta = \eta\} \\
&= \{hgh^{-1} \in G | \mathrm{Ad}_g^*\eta = \eta\} \\
&= \mathrm{Ad}_h\mathrm{Stab}(\eta)
\end{aligned}$$

□

Remarque : $\mathcal{O}$ un G-espace homogène, i.e. l'action coadjointe de G sur $\mathcal{O}$ est transitive. En effet, l'action coadjointe de G sur $\mathcal{O}$ est forcément transitive car $\mathcal{O}$ est une G-orbite.

Remarque : Les $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ sont des sous-variétés lisses injectivement immergées qui ne sont pas toujours plongées. Si Ad^* agit proprement, alors les $\mathcal{O}$ sont plongées. C'est par exemple le cas lorsque G est compact. Voir *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Marsden et Ratiu, p. 467 (selon la version du 15 juillet 1998 à 18h02). Ils mentionnent un exemple de Kirillov de 1976 où l'orbite coadjointe n'est pas une sous-variété plongée.

7.7 Forme symplectique $\omega_{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O}$:

Remarque : À tout $\eta \in \mathfrak{g}^*$ correspond une forme bilinéaire antisymétrique

$$\begin{aligned} B_\eta : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\to \mathbb{R} \\ (\xi_1, \xi_2) &\mapsto B_\eta(\xi_1, \xi_2) := \langle \eta, [\xi_1, \xi_2] \rangle \end{aligned}$$

Proposition : $\ker B_\eta = \mathrm{stab}(\eta)$.

Preuve : Soit $\xi_1 \in \mathfrak{g}$. Alors pour $\xi_2 \in \mathfrak{g}$ quelconque, on a :

$$B_\eta(\xi_1, \xi_2) = \langle \eta, [\xi_1, \xi_2] \rangle = \langle \eta, \mathrm{ad}_{\xi_1}(\xi_2) \rangle = -\langle \mathrm{ad}^*_{\xi_1} \eta, \xi_2 \rangle$$

Comme ξ_2 est quelconque en $\mathfrak{g}$, il suit que $B_\eta(\xi_1, \xi_2)$ est nul si et seulement si $\mathrm{ad}^*_{\xi_1}\eta$ est nul. C'est-à-dire, $B_\eta(\xi_1, \cdot\,) = 0$ si et seulement si $\xi_1 \in \mathrm{stab}(\eta)$. D'où $\ker B_\eta = \mathrm{stab}(\eta)$. □

Proposition : Soit $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite coadjointe. Alors en tout $\eta \in \mathcal{O}$, la forme bilinéaire B_η induit une forme bilinéaire bien définie, antisymétrique et non dégénérée

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{O}}|_\eta : T_\eta \mathcal{O} \times T_\eta \mathcal{O} &\to \mathbb{R} \\ (\xi_1^*|_\eta, \xi_2^*|_\eta) &\mapsto \omega_{\mathcal{O}}|_\eta(\xi_1^*|_\eta, \xi_2^*|_\eta) := B_\eta(\xi_1, \xi_2) \end{aligned}$$

Preuve : Fixons $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite coadjointe et $\eta \in \mathcal{O}$. Comme $\ker B_\eta = \mathrm{stab}(\eta)$, la forme bilinéaire antisymétrique B_η descend à une forme bilinéaire bien définie, antisymétrique et non dégénérée

$$\begin{aligned} B_\eta : (\mathfrak{g}/\mathrm{stab}(\eta)) \times (\mathfrak{g}/\mathrm{stab}(\eta)) &\to \mathbb{R} \\ ([\xi_1], [\xi_2]) &\mapsto B_\eta([\xi_1], [\xi_2]) = B_\eta(\xi_1, \xi_2) \end{aligned}$$

De l'isomorphisme $T_\eta \mathcal{O} \cong \mathfrak{g}/\mathrm{stab}(\eta)$ reliant $\xi^*|_\eta$ et $[\xi]$, on trouve ce qu'on cherche. □

Proposition : $\omega_{\mathcal{O}}$ est G-invariante.

Preuve : La G-invariance de $\omega_{\mathcal{O}}$ découle du fait que Ad_g sort du crochet $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ en B_η et que l'appariement de dualité vérifie

$$\langle \mathrm{Ad}^*_g \eta, \mathrm{Ad}_g \xi \rangle = \langle \eta, \xi \rangle, \quad \forall g \in G, \eta \in \mathfrak{g}^*, \xi \in \mathfrak{g}$$

□

Proposition : $\omega_O \in \Omega^2(O)$ est fermée.

Preuve : La fermeture de ω_O découle du fait que pour $v_k = \xi_k^*|_\eta = \mathrm{ad}^*_{\xi_k}|_\eta$, $k = 1, 2, 3$, avec $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{g}$ fixés, on a :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\omega_O)|_\eta(v_1, v_2, v_3) &= v_1\omega_O(v_2, v_3) + v_2\omega_O(v_3, v_1) + v_3\omega_O(v_1, v_2) \\
&\quad +\omega_O(v_1, [v_2, v_3]) + \omega_O(v_2, [v_3, v_1]) + \omega_O(v_3, [v_1, v_2]) \\
&= v_1\langle\eta, [\xi_2, \xi_3]\rangle + v_2\langle\eta, [\xi_3, \xi_1]\rangle + v_3\langle\eta, [\xi_1, \xi_2]\rangle \\
&\quad +\langle\eta, [\xi_1, [\xi_2, \xi_3]]\rangle + \langle\eta, [\xi_2, [\xi_3, \xi_1]]\rangle + \langle\eta, [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]]\rangle \\
&= \langle v_1\eta, [\xi_2, \xi_3]\rangle + \langle v_2\eta, [\xi_3, \xi_1]\rangle + \langle v_3\eta, [\xi_1, \xi_2]\rangle \\
&\quad +\langle\eta, [\xi_1, [\xi_2, \xi_3]] + [\xi_2, [\xi_3, \xi_1]] + [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]]\rangle \\
&= \langle\mathrm{ad}^*_{\xi_1}\eta, [\xi_2, \xi_3]\rangle + \langle\mathrm{ad}^*_{\xi_2}\eta, [\xi_3, \xi_1]\rangle + \langle\mathrm{ad}^*_{\xi_3}\eta, [\xi_1, \xi_2]\rangle \\
&\quad +\langle\eta, 0\rangle \\
&= -\langle\eta, \mathrm{ad}_{\xi_1}[\xi_2, \xi_3]\rangle - \langle\eta, \mathrm{ad}_{\xi_2}[\xi_3, \xi_1]\rangle - \langle\eta, \mathrm{ad}_{\xi_3}[\xi_1, \xi_2]\rangle \\
&= -\langle\eta, [\xi_1, [\xi_2, \xi_3]]\rangle - \langle\eta, [\xi_2, [\xi_3, \xi_1]]\rangle - \langle\eta, [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]]\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ici j'ai utilisé l'identité de Jacobi deux fois. □

Corollaire : L'orbite coadjointe $O \subset \mathfrak{g}^*$ est naturellement munie d'une forme symplectique $\omega_O \in \Omega^2(O)$ qui est G-invariante et donnée par :

$$\omega_O|_\eta(\xi_1^*|_\eta, \xi_2^*|_\eta) := B_\eta(\xi_1, \xi_2), \quad \forall\eta \in O,\ \forall\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$$

où $\xi_1^* = \mathrm{ad}^*_{\xi_1}$ et $\xi_2^* = \mathrm{ad}^*_{\xi_2}$ sont les champs vectoriels fondamentaux de $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$.

7.8 Application moment μ de la G-action sur $\mathcal{O}$:

Proposition : Soit $\mathcal{O}$ une orbite coadjointe. Alors les actions de groupe symplectiques

$$\Phi : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O});\ \Phi_g = \mathrm{Ad}_g^* \quad \text{(par la gauche)}$$
$$\Phi : G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O});\ \Phi_g = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}^* \quad \text{(par la droite)}$$

de G sur $\mathcal{O}$ sont hamiltoniennes d'application moment respectivement données par :

$$\mu : \mathcal{O} \hookrightarrow \mathfrak{g}^*;\ \mu|_\eta = -\eta \quad \text{(par la gauche)}$$
$$\mu : \mathcal{O} \hookrightarrow \mathfrak{g}^*;\ \mu|_\eta = \eta \quad \text{(par la droite)}$$

Preuve : Il suffit de faire la preuve pour l'action par la droite. Fixons $\mathcal{O}$ une orbite coadjointe. Soit $\eta \in \mathcal{O}$ quelconque. D'abord, μ est équivariante :

$$\mu|_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}^*\eta} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}^*\eta = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}^*\mu|_\eta$$

Montrons ensuite que μ est bel et bien l'application moment correspondante à l'action coadjointe (par la droite) de G sur $\mathcal{O}$. Soient $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$ et $\eta \in \mathcal{O}$ quelconques. Il suffit de montrer que $X_{\langle\mu,\xi_1\rangle}|_\eta = \xi_1^*|_\eta$ où $\xi_1^*|_\eta = -\mathrm{ad}_{\xi_1}^*\eta$. On trouve directement :

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{ad}_{\xi_2}^*\eta, \xi_1\rangle = -\langle\eta, \mathrm{ad}_{\xi_2}\xi_1\rangle \\
\implies\ & -\langle\xi_2^*\eta, \xi_1\rangle = -\langle\eta, [\xi_2, \xi_1]\rangle \\
\implies\ & -\langle\xi_2^*\mu|_\eta, \xi_1\rangle = \langle\eta, [\xi_1, \xi_2]\rangle \\
\implies\ & -(\mathrm{d}\langle\mu, \xi_1\rangle)|_\eta(\xi_2^*) = \omega_{\mathcal{O}}|_\eta(\xi_1^*|_\eta, \xi_2^*|_\eta) \\
\implies\ & \omega_{\mathcal{O}}|_\eta(X_{\langle\mu,\xi_1\rangle}|_\eta, \xi_2^*|_\eta) = \omega_{\mathcal{O}}|_\eta(\xi_1^*|_\eta, \xi_2^*|_\eta)
\end{aligned}$$

Par non dégénérescence de $\omega_{\mathcal{O}}$, ceci implique $X_{\langle\mu,\xi_1\rangle}|_\eta = \xi_1^*|_\eta$. □

7.9 Réduction de Marsden-Weinstein

Théorème : (Marsden-Weinstein-Meyer, [MS, p.175]) : Soit (M, ω) une variété symplectique. Soit $\Phi : G \to \mathrm{Symp}(M, \omega)$ une action hamiltonienne d'application moment $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ telle que :

- 0 est une valeur régulière de μ (i.e. $\mu^{-1}(0)$ est une sous-variété de M),
- le groupe G agit librement et proprement sur $\mu^{-1}(0)$ (i.e. le quotient $\mu^{-1}(0)/G$ est une variété).

Posons $\iota : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ l'inclusion naturelle de sous-ensemble. Alors :

1. $\mu^{-1}(0)$ est une sous-variété coïsotrope en M,
2. le feuilletage isotrope de $\mu^{-1}(0)$ correspond aux G-orbites en $\mu^{-1}(0)$,
3. $\pi : \mu^{-1}(0) \to N := \mu^{-1}(0)/G$ est un G-fibré principal,
4. N est une variété symplectique (dit *quotient de Marsden-Weinstein*),
5. la forme symplectique ω_N sur N satisfait $\pi^*\omega_N = \iota^*\omega$,
6. la dimension de N est $\dim(N) = \dim M - 2\dim G$.

Remarque : Si G est compact, alors forcément G agit de manière propre sur $\mu^{-1}(0)$.

Preuve : ([MS], p.176) Sans pertes de généralités, supposons que G agisse par la droite sur M. D'abord, $\mu^{-1}(0)$ est une sous-variété, de dimension $\dim M - \dim G$, de M car 0 est une valeur régulière de μ. Montrons que les G-orbites de points en $\mu^{-1}(0)$ sont isotropes. Soient $p \in \mu^{-1}(0)$ et $v_1 = X_{\langle\mu,\xi_1\rangle}, v_2 = X_{\langle\mu,\xi_2\rangle} \in T_p O_p$ pour $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$, où $O_p \subset M$ est la G-orbite de p. Alors :

$$
\begin{aligned}
\omega|_p(v_1, v_2) &= \omega|_p(X_{\langle\mu,\xi_1\rangle}, X_{\langle\mu,\xi_2\rangle}) \\
&= -\{\langle\mu,\xi_1\rangle, \langle\mu,\xi_2\rangle\} \\
&= \langle\mu|_p, [\xi_1, \xi_2]\rangle \\
&= \langle 0, [\xi_1, \xi_2]\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

D'où O_p isotrope. Cette sous-variété isotrope O_p, qui est une G-orbite de p, est forcément de dimension $\dim G$ car G agit librement sur $\mu^{-1}(0)$. Montrons que

$T_p\mathcal{O}_p \subset T_p\mu^{-1}(0)$. Soit $v_1 = X_{\langle\mu,\xi_1\rangle} \in T_p\mathcal{O}_p$ et soit $\xi_2 \in \mathfrak{g}$ quelconque. Alors :

$$\begin{aligned}
\langle (\mathrm{d}\mu)|_p(v_1), \xi_2\rangle &= \mathrm{d}(\langle\mu,\xi_2\rangle)|_p(v_1)\\
&= -\omega|_p(X_{\langle\mu,\xi_2\rangle}, v_1)\\
&= -\omega|_p(X_{\langle\mu,\xi_2\rangle}, X_{\langle\mu,\xi_1\rangle})\\
&= \{\langle\mu,\xi_2\rangle, \langle\mu,\xi_1\rangle\}|_p\\
&= -\langle\mu|_p, [\xi_2,\xi_1]\rangle\\
&= -\langle 0, [\xi_2,\xi_1]\rangle\\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme ξ_2 était quelconque en $\mathfrak{g}$, il suit que $(\mathrm{d}\mu)|_p(v_1) = 0$. D'où $v_1 \in T_p\mu^{-1}(0)$. D'où $T_p\mathcal{O}_p \subset T_p\mu^{-1}(0)$. Montrons que $T_p\mathcal{O}_p \subset (T_p\mu^{-1}(0))^\omega$. Soit $v_1 = X_{\langle\mu,\xi_1\rangle} \in T_p\mathcal{O}_p$ et soit $v_2 \in T_p\mu^{-1}(0)$ quelconque. Alors :

$$\begin{aligned}
\omega|_p(v_1,v_2) &= \omega|_p(X_{\langle\mu,\xi_1\rangle}, v_2)\\
&= -(\mathrm{d}(\langle\mu,\xi_1\rangle))|_p(v_2)\\
&= -\langle(\mathrm{d}\mu)|_p(v_2), \xi_1\rangle\\
&= -\langle 0, \xi_1\rangle\\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où $T_p\mathcal{O}_p \subset (T_p\mu^{-1}(0))^\perp$. Mais $\mathcal{O}_p$ est de même codimension que $\mu^{-1}(0)$. Donc $T_p\mathcal{O}_p = (T_p\mu^{-1}(0))^\perp$. Comme $\mathcal{O}_p$ est isotrope, $\mu^{-1}(0)$ est coïsotrope. Ainsi on a $\mu^{-1}(0)$ qui est coïsotrope, de dimension $\dim M - \dim G$, dont le feuilletage isotrope correspondant a pour feuilles les sous-variétés isotropes $\mathcal{O}_p$, de dimensions $\dim G$. On peut alors passer au quotient symplectique de (coïsotrope)/(feuilletage isotrope) et on obtient une variété symplectique de dimension $\dim M - 2\dim G$. □

7.10 Réduction de Marsden-Weinstein d'orbites coadjointes

Théorème : ([MS, p.176]) : Soit (M, ω) une variété symplectique. Soit $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite coadjointe. Soit $\Phi : G \to \mathrm{Symp}(M, \omega)$ une action hamiltonienne d'application moment $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ telle que :

- chaque point de $\mathcal{O}$ est une valeur régulière de μ (i.e. $\mu^{-1}(\mathcal{O})$ est une sous-variété de M),
- le groupe G agit librement et proprement sur $\mu^{-1}(\mathcal{O})$ (i.e. le quotient $\mu^{-1}(\mathcal{O})/G$ est une variété).

Posons $\iota : \mu^{-1}(\mathcal{O}) \hookrightarrow M$ l'inclusion naturelle de sous-ensemble. Alors :

1. $\pi : \mu^{-1}(\mathcal{O}) \to N := \mu^{-1}(\mathcal{O})/G$ est un G-fibré principal,
2. N est une variété symplectique (dit *quotient de Marsden-Weinstein*),
3. la forme symplectique ω_N sur N satisfait
$$\omega_N|_{[x]}(v_1, v_2) = \omega|_x(v_1, v_2) - \langle \mu|_x, [\xi_1, \xi_2] \rangle$$
pour $v_1, v_2 \in T_x\mu^{-1}(\mathcal{O})$ où $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$ sont choisis de telle sorte que
$$\mathrm{ad}^*_{\xi_1}\mu|_x + (\mathrm{d}\mu)|_x(v_1) = 0 \quad \mathrm{ad}^*_{\xi_2}\mu|_x + (\mathrm{d}\mu)|_x(v_2) = 0$$
4. la dimension de N est $\dim(N) = \dim M + \dim \mathcal{O} - 2 \dim G$.

Preuve : Considérons la variété symplectique $(\tilde{M} := M \times \mathcal{O}, \tilde{\omega} := \omega \oplus (-\omega_{\mathcal{O}}))$ où $\omega_{\mathcal{O}}$ est la forme symplectique sur $\mathcal{O}$ définie plus tôt. Sans pertes de généralités, supposons que l'action de G sur M est par la droite, d'application moment $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$. On considère alors l'action coadjointe hamiltonienne par la droite de G sur $\mathcal{O}$, d'application moment $\mu_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \to \mathfrak{g}^*; \eta \mapsto \eta$. On a alors une action hamiltonienne par la droite de G sur $\tilde{M}$ d'application moment $\tilde{\mu} := \mu - \mu_{\mathcal{O}}$. On remarque alors qu'il y a une bijection naturelle entre $\mu^{-1}(\mathcal{O})$ et $\tilde{\mu}^{-1}(0)$:

$$\begin{aligned}
\mu^{-1}(\mathcal{O}) &= \{x \in M | \mu(x) \in \mathcal{O}\} \\
&\cong \{(x, \eta) \in M \times \mathcal{O} | \mu(x) = \eta\} \\
&= \{(x, \eta) \in M \times \mathcal{O} | \mu(x) = \mu_{\mathcal{O}}(\eta)\} \\
&= \{(x, \eta) \in M \times \mathcal{O} | \mu(x) - \mu_{\mathcal{O}}(\eta) = 0\} \\
&= \{(x, \eta) \in M \times \mathcal{O} | \tilde{\mu}(x, \eta) = 0\} \\
&= \tilde{\mu}^{-1}(0)
\end{aligned}$$

Explicitement, la bijection est donnée par :

$$\begin{aligned} f : \mu^{-1}(\mathcal{O}) &\to \tilde{\mu}^{-1}(0) \\ x &\mapsto (x, \mu(x)) \end{aligned}$$

En effet, pour $x \in \mu^{-1}(0)$ on a :

$$\tilde{\mu}(f(x)) = \tilde{\mu}(x, \mu(x)) = \mu(x) - \mu_{\mathcal{O}}(\mu(x)) = \mu(x) - \mu(x) = 0$$

En utilisant cette bijection, on trouve donc :

$$N = \mu^{-1}(\mathcal{O})/G \cong \tilde{\mu}^{-1}(0)/G$$

On se ramène donc à une réduction de Marsden-Weinstein usuelle démontrée dans la dernière section. Comme la forme symplectique sur $\tilde{M} = M \times \mathcal{O}$ est $\tilde{\omega} = \omega \oplus (-\omega_{\mathcal{O}})$, il suit, que la forme symplectique sur $N = \mu^{-1}(\mathcal{O})/G = \tilde{\mu}^{-1}(0)/G$ est celle ω_N vérifiant

$$\pi^* \omega_N = \iota^* \tilde{\omega}$$

Développons cette dernière égalité. De l'égalité

$$\mu^{-1}(\mathcal{O}) = \{x \in M | \mu(x) \in \mathcal{O}\}$$

et sachant que $T_\eta \mathcal{O} = \{\xi^*|_\eta | \xi \in \mathfrak{g}\}$ où $\xi^*|_\eta = -\mathrm{ad}^*_\xi \eta$, il suit que :

$$\begin{aligned} T_x \mu^{-1}(\mathcal{O}) &= \{v \in T_x M | (\mathrm{d}\mu)|_x(v) \in T_{\mu|_x} \mathcal{O}\} \\ &= \{v \in T_x M | \exists \xi \in \mathfrak{g} : (\mathrm{d}\mu)|_x(v) = \xi^*|_{\mu|_x}\} \\ &= \{v \in T_x M | \exists \xi \in \mathfrak{g} : (\mathrm{d}\mu)|_x(v) = -\mathrm{ad}^*_\xi \mu|_x\} \\ &= \{v \in T_x M | \exists \xi \in \mathfrak{g} : (\mathrm{d}\mu)|_x(v) + \mathrm{ad}^*_\xi \mu|_x = 0\} \end{aligned}$$

Une autre manière de voir les choses est :

$$T_x \mu^{-1}(\mathcal{O}) = \{(v, w) \in T_x M \times T_{\mu|_x} \mathcal{O} |\ (\mathrm{d}\mu)|_x(v) = w, \exists \xi \in \mathfrak{g} : w = \xi^*|_{\mu|_x}\}$$

Ainsi, pour $u_1 = (v_1, w_1), u_2 = (v_2, w_2) \in T_x \mu^{-1}(\mathcal{O})$, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}|_{x,\mu|_x}(u_1, u_2) &= \omega|_x(v_1, v_2) - \omega_{\mathcal{O}}|_{\mu|_x}(w_1, w_2) \\ &= \omega|_x(v_1, v_2) - \omega_{\mathcal{O}}|_{\mu|_x}(\xi_1^*|_{\mu|_x}, \xi_2^*|_{\mu|_x}) \\ &= \omega|_x(v_1, v_2) - \langle \mu|_x, [\xi_1, \xi_2] \rangle \end{aligned}$$

Ainsi, la forme symplectique ω_N vérifie : C'est-à-dire,

$$\begin{array}{rcl} (\pi^*\omega_N)|_x(u_1,u_2) & = & (\iota^*\tilde{\omega})|_x(u_1,u_2) \\ & = & \omega|_x(v_1,v_2) - \langle \mu|_x, [\xi_1,\xi_2] \rangle \end{array}$$

pour $v_1, v_2 \in T_p\mu^{-1}(O)$ où $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$ sont choisis de telle sorte que

$$\mathrm{ad}^*_{\xi_1}\mu|_x + (\mathrm{d}\mu)|_x(v_1) = 0 \quad \mathrm{ad}^*_{\xi_2}\mu|_x + (\mathrm{d}\mu)|_x(v_2) = 0$$

□

Remarque : Ça serait bien de parler un peu des polytopes de Delzant (en ai-je besoin plus bas ?).

8 Rudiments de géométrie riemannienne

8.1 Introduction

Le but de cette section est de rapidement poser quelques égalités utiles en géométrie riemannienne. Ces égalités me seront utiles pour exprimer le laplacien de Hodge de coordonnées locales. En particulier, ceci reliera le laplacien de Hodge d'une fonction à son hessien covariant.

8.2 Diverses dérivées

Soit (X, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n. Considérons des coordonnées locales $\{x^1, ..., x^n\}$ sur un ouvert $U \subset X$. Ces coordonnées induisent une base $\{\partial_i := \partial/\partial x^i\}$ de $T_U X$ et une base duale $\{\mathrm{d}x^i\}$ de $T_U^* X$. La métrique pseudo-riemannienne g s'écrit localement $g|_U = g_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$. Ici la notation d'Einstein sur la sommation sous-entendue des indices répétés est de mise. Considérons la fonction $G := \det[g_{ij}] \in C^\infty(U; \mathbb{R}\backslash\{0\})$. La signature s_g de la métrique g est définie localement par $s_g := \mathrm{sign}(G)$, le signe de G, de sorte que $|G| = s_g G$. La signature est bien définie globalement. Soit $[g^{ij}]$ la matrice inverse de la matrice $[g_{ij}]$. Tout comme $G = \det[g_{ij}]$, on a $G^{-1} = \det[g^{ij}]$.

Proposition :

$$\partial_k G = G g^{ij} \partial_k g_{ij}$$

$$\partial_k (G^{-1}) = G^{-1} g_{ij} \partial_k g^{ij}$$

Preuve : C'est un calcul direct. La preuve devrait être dans [Landau-Lifshitz-2]. TO DO ! ! ! □

Proposition : $g_{ij}\partial_l g^{jk} = -g^{jk}\partial_l g_{ij}$

Preuve : En utilisant le fait que $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$, on calcule directement :

$$0 = \partial_l \delta_i^k = \partial_l (g_{ij} g^{jk}) = (\partial_l g_{ij}) g^{jk} + g_{ij} \partial_l g^{jk}$$

□

Proposition : $\partial_k g^{ij} = -g^{im} g^{jl} \partial_k g_{ml}$.

Preuve : Découle directement de la dernière proposition. □

Proposition : $\partial_k |G|^{1/2} = \frac{1}{2}|G|^{1/2} g^{ij}\partial_k g_{ij} = -\frac{1}{2}|G|^{1/2} g_{ij}\partial_k g^{ij}$

Preuve : Montrons d'abord la première égalité :

$$\begin{aligned}
\partial_k |G|^{1/2} &= \partial_k \sqrt{s_g G} \\
&= \partial_k (s_g G)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}(s_g G)^{-1/2} s_g \partial_k G \\
&= \frac{1}{2}(s_g G)^{-1/2} s_g G g^{ij}\partial_k g_{ij} \\
&= \frac{1}{2}|G|^{-1/2}|G| g^{ij}\partial_k g_{ij} \\
&= \frac{1}{2}|G|^{1/2} g^{ij}\partial_k g_{ij}
\end{aligned}$$

La seconde égalité recherchée découle en utilisant l'avant-dernière proposition. □

Proposition :

$$|G|^{-1/2}\partial_k |G|^{1/2} = \frac{1}{2} g^{ij}\partial_k g_{ij}$$

$$|G|^{1/2}\partial_k |G|^{-1/2} = -\frac{1}{2} g^{ij}\partial_k g_{ij}$$

Preuve : La première égalité se trouve dans la dernière proposition :

$$|G|^{-1/2}\partial_k |G|^{1/2} = \frac{1}{2} g^{ij}\partial_k g_{ij}$$

La seconde égalité découle du fait que :

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_k 1 \\
&= \partial_k (|G|^{-1/2}|G|^{1/2}) \\
&= |G|^{-1/2}\partial_k |G|^{1/2} + |G|^{1/2}\partial_k |G|^{-1/2} \\
&= \frac{1}{2} g^{ij}\partial_k g_{ij} + |G|^{1/2}\partial_k |G|^{-1/2}
\end{aligned}$$

□

8.3 Symboles de Christoffel et connexion de Levi-Civita

Soit ∇ une connexion.

Notation : Posons $\nabla_i := \nabla_{\partial_i}$.

Définition : Il existe des coefficients Γ^k_{ij}, nommés *symboles de Christoffel* de la connexion ∇, tels que :

$$\nabla_i \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k$$

Proposition : On a l'égalité suivante :

$$\nabla_i \mathrm{d}x^k = -\Gamma^k_{ij} \mathrm{d}x^j$$

Preuve : On écrit d'abord $\nabla_i \mathrm{d}x^k = -a^k_{ij} \mathrm{d}x^j$ pour certains coefficients à déterminer a^k_{ij}. En utilisant la règle de Leibniz, on a alors :

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_n(\delta^i_j) \\
&= \nabla_k(\mathrm{d}x^i(\partial_j)) \\
&= (\nabla_k \mathrm{d}x^i)(\partial_j) + \mathrm{d}x^i(\nabla_k \partial_j) \\
&= (-a^i_{km} \mathrm{d}x^m)(\partial_j) + \mathrm{d}x^i(\Gamma^m_{kj} \partial_m) \\
&= -a^i_{km} \delta^m_j + \Gamma^m_{kj} \delta^i_m \\
&= -a^i_{kj} + \Gamma^i_{kj}
\end{aligned}$$

D'où $a^i_{kj} = \Gamma^i_{kj}$. D'où $\nabla_k \mathrm{d}x^i = -\Gamma^i_{kj} \mathrm{d}x^j$. □

Définition : À une métrique g correspond une unique *connexion de Levi-Civita* ∇ qui est :

1. ∇-adaptée, i.e. $\nabla_X g = 0, \ \forall X \in \mathfrak{X}(X)$
2. sans torsion, i.e. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(X)$.

Remarque : Ces deux dernières propriétés peuvent se réécrire de manière équivalente comme :

1. $\nabla_k g = 0, \ \forall k$

2. $\nabla_i\partial_j - \nabla_j\partial_i = 0,\ \forall i, j$.

Proposition : En termes des symboles de Christoffel, l'égalité $\nabla_k g = 0$ équivaut à :

$$0 = \partial_k g_{ij} - g_{mj}\Gamma^m_{ki} - g_{im}\Gamma^m_{kj}$$

et l'égalité $\nabla_i\partial_j - \nabla_j\partial_i$ équivaut à :

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$$

Preuve : On calcule directement la première égalité :

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_k g \\
&= \nabla_k(g_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j) \\
&= (\partial_k g_{ij})\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j + g_{ij}(\nabla_k \mathrm{d}x^i) \otimes \mathrm{d}x^j + g_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes (\nabla_k \mathrm{d}x^j) \\
&= (\partial_k g_{ij})\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j + g_{ij}(-\Gamma^i_{km}\mathrm{d}x^m) \otimes \mathrm{d}x^j + g_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes (-\Gamma^j_{km}\mathrm{d}x^m) \\
&= (\partial_k g_{ij})\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j - g_{ij}\Gamma^i_{km}\mathrm{d}x^m \otimes \mathrm{d}x^j - g_{ij}\Gamma^j_{km}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^m \\
&= (\partial_k g_{ij})\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j - g_{mj}\Gamma^m_{ki}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j - g_{im}\Gamma^m_{kj}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \\
&= (\partial_k g_{ij} - g_{mj}\Gamma^m_{ki} - g_{im}\Gamma^m_{kj})\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j
\end{aligned}$$

On calcule ensuite la seconde égalité :

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_i\partial_j - \nabla_j\partial_i \\
&= \Gamma^k_{ij}\partial_k - \Gamma^k_{ji}\partial_k \\
&= (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\partial_k
\end{aligned}$$

□

Définition : Les *symboles de Christoffel de g* sont, par définition, les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita de g.

Proposition : Les symboles de Christoffel Γ^k_{ij} de g satisfont :

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{km}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij})$$

Preuve : Il suffit de montrer que de tels coefficients Γ^k_{ij} satisfont les deux égalités de la dernière proposition. L'égalité portant sur la torsion est évidente car ici

$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Ensuite, en utilisant ces trois égalités :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{km}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij})$$

$$\Gamma_{ki}^m = \frac{1}{2}g^{ml}(\partial_k g_{il} + \partial_i g_{kl} - \partial_l g_{ki})$$

$$\Gamma_{kj}^m = \frac{1}{2}g^{ml}(\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{kl} - \partial_l g_{kj})$$

on montre que les coefficients satisfont la seconde égalité de la dernière proposition :

$$\begin{aligned}
& \partial_k g_{ij} - g_{mj}\Gamma_{ki}^m - g_{im}\Gamma_{kj}^m \\
= \; & \partial_k g_{ij} - g_{mj}\frac{1}{2}g^{ml}(\partial_k g_{il} + \partial_i g_{kl} - \partial_l g_{ki}) - g_{im}\frac{1}{2}g^{ml}(\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{kl} - \partial_l g_{kj}) \\
= \; & \partial_k g_{ij} - \delta_j^l\frac{1}{2}(\partial_k g_{il} + \partial_i g_{kl} - \partial_l g_{ki}) - \delta_i^l\frac{1}{2}(\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{kl} - \partial_l g_{kj}) \\
= \; & \partial_k g_{ij} - \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ki}) - \frac{1}{2}(\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}) \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

□

8.4 Autres propriétés des symboles de Christoffel de g

Remarque : Comme on vient de le voir, les symboles de Christoffel de la métrique pseudo-riemannienne g satisfont :

$$0 = \partial_k g_{ij} - g_{mj}\Gamma_{ki}^m - g_{im}\Gamma_{kj}^m$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{km}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij})$$

Proposition : On a :

$$g^{ij}\Gamma_{ij}^k = -|G|^{-1/2}\partial_l(|G|^{1/2}g^{lk})$$

Preuve : En utilisant ces deux égalités :

$$g^{jm}\partial_l g_{ij} = -g_{ij}\partial_l g^{jm}$$

$$\partial_k |G|^{1/2} = \frac{1}{2}|G|^{1/2} g^{ij}\partial_k g_{ij} = -\frac{1}{2}|G|^{1/2} g_{ij}\partial_k g^{ij}$$

on calcule directement :

$$\begin{aligned}
g^{ij}\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2} g^{ij} g^{km}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) \\
&= \frac{1}{2} g^{ij} g^{km}(2\partial_i g_{jm} - \partial_m g_{ij}) \\
&= g^{ij} g^{km}\partial_i g_{jm} - \frac{1}{2} g^{ij} g^{km}\partial_m g_{ij} \\
&= |G|^{-1/2}\left(|G|^{1/2} g^{ij} g^{km}\partial_i g_{jm} - \frac{1}{2} g^{km}|G|^{1/2} g^{ij}\partial_m g_{ij}\right) \\
&= |G|^{-1/2}\left(|G|^{1/2} g^{ij} g^{mk}\partial_i g_{jm} - g^{km}\partial_m |G|^{1/2}\right) \\
&= |G|^{-1/2}\left(-|G|^{1/2} g^{ij} g_{jm}\partial_i g^{mk} - g^{mk}\partial_m |G|^{1/2}\right) \\
&= -|G|^{-1/2}\left(|G|^{1/2} g^{ij} g_{jm}\partial_i g^{mk} + g^{mk}\partial_m |G|^{1/2}\right) \\
&= -|G|^{-1/2}\left(|G|^{1/2} m^i_m\partial_i g^{mk} + g^{mk}\partial_m |G|^{1/2}\right) \\
&= |G|^{-1/2}\left(|G|^{1/2}\partial_m g^{mk} + g^{mk}\partial_m |G|^{1/2}\right) \\
&= |G|^{-1/2}\partial_m\left(|G|^{1/2} g^{mk}\right)
\end{aligned}$$

□

Proposition :

$$\Gamma^k_{kj} = \frac{1}{2} g^{km}\partial_j g_{km}$$

(ici je suppose que les k sont sommés).

Preuve : Suite d'implications :

$$\begin{aligned}
& g^{mk}\partial_k g_{jm} = g^{km}\partial_m g_{jk} = g^{mk}\partial_m g_{kj} \\
\implies\quad & g^{mk}(\partial_k g_{jm} - \partial_m g_{kj}) = 0 \\
\implies\quad & \Gamma^k_{kj} = \frac{1}{2} g^{mk}(\partial_k g_{jm} + \partial_j g_{km} - \partial_m g_{kj}) = \frac{1}{2} g^{km}\partial_j g_{km}
\end{aligned}$$

□

Proposition : On a :
$$\Gamma^k_{kj} = |G|^{-1/2}\partial_j |G|^{1/2}$$

Preuve : Plus haut, j'ai montré que :

$$\partial_k |G|^{1/2} = \frac{1}{2}|G|^{1/2} g^{ij}\partial_k g_{ij}$$

Ça se reformule comme :

$$g^{ij}\partial_k g_{ij} = 2|G|^{-1/2}\partial_k |G|^{1/2}$$

Par la dernière proposition, on trouve donc :

$$\begin{aligned}\Gamma^k_{kj} &= \frac{1}{2}g^{km}\partial_j g_{km}\\ &= \frac{1}{2}2|G|^{-1/2}\partial_j |G|^{1/2}\\ &= |G|^{-1/2}\partial_j |G|^{1/2}\end{aligned}$$

□

8.5 Opérateur de Laplace-Beltrami

Il est possible de définir un *tenseur hessien* ainsi qu'un *laplacien* sur les sections de fibrés. En effet, pour σ une section, on pose :

$$H = \nabla\nabla\sigma$$

$$\Delta_{\text{LB}}\sigma = g^{ij}H_{ij} = g^{ij}H(\partial_i,\partial_j) = g^{ij}(\nabla\nabla\sigma)(\partial_i,\partial_j)$$

Ce laplacien est nommé *opérateur de Laplace-Beltrami*. Par abus de langage, il est souvent dénoté :
$$\Delta_{\text{LB}} = g^{ij}\nabla_i\nabla_j$$

Sur les fonctions, on a explicitement :

$$H_{ij} = \partial_i\partial_j f - \Gamma^k_{ij}\partial_k f$$

$$\Delta_{\mathrm{LB}} f = g^{ij} H_{ij} = g^{ij} \left(\partial_i \partial_j f - \Gamma_{ij}^k \partial_k f \right)$$

Plus bas, il sera aussi question du laplacien de Hodge de Rham $\Delta_{\mathrm{HdR}} = \delta \mathrm{d} + \mathrm{d}\delta$. Sur les fonctions, on a :

$$\Delta_{\mathrm{LB}} = -\Delta_{\mathrm{HdR}}$$

Alors qu'en géométrie différentielle et théorie de jauge il est le plus souvent question de Δ_{HdR}, en physique il est le plus souvent question de Δ_{LB}. Plus bas, par défaut, il sera question de Δ_{HdR}. Ainsi, Δ et Δ_g dénotera Δ_{HdR}.

9 Fibrés principaux et fibrés associés

9.1 G-Fibré principal $\pi : P \to B$:

Définition : (fibré principal) Un *G-fibré principal* $\pi : P \to B$ est la donnée d'une action par la droite $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(P)$ telle que :

1. l'action Φ est libre ;
2. $\pi : P \to B = P/G$ est différentiable ;
3. P est localement trivial, i.e. pour tout $x \in B$ il existe un voisinage U de x et une application G-équivariante $\phi : \pi^{-1}(U) \to G$, i.e. $\phi(a \cdot g) = (\phi(a))g, \forall a \in P, g \in G$, telle que

$$\Psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G; \quad a \mapsto (\pi(a), \phi(a))$$

   est un difféomorphisme.

Remarque : P est dit être *l'espace total*, ou *l'espace fibré*. B est dit être *l'espace de base*. G est dit être le *groupe structurel*. π est dit être la *projection canonique*.

Deux trivialisations locales

$$\Psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G; \quad a \mapsto (\pi(a), \phi_\alpha(a))$$

$$\Psi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times G; \quad a \mapsto (\pi(a), \phi_\beta(a))$$

telles que $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$ est non vide induisent une *fonction de transition*

$$\Psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G$$

définie pour tout $a \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ par

$$\Psi_{\alpha\beta}(\pi(a)) := \widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}(a) := \phi_\alpha(a)(\phi_\beta(a))^{-1}$$

Comme $\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}$ est G-invariante, $\Psi_{\alpha\beta}$ est bien définie. Il est aussi aisé de démontrer les égalités suivantes :

$$\Psi_{\alpha\beta}\Psi_{\beta\gamma} = \Psi_{\alpha\gamma}$$

$$\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_{\beta\alpha}^{-1}$$

À une trivialisation locale Ψ_α correspond une unique *section trivialisante locale* :

$$s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

définie par :

$$\phi_\alpha \circ s_\alpha = e \in G$$

Lors d'un changement de trivialisation locale, les sections trivialisantes locales se comportent comme :

$$s_\beta = s_\alpha \cdot \Psi_{\alpha\beta}$$

Il est aussi aisé de démontrer que :

$$\Psi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha); \quad (x, g) \mapsto s_\alpha(x) \cdot g$$

$$\pi \circ \Psi_\alpha^{-1}(x, g) = x$$

$$\phi_\alpha \circ \Psi_\alpha^{-1}(x, g) = g$$

Définition : On dit qu'un G-fibré principal est trivial s'il existe une trivialisation globale, i.e. il existe une trivialisation locale qui est globale, i.e. définie sur l'ouvert $U_\alpha = B$.

9.2 Champs vectoriels fondamentaux :

Proposition : Soit $P \to B$ un G-fibré principal (à droite). Alors l'action de groupe

$$\begin{aligned} \Phi : G &\to \mathrm{Diff}(P) \\ g &\mapsto \Phi_g \end{aligned}$$

est un anti-homomorphisme, i.e. :

$$\Phi_{g_1 g_2} = \Phi_{g_2} \circ \Phi_{g_1} \qquad \forall g_1, g_2 \in G$$

Preuve : Pour $a \in P$ quelconque, on a :

$$\Phi_{g_1 g_2}(a) = a \cdot (g_1 g_2) = (a \cdot g_1) \cdot g_2 = \Phi_{g_2}(\Phi_{g_1}(a)) = (\Phi_{g_2} \circ \Phi_{g_1})(a)$$

□

Définition : Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ son algèbre de Lie. Soit $P \to B$ un G-fibré principal. Alors le *champ vectoriel fondamental* $\xi^* \in \mathfrak{X}(P)$ de $\xi \in \mathfrak{g}$ est défini en tout $a \in P$ par :

$$\xi^*|_a := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}(a)$$

Remarque : Cette définition vaut pour Φ agissant à gauche ou à droite.

Proposition : Le champ vectoriel fondamental ξ^* de $\xi \in \mathfrak{g}$ peut aussi s'écrire en termes de la contrepartie infinitésimale de l'homomorphisme de groupes de Lie $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(P)$:

$$\begin{aligned} \Phi_*|_e : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{X}(P) \\ \xi &\mapsto \xi^* := \Phi_*|_e(\xi) \end{aligned}$$

Preuve : Calcul direct :

$$\begin{aligned} (\Phi_*|_e(\xi))|_a &= \left(\Phi_*|_e \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \exp(t\xi)\right)\right)|_a \\ &= \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}\right)|_a \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Phi_{\exp(t\xi)}(a) \\ &= \xi^*|_a \end{aligned}$$

□

Remarque : La proposition suivante devrait venir plus bas après la notion de forme de connexion mais je vais la mettre ici pareil.

Proposition : Les champs vectoriels fondamentaux vérifient :

$$(\Phi_g)_*(\xi^*) = (\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi)^*, \quad \forall g \in G, \xi \in \mathfrak{g}$$

Preuve : Bien que la notion de forme de connexion n'est pas encore donnée, utilisons-en une auxiliaire $A : TP \to \mathfrak{g}$. La 1-forme de connexion donne lieu à un isomorphisme entre la distribution verticale $V_a \subset T_aP$ et $\mathfrak{g}$. On sait que les deux côtés de l'égalité recherchée sont des champs vectoriels verticaux. Il suffit donc de montrer que :

$$A((\Phi_g)_*(\xi^*)) = A((\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi)^*)$$

i.e. m.q. :

$$((\Phi_g)^*A)(\xi^*) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi$$

i.e. m.q. :

$$\mathrm{Ad}_g^{-1}A(\xi^*) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi$$

i.e. m.q. :

$$\mathrm{Ad}_g^{-1}\xi = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi$$

Ce qui est vrai. □

Proposition : Les champs vectoriels fondamentaux vérifient :

$$[\xi_1, \xi_2]^* = -[\xi_1^*, \xi_2^*]$$

Preuve : Ça découle de la dernière proposition :

$$\begin{aligned}
[\xi_1^*, \xi_2^*] &= \mathcal{L}_{\xi_1^*}(\xi_2^*) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\Phi_{\exp(t\xi_1)})_*(\xi_2^*) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\mathrm{Ad}_{\exp(t\xi_1)^{-1}}\xi_2)^* \\
&= (\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\exp(t\xi_1)^{-1}}\xi_2)^* \\
&= (-[\xi_1, \xi_2])^* \\
&= -[\xi_1, \xi_2]^*
\end{aligned}$$

□

Remarque : Le "-" est dû au fait que Φ est un anti-homomorphisme de groupes.

9.3 Fibré associé pr : $P \times_\rho V \to B$:

Soit $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ une action de G sur V par des automorphismes (V est ici soit un espace vectoriel, soit une variété). Si V est un espace vectoriel, $\mathrm{Aut}(V) = \mathrm{GL}(V)$. Si V est une variété lisse, $\mathrm{Aut}(V) = \mathrm{Diff}(V)$. On fait agir G sur le produit $P \times V$ comme suit :

$$(a, v) \cdot g = (a \cdot g, \rho(g^{-1})v)$$

Comme G agit librement sur P, il agit librement sur $P \times V$ et donc le quotient

$$P \times_\rho V := (P \times V)/G$$

est une variété lisse. La projection $\pi : P \to B$ induit une projection

$$\begin{aligned} \mathrm{pr} : P \times_\rho V &\to B \\ [a, v] &\mapsto \pi(a) \end{aligned}$$

qui est bien définie car π est G-invariante. Ainsi, $P \times_\rho V$ est un V-fibré associé à P via ρ sur B. On écrit aussi $P \times_\rho V \to B$ et aussi ρP lorsque ρ est spécifié. Les points de $P \times_\rho V$ sont des classes d'équivalences $[a, v]$ où $[a \cdot g, v] = [a, \rho(g)v]$.

Exemple : Prenons $\rho = \iota : G \to \mathrm{Aut}(G)$ et $V = G$. On pose alors

$$\mathrm{Aut}P := \iota P := P \times_\iota G$$

Exemple : Prenons $\rho = \mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ et $V = \mathfrak{g}$. On pose alors le *fibré adjoint*

$$\mathrm{Ad}P := P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$$

Remarque : José Figueroa-O'Farrill écrit AdP pour mon Aut$P$ et ad$P$ pour mon AdP.

Remarque : Un fibré vectoriel $E := P \times_\rho V$ est à fibres E_x isomorphes à V. Le fibré E est dit être un V-fibré vectoriel.

Remarque : À un V-fibré vectoriel $E = P \times_\rho V$ correspond un V^*-fibré vectoriel dual $E^* := P \times_{\rho^*} V^*$ où $\rho^* : G \to \mathrm{Aut}(V^*)$ est la représentation duale :

$$\rho^*(g)\alpha := \alpha \circ \rho(g^{-1}), \quad \forall g \in G, \alpha \in V^*$$

Remarque : Si on a deux fibrés vectoriels $E_1 = P \times_{\rho_1} V_1$ et $E_2 = P \times_{\rho_2} V_2$, alors le produit tensoriel des deux fibrés est

$$E_1 \otimes E_2 = (P \times_{\rho_1} V_1) \otimes (P \times_{\rho_2} V_2) = P \times_{\rho_1 \otimes \rho_2} (V_1 \otimes V_2)$$

où $\rho_1 \otimes \rho_2 : G \to \mathrm{Aut}(V_1 \otimes V_2)$.

Remarque : De la même manière, on peut aussi exprimer la somme de Whitney des deux fibrés vectoriels associés comme étant :

$$E_1 \oplus E_2 = (P \times_{\rho_1} V_1) \oplus (P \times_{\rho_2} V_2) = P \times_{\rho_1 \oplus \rho_2} (V_1 \oplus V_2)$$

où $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to \mathrm{Aut}(V_1 \oplus V_2)$.

Remarque : Soit $E = P \times_\rho V$ un fibré associé (vectoriel ou non). On peut faire agir G sur E par $g \cdot [a, v] := [a, \rho(g)v]$. Ceci donne une action de G sur $\Gamma^\infty(B; E)$ Si V est vectoriel, ceci donne aussi une action de G sur $\Omega^k(B; E)$.

9.4 Trivialisation locale d'un fibré associé :

Soit $E := P \times_\rho V$ un V-fibré vectoriel associé à P sur B. On peut localement le voir comme fibré trivial

$$U_\alpha \times V \to U_\alpha$$

sur U_α. Les fonctions de transition du fibré E sont données par

$$(x, v) \sim (x, \rho(\Psi_{\alpha\beta}(x))v), \quad \forall (x, v) \in U_{\alpha\beta} \times V$$

Remarque : Les sections $\sigma \in \Gamma^\infty(P \times_G V)$ s'écrivent $\sigma(\pi(a)) = [a, \sigma^\sharp(a)]$ où $\sigma^\sharp : P \to V$ est ρ-équivariante :

$$\sigma^\sharp(a \cdot g) = \rho(g^{-1})\sigma^\sharp(a), \quad \forall a \in P, g \in G$$

$$\text{i.e. } (\Phi_g)^*\sigma^\sharp = \rho(g^{-1})\sigma^\sharp$$

ou, de manière équivalente, par des fonctions $\sigma_\alpha : U_\alpha \to V$ définies par

$$\sigma_\alpha := s_\alpha^*\sigma^\sharp = \sigma^\sharp \circ s_\alpha$$

où $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ est une trivialisation locale de P.

Proposition : Les σ_α vérifient :

$$\sigma_\beta(x) = \rho(\Psi_{\alpha\beta}^{-1}(x))\sigma_\alpha(x), \quad \forall x \in U_{\alpha\beta}$$

Preuve : On calcule directement

$$\begin{aligned}
\sigma_\beta(x) &= \sigma^\sharp \circ s_\beta(x) \\
&= \sigma^\sharp(s_\alpha(x) \cdot \Psi_{\alpha\beta}(x)) \\
&= \rho(\Psi_{\alpha\beta}^{-1}(x))\sigma^\sharp(s_\alpha(x)) \\
&= \rho(\Psi_{\alpha\beta}^{-1}(x))\sigma_\alpha(x)
\end{aligned}$$

□

Proposition : Toute collection $(\sigma_\alpha, U_\alpha)_\alpha$ où les U_α recouvrent B et où les σ_α se transforment comme dans la dernière proposition définissent une section globale $\sigma \in \Gamma^\infty(B; P \times_G V)$.

Proposition : Soit $\sigma^\sharp$ une application ρ-équivariante sur P. Alors pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$ on a l'égalité :

$$\mathcal{L}_{\xi^*}\sigma^\sharp = -\rho_*(\xi)\sigma^\sharp$$

Preuve : On sait que $(\Phi_g)^*\sigma^\sharp = \rho(g^{-1})\sigma^\sharp$. Soit $g(t)$ une courbe en G telle que $g(0) = e$. Alors :

$$\mathcal{L}_{\xi^*}\sigma^\sharp = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\Phi_{g(t)})^*\sigma^\sharp = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\rho(g(t)^{-1})\sigma^\sharp = -\rho_*(\xi)\sigma^\sharp$$

□

Remarque : Bien que je n'ai pas encore introduit la forme de connexion A, on verra plus tard que :

Proposition : $\mathrm{d}^A\sigma^\sharp = (\mathrm{d} + \rho_*A)\sigma^\sharp$ est horizontale.

Preuve : La dernière proposition $\mathcal{L}_{\xi^*}\sigma^\sharp = -\rho_*(\xi)\sigma^\sharp$ et la formule magique de Cartan implique :

$$-\rho_*(\xi)\sigma^\sharp = \iota_{\xi^*}\mathrm{d}\sigma^\sharp$$

D'où $0 = (\iota_{\xi^*}\mathrm{d} + (\rho_*A)(\xi^*))\sigma^\sharp$. C'est-à-dire, $0 = \iota_{\xi^*}(\mathrm{d} + \rho_*A)\sigma^\sharp$. D'où $\sigma^\sharp$ horizontale. □

Remarque : En physique, un champ de matière ψ est une section de $E = P\times_\rho V$ et est couplé à un champ de jauge A via $\mathrm{d}_A\psi$. La représentation ρ encode le couplage entre ψ et A, i.e. la "charge" de ψ. Par exemple, pour $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\langle\xi\rangle$ et $A = \xi \otimes \alpha$, $\alpha \in \Omega^1_{\text{ver}}(P;\mathbb{R})$, la charge de ψ est $e = -\rho_*(\xi)$ de sorte que :

$$(\mathrm{d}\psi^\sharp)(\xi^*) = \mathcal{L}_{\xi^*}\psi^\sharp = -\rho_*(\xi)\psi^\sharp = e\psi^\sharp$$

$$\mathrm{d}^A\psi^\sharp = (\mathrm{d} + \rho_*A)\psi^\sharp = (\mathrm{d} + e\alpha)\psi^\sharp$$

Bref, la charge e représente comment $\psi^\sharp$ est ρ-équivariante sur P et la charge e est aussi le couplage $e\alpha\psi^\sharp$ entre α et $\psi^\sharp$.

10 Connexions d'Ehresmann H et plus encore :

10.1 Connexion d'Ehresmann H :

Rappel : L'action de groupe $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(P)$ induit une application

$$\begin{aligned} \Phi_*|_e : \mathfrak{g} &\to \mathfrak{X}(P) \\ \xi &\mapsto \xi^* \end{aligned}$$

Toute base $\{\xi_1, ..., \xi_{\dim(G)}\}$ de $\mathfrak{g}$ induit alors une famille de champs vectoriels fondamentaux $\{\xi_1^*, ..., \xi_{\dim(G)}^*\}$ sur P. Cette dernière famille de champs vectoriels engendre à son tour une distribution, dite *verticale*, $V \subset TP$ sur P. Comme Φ agit différentiablement, l'application $a \mapsto V_a \subset T_aP$ est différentiable. Puisque

$$(\Phi_g)_*(\xi^*) = (\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi)^*, \quad \forall g \in G, \xi \in \mathfrak{g}$$

la distribution V est G-invariante. Qui plus est, l'application $\Phi|_e$ étant un anti-homomorphisme d'algèbre, la distribution V est forcément intégrable et détermine un feuilletage. Ce feuilletage a pour feuilles les G-orbites en P.

Définition : (Connexion d'Ehresmann) : Une *connexion d'Ehresmann H* sur P est une distribution, dite *horizontale*, $H \subset TP$ qui est :

1. supplémentaire à V, i.e. $TP = V \oplus H$;
2. G-invariante, i.e. $H_{a \cdot g} = (\Phi_g)_* H_a, \quad \forall a \in P, g \in G$;
3. différentiable, i.e. $a \mapsto H_a$ est différentiable.

La première condition est équivalente à ce que V et H soient transverses, i.e. $TP = V + H$, et soient d'intersection nulle, i.e. $\forall a \in P, V_a \cap H_a = \{0\}$.

La projection $v : TP \to V$ (resp. $h : TP \to H$) est dite *projection verticale* (resp. *horizontale*). On a $v \circ h = h \circ v = 0$.

Remarque : Alors que la distribution verticale est toujours intégrable, la distribution horizontale est, elle, généralement non intégrable. Nous verrons plus bas que la non intégrabilité de la distribution d'Ehresmann est en fait la courbure.

Remarque : Lorsque j'aurai une forme de connexion A, les projections verticales et horizontales seront explicitement données en tout $X \in T_a P$ par :

$$\begin{aligned} vX_a &= (A_a(X_a))^*|_a \\ hX &= X - vX \end{aligned}$$

10.2 À propos des projections horizontales et verticales :

Proposition : $v^2 = v$.

Preuve : Soit $X_a \in T_aP$ quelconque. On sait que $vX_a = (A_a(X_a))^*|_a$. Ainsi :

$$\begin{aligned} v^2X_a = v(vX_a) &= v((A_a(X_a))^*|_a) \\ &= (A_a((A_a(X_a))^*|_a))^*|_a \\ &= (A_a(X_a))^*|_a \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de $A(\xi^*) = \xi$ pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$. □

Proposition : $hv = 0$.

Preuve : $h(vX) = vX - v^2X = vX - vX = 0$. □

Proposition : $h^2 = h$.

Preuve : On calcule directement :

$$h^2(X) = h(hX) = h(X - vX) = hX - hvX = hX$$

□

Proposition : $vhX = 0$

Preuve : $vhX = v(X - vX) = vX - v^2X = vX - vX = 0$. □

Proposition : $\pi_* \circ v = 0$.

Preuve : Découle directement du fait que π tue les fibres. □

Proposition : $\pi_* \circ h = \pi_*$.

Preuve : $\pi_* \circ h(X) = \pi_*(X - vX) = \pi_*X - \pi_* \circ v(X) = \pi_*X$. □

10.3 Champs vectoriels verticaux :

Définition : Un champ vectoriel X sur P est dit *vertical* s'il repose en la distribution verticale V. Un champ vectoriel X sur P est dit *horizontal* s'il repose en la distribution horizontale H.

Remarque : Les champs vectoriels verticaux vérifient $vX = X$. De même, les champs vectoriels horizontaux vérifient $hX = X$.

Remarque : Tout champ vectoriel X se décompose de manière unique en composantes horizontales et verticales :

$$X = vX + hX$$

L'unicité découle de la définition de $hX := X - vX$.

Remarque : La condition $A(\xi^*) = \xi$ implique que toutes les formes de connexions ont la même valeur sur les vecteurs verticaux.

Proposition : Si $X = 0$, alors $vX = hX = 0$.

Preuve : Supposons $X = 0$. Alors $vX|_a = (A_a(X_a))^* = (A_a(0))^* = 0^* = 0$. Donc $vX = 0$. Ensuite, $hX = X - vX = 0 - 0 = 0$. Donc $hX = 0$. □

Remarque : Dans la prochaine section on verra une décomposition des k-formes en composantes horizontales et verticales. Cette décomposition en somme directe de k-formes implique que si une k-forme η est nulle, alors chaque composante est nulle (i.e. les composantes horizontales et verticales sont linéairement indépendantes).

Remarque : La *composante* horizontale est une notion découlant de la notion de connexion. Mais la propriété d'*être* horizontale est définie sans l'aide de connexion. La notion de *composante* découle d'un split via une connexion. Ce split est $H^* \oplus V^*$.

10.4 Formes horizontales, verticales et mixtes :

Les distributions $V, H \subset TP$ induisent les distributions $V^*, H^* \subset T^*P$. On pose d'abord les (p,q)-formes mixtes :

$$\Omega^{(p,q)}_{\text{mix}}(P) := \Gamma^\infty((\wedge^p V^*) \wedge (\wedge^q H^*))$$

puis les *k-formes verticales*

$$\Omega^k_{\text{ver}}(P) := \Omega^{(k,0)}_{\text{mix}}(P) = \Gamma^\infty(\wedge^k V^*)$$

et les *k-formes horizontales*

$$\Omega^k_{\text{hor}}(P) := \Omega^{(0,k)}_{\text{mix}}(P) = \Gamma^\infty(\wedge^k H^*)$$

Ainsi, toute forme horizontale vérifie $\alpha|_V = 0$ et toute forme verticale vérifie $\alpha|_H = 0$.

Remarque : On a une décomposition en sommes directes

$$\Omega^k(P) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{(p,q)}_{\text{mix}}(P)$$

Cette décomposition implique que les sous-espaces $\Omega^{(p,q)}_{\text{mix}}(P)$ sont linéairement indépendants. Ainsi, si α est une k-forme nulle, alors chaque composante est nulle et pas seulement la somme des composantes est nulle. En particulier, une k-forme α est horizontale si $\alpha = \alpha_{\text{hor}}$. Ce qui implique que toutes les autres composantes de α sont nulles et non pas seulement la somme des autres composantes est nulle. En particulier, toute 1-forme $\alpha \in \Omega^1(P)$ se décompose uniquement en

$$\alpha = (\alpha)_{\text{hor}} + (\alpha)_{\text{ver}} \in \Omega^1_{\text{hor}}(P) \oplus \Omega^1_{\text{ver}}(P)$$

et toute 2-forme $\omega \in \Omega^2(P)$ se décompose de manière unique comme

$$\omega = (\omega)_{\text{hor}} + (\omega)_{\text{mix}} + (\omega)_{\text{ver}} \in \Omega^2_{\text{hor}}(P) \oplus \Omega^{(1,1)}_{\text{mix}}(P) \oplus \Omega^2_{\text{ver}}(P)$$

Les composantes horizontales et verticales d'une k-forme α quelconque sont données explicitement par

$$(\alpha)_{\text{hor}}(\,\cdot\,, ..., \,\cdot\,) = h^*\alpha(\,\cdot\,, ..., \,\cdot\,) = \alpha(h\,\cdot\,, ..., h\,\cdot\,)$$

$$(\alpha)_{\text{ver}}(\,\cdot\,,\ldots,\,\cdot\,) = v^*\alpha(\,\cdot\,,\ldots,\,\cdot\,) = \alpha(v\,\cdot\,,\ldots,v\,\cdot\,)$$

Ici h^* et v^* sont de la simple notation qui ne désignent pas les pull-back (ne commutent pas avec d). La décomposition est unique puisqu'induite par la décomposition

$$X = hX + vX$$

Définition : Une k-forme $\alpha \in \Omega^k(P)$ est dite *horizontale* si elle s'annule sur la distribution verticale, i.e. $\alpha|_V = 0$. Similairement, une k-forme α est dite *verticale* si elle s'annule sur la distribution horizontale, i.e. si $\alpha|_H = 0$.

Lorsqu'une connexion est définie, on a la relation suivante :

Remarque : Une k-forme $\alpha \in \Omega^k(P)$ est horizontale si et seulement si elle est égale à sa composante horizontale, i.e. $\alpha = (\alpha)_{\text{hor}} = h^*\alpha$. Similairement, une k-forme α est verticale si et seulement si elle est égale à sa composante verticale, i.e. $\alpha = (\alpha)_{\text{ver}} = v^*\alpha$.

Remarque : La propriété d'être horizontale est indépendante de la connexion A ! En effet, une k-forme est horizontale si et seulement si elle s'annule sur la distribution verticale (qui est définie indépendamment de toute connexion). La connexion intervient quand on veut extraire une éventuelle composante horizontale d'une k-forme générique.

Bref, une connexion ça sert à extraire des composantes horizontales.

10.5 Formes basiques réelles :

Définition : Une k-forme réelle $\alpha \in \Omega^k(P)$ est dite G-invariante si

$$(\Phi_g)^*\alpha = \alpha, \quad \forall g \in G$$

Notation : On dénote l'ensemble des k-formes réelles G-invariantes sur P par $\Omega^k(P)^G$.

Définition : Soit $\alpha \in \Omega^k_{\text{hor}}(P)$ une k-forme horizontale. Si de plus α est G-invariante, i.e. $(\Phi_g)^*\alpha = \alpha$ pour tout $g \in G$, on dit qu'elle est un k-forme *basique réelle*.

Notation : On dénote par $\Omega^k_{\text{hor}}(P)^G$ l'ensemble des k-formes basiques sur P. C'est-à-dire :

$$\Omega^k_{\text{hor}}(P)^G := \Omega^k_{\text{hor}}(P) \cap \Omega^k(P)^G$$

Voici un résultat intéressant :

Proposition : Les k-formes basiques sur P sont en bijection avec les k-formes sur B via la relation $\alpha^\sharp = \pi^*\alpha$. C'est-à-dire, il y a une bijection

$$\Omega^k_{\text{hor}}(P)^G \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \Omega^k(B)$$

Preuve : Soit α une k-forme sur B. Alors $\alpha^\sharp = \pi^*\alpha$ est horizontale. En effet,

$$\begin{aligned}
\alpha^\sharp &= \pi^*\alpha \\
&= \alpha_\pi(\pi_* \cdot, ..., \pi_* \cdot) \\
&= \alpha_\pi(\pi_* \circ h \cdot, ..., \pi_* \circ h \cdot) \\
&= \pi^*\alpha(h \cdot, ..., h \cdot) \\
&= (\pi^*\alpha)_{\text{hor}} \\
&= (\alpha^\sharp)_{\text{hor}}
\end{aligned}$$

D'où $\alpha^\sharp$ horizontal. Aussi, $\alpha^\sharp$ est G-invariante car

$$(\Phi_g)^*\alpha^\sharp = (\Phi_g)^*(\pi^*\alpha) = (\pi \circ \Phi_g)^*\alpha = \pi^*\alpha = \alpha^\sharp$$

Donc α monte à une k-forme horizontale G-invariante sur P. Inversement, soit $\alpha^\sharp$ une k-forme horizontale G-invariante sur P. Par G-invariance, elle vérifie $\mathcal{L}_{\xi^*}\alpha^\sharp = 0$ et par horizontalité elle vérifie $\alpha^\sharp(\xi^*) = 0$. Donc :

$$0 = \mathcal{L}_{\xi^*}\alpha = \iota_{\xi^*}\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\iota_{\xi^*}\alpha = \iota_{\xi^*}\mathrm{d}\alpha$$

D'où $\iota_{\xi^*}\mathrm{d}\alpha = 0$. Cette condition est suffisante pour qu'elle descende. En effet, si $\alpha^\sharp$ provenait d'une k-forme α sur la base, alors $\mathrm{d}\pi^*\alpha = \pi^*\mathrm{d}\alpha$. Comme $\mathrm{d}\alpha$ est une $(k+1)$-forme, $\pi^*\mathrm{d}\alpha$ est une k-forme horizontale. Donc $\mathrm{d}\pi^*\alpha = \mathrm{d}\alpha^\sharp$ est horizontale. Donc on devrait avoir $\iota_{\xi^*}\mathrm{d}\alpha = 0$. Ce qui est le cas. Maintenant, en comparant les dimensions de l'espace des k-formes sur B et celles G-invariantes horizontales sur P on arrive à la bijection (en regardant point par point). □

Notation : À $\alpha \in \Omega^k_{\mathrm{hor}}(P)^G$ j'écrirai $\alpha_\sharp \in \Omega^k(B)$ la k-forme correspondante sur P. Inversement, à $\alpha \in \Omega^k(B)$ j'écrirai $\alpha^\sharp \in \Omega^k_{\mathrm{hor}}(P)^G$ la forme basique réelle correspondante sur P. On a alors les bijections suivantes :

$$(\,\cdot\,)^\sharp : \Omega^k(B) \to \Omega^k_{\mathrm{hor}}(P)^G$$

$$(\,\cdot\,)_\sharp : \Omega^k_{\mathrm{hor}}(P)^G \to \Omega^k(B)$$

mutuellement inverses l'une de l'autre.

Proposition : Soit α une k-forme basique. Alors $\mathrm{d}\alpha$ est aussi basique.

Preuve : Il suffit de montrer que $\mathrm{d}\alpha$ est G-invariante et est horizontale. Premièrement elle est G-invariante car :

$$(\Phi_g)^*(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}(\Phi_g)^*\alpha = \mathrm{d}\alpha$$

Deuxièmement, la G-invariance de α implique $\mathcal{L}_{\xi^*}\alpha = 0$ pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$. En utilisant l'horizontalité de α on trouve :

$$0 = \mathcal{L}_\xi = \mathrm{d}\iota_\xi\alpha + \iota_\xi\mathrm{d}\alpha = \iota_\xi\mathrm{d}\alpha$$

D'où $\iota_\xi\mathrm{d}\alpha = 0$. Comme ξ était quelconque, il suit que $\mathrm{d}\alpha$ est horizontale. □

Remarque : On alors :

$$\mathrm{d} : \Omega^k_{\mathrm{hor}}(P)^G \to \Omega^{k+1}_{\mathrm{hor}}(P)^G$$

Remarque : La ρ-équivariance de des formes basiques s'exprime infinitésimalement comme :

$$\mathcal{L}_{\xi^*}\eta^\sharp = -\rho_*(\xi)\eta^\sharp, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}$$

Proposition : Soit $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ une section trivialisante locale quelconque. Alors,

$$s_\alpha^*\alpha^\sharp = \alpha$$

Preuve : On sait que $\pi^*\alpha = \alpha^\sharp$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} s_\alpha^*\alpha^\sharp & = & s_\alpha^*\pi^*\alpha \\ & = & (\pi \circ s_\alpha)^*\alpha \\ & = & (\mathrm{id}_B)^*\alpha \\ & = & \alpha \end{array}$$

□

Remarque : La dernière égalité est indépendante du s_α choisi ! Ceci découle du fait que $\alpha^\sharp$ est basique. En effet, en appliquant la règle de Leibniz

$$(s_\alpha \cdot \Psi_{\alpha\beta})_*(X) = (\Phi_{\Psi_{\alpha\beta}})_*(s_\alpha)_*(X) + (\Phi_*)|_{\Psi_{\alpha\beta}}(\Psi_{\alpha\beta})_*(X)|_{s_\alpha}$$

on calcule directement :

$$\begin{array}{rcl} (s_\beta^*\alpha^\sharp)(X) & = & \alpha^\sharp_{s_\beta}(s_\beta)_*(X) \\ & = & \alpha^\sharp_{s_\alpha \cdot \Psi_{\alpha\beta}}(s_\alpha \cdot \Psi_{\alpha\beta})_*(X) \\ & = & \alpha^\sharp_{s_\alpha \cdot \Psi_{\alpha\beta}}((\Phi_{\Psi_{\alpha\beta}})_*(s_\alpha)_*(X) + (\Phi_*)|_{\Psi_{\alpha\beta}}(\Psi_{\alpha\beta})_*(X)|_{s_\alpha}) \\ & = & \alpha^\sharp_{s_\alpha \cdot \Psi_{\alpha\beta}}(\Phi_{\Psi_{\alpha\beta}})_*(s_\alpha)_*(X) + \alpha^\sharp_{s_\alpha \cdot \Psi_{\alpha\beta}}(\Phi_*)|_{\Psi_{\alpha\beta}}(\Psi_{\alpha\beta})_*(X)|_{s_\alpha} \\ & = & \Phi^*_{\Psi_{\alpha\beta}}\alpha^\sharp_{s_\alpha}(s_\alpha)_*(X) \\ & = & \alpha^\sharp_{s_\alpha}(s_\alpha)_*(X) \\ & = & (s_\alpha^*\alpha^\sharp)(X) \end{array}$$

où j'ai utilisé $\Phi^*_{\Psi_{\alpha\beta}}\alpha^\sharp_{s_\alpha} = \alpha^\sharp_{s_\alpha}$ car $\alpha^\sharp$ est G-invariant et on regarde fibre par fibre. J'ai aussi utilisé $\alpha^\sharp_{s_\alpha \cdot \Psi_{\alpha\beta}}(\Phi_*) = 0$, ce qui découle du fait que Φ_* génère des champs vectoriels verticaux mais $\alpha^\sharp$ est horizontale. On a donc bien l'égalité

$$s_\alpha^*\alpha^\sharp = s_\beta^*\alpha^\sharp$$

La dernière proposition est donc légitime.

10.6 k-formes à valeurs vectorielles :

Soit V un espace vectoriel réel (à ne pas confondre avec V la distribution verticale !). Soit $\{v_1, ..., v_{\dim(V)}\}$ une base de V.

Définition : L'*espace des k-formes différentielles sur P à valeurs en V* est par définition :

$$\Omega^k(P;V) := \Gamma^\infty\left(\left(\wedge^k T^*P\right) \otimes_{\mathbb{R}} V\right) = \Omega^k(P) \otimes_{\mathbb{R}} V$$

Toute k-forme α à valeurs en V se décompose en

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\dim(V)} \alpha_i \otimes v_i$$

où $\alpha_i \in \Omega^k(P)$ pour $i = 1, ..., \dim(V)$. Les notions de k-formes horizontales/verticales de la dernière section s'étendent aux k-formes à valeurs vectorielles. On dénote alors

$$\Omega^k_{\text{hor}}(P;V) := \Omega^k_{\text{hor}}(P) \otimes V \quad \text{et} \quad \Omega^k_{\text{ver}}(P;V) := \Omega^k_{\text{ver}}(P) \otimes V$$

Définition : On dénote l'ensemble des k-formes à valeurs en un fibré vectoriel $E \to B$ par :

$$\Omega^k(B;E) := \Gamma^\infty\left(\left(\wedge^k T^*B\right) \otimes E\right)$$

10.7 Produits extérieurs, crochets, etc. :

Bien que le produit extérieur $\wedge$ entre une p-forme différentielle et une q-forme différentielle est naturel, celui entre p-formes et q-formes différentielles à valeurs vectorielles ou à valeurs en un fibré n'ont pas de produit extérieur *naturel*. Il est néanmoins possible d'en définir quelques-uns qui diffèrent les uns des autres selon le contexte.

Définition : Soient V et W deux espaces vectoriels. Alors il y a un produit extérieur naturel

$$(\wedge,\otimes) : \Omega^p(P;V)\times\Omega^q(P;W)\longrightarrow\Omega^{p+q}(P;V\otimes W)$$

$$(\alpha\otimes v)(\wedge,\otimes)(\beta\otimes w) := (\alpha\wedge\beta)\otimes(v\otimes w)$$

Remarque : Ici, il n'y a pas de formule pour permuter $(\alpha\otimes v)$ et $(\beta\otimes w)$ en changeant éventuellement de signe, contrairement au produit extérieur usuel $\wedge$ sur $\Omega^p(P)$ et $\Omega^q(P)$.

Définition : Soit V un espace vectoriel. Alors il y a un produit extérieur naturel

$$(\wedge,\circ) : \Omega^p(P;\mathrm{End}(V))\times\Omega^q(P;V)\longrightarrow\Omega^{p+q}(P;V)$$

$$(\alpha\otimes A)(\wedge,\circ)(\beta\otimes v) := (\alpha\wedge\beta, A(v))$$

Remarque : Ici non plus il n'y a pas de formule pour permuter $(\alpha\otimes A)$ et $(\beta\otimes v)$.

Définition : Soit V un espace vectoriel. Alors il y a un produit extérieur naturel

$$(\wedge,\circ) : \Omega^p(P;\mathrm{End}(V))\times\Omega^q(P;\mathrm{End}(V))\longrightarrow\Omega^{p+q}(P;\mathrm{End}(V))$$

$$(\alpha\otimes A)(\wedge,\circ)(\beta\otimes B) := (\alpha\wedge\beta)\otimes(A\circ B)$$

Remarque : Ici non plus il n'y a pas de formule pour permuter *a priori*.

Définition : Soit V un espace vectoriel et V^* son dual. Alors il y a un produit extérieur naturel

$$(\wedge,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle) : \Omega^p(P;V^*)\times\Omega^q(P;V)\longrightarrow\Omega^{p+q}(P)$$

$$(\alpha\otimes\mu)(\wedge,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)(\beta\otimes v) := (\alpha\wedge\beta)(\langle\mu,v\rangle) = (\mu(v))(\alpha\wedge\beta)$$

Définition : Soit V un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire $h : V \times V \to \mathbb{R}$. Alors il y a un produit extérieur naturel

$$(\wedge, h) : \Omega^p(P; V) \times \Omega^q(P; W) \to \Omega^{p+q}(P)$$

$$(\alpha \otimes v)(\wedge, h)(\beta \otimes w) := (\alpha \wedge \beta)(h(v, w)) = h(v, w)(\alpha \wedge \beta)$$

Remarque : Ici non plus il n'y a pas de formule pour permuter *a priori* : ça pourrait être le cas si h est symétrique ou anti-symétrique par exemple.

Remarque : Pour alléger la notation posons

$$\wedge^h : \Omega^p(P; V) \times \Omega^q(P; V) \to \Omega^{p+q}(P)$$

$$\tilde{\alpha} \wedge^h \tilde{\beta} := \tilde{\alpha}(\wedge, h)\tilde{\beta}$$

Définition : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Alors il y a un produit extérieur naturel

$$(\wedge, [\,\cdot\,,\,\cdot\,]) : \Omega^p(P; \mathfrak{g}) \times \Omega^q(P; \mathfrak{g}) \to \Omega^{p+q}(P; \mathfrak{g})$$

$$(\alpha \otimes A)(\wedge, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])(\beta \otimes B) := (\alpha \wedge \beta) \otimes [A, B]$$

Remarque : Ici, il existe une formule pour permuter $(\alpha \otimes A)$ et $(\beta \otimes B)$.

Remarque : Pour simplifier la notation, posons :

$$[\,\cdot\, \wedge \,\cdot\,] : \Omega^p(P; \mathfrak{g}) \times \Omega^q(P; \mathfrak{g}) \to \Omega^{p+q}(P; \mathfrak{g})$$

$$[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}] := \tilde{\alpha}(\wedge, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])\tilde{\beta}$$

Proposition : Soient $\tilde{\alpha} \in \Omega^p(P; \mathfrak{g})$ et $\tilde{\beta} \in \Omega^q(P; \mathfrak{g})$. Alors

$$[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}] = (-1)^{pq+1}[\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha}]$$

Preuve : Par linéarité, supposons sans perte de généralités que $\tilde{\alpha} = \alpha \otimes A$ et $\tilde{\beta} = \beta \otimes B$. Alors

$$\begin{aligned}
[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}] &= (\alpha \wedge \beta) \otimes [A, B] \\
&= ((-1)^{pq}\beta \wedge \alpha) \otimes (-[B, A]) \\
&= (-1)^{pq+1}(\beta \wedge \alpha) \otimes [B, A] \\
&= (-1)^{pq+1}[\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha}]
\end{aligned}$$

□

Proposition : Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie matricielle, et donc munie d'une loi de composition $\circ$. Soient $\tilde{\alpha} \in \Omega^p(P;\mathfrak{g})$ et $\tilde{\beta} \in \Omega^q(P;\mathfrak{g})$. Alors :

$$[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}] = \tilde{\alpha}(\wedge,\circ)\tilde{\beta} + (-1)^{pq+1}\tilde{\beta}(\wedge,\circ)\tilde{\alpha}$$

Preuve : Par linéarité, supposons sans perte de généralités que $\tilde{\alpha} = \alpha \otimes A$ et $\tilde{\beta} = \beta \otimes B$. Alors :

$$\begin{aligned}
[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}] &= (\alpha \wedge \beta) \otimes [A, B] \\
&= (\alpha \wedge \beta) \otimes (A \circ B - B \circ A) \\
&= (\alpha \wedge \beta) \otimes (A \circ B) - (\alpha \wedge \beta) \otimes (B \circ A) \\
&= (\alpha \wedge \beta) \otimes (A \circ B) - (-1)^{pq}(\beta \wedge \alpha) \otimes (B \circ A) \\
&= (\alpha \wedge \beta) \otimes (A \circ B) + (-1)^{pq+1}(\beta \wedge \alpha) \otimes (B \circ A) \\
&= \tilde{\alpha}(\wedge,\circ)\tilde{\beta} + (-1)^{pq+1}\tilde{\beta}(\wedge,\circ)\tilde{\alpha}
\end{aligned}$$

□

Corollaire : Pour deux 1-formes différentielles $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$, on a :

$$[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}] = \tilde{\alpha}(\wedge,\circ)\tilde{\beta} + \tilde{\beta}(\wedge,\circ)\tilde{\alpha}$$

Ce qui est bel et bien symétrique. En particulier :

$$[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\alpha}] = 2\tilde{\alpha}(\wedge,\circ)\tilde{\alpha}$$

De plus, si $\tilde{\alpha} \in \Omega^p(P;\mathfrak{g})$ et $\tilde{\varphi} \in \Omega^0(P;\mathfrak{g})$, alors

$$[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\varphi}] = [\tilde{\alpha}, \tilde{\varphi}]$$

Proposition : Soient $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$ et deux vecteurs $v_1, v_2 \in T_aP$ pour un certain $a \in P$. On a l'égalité :

$$[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}](v_1, v_2) = [\tilde{\alpha}(v_1), \tilde{\beta}(v_2)] - [\tilde{\alpha}(v_2), \tilde{\beta}(v_1)]$$

Preuve : Il suffit de vérifier pour $\tilde{\alpha} = \alpha \otimes A$ et $\tilde{\beta} = \beta \otimes B$. On calcule directement :

$$\begin{aligned}
[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}](v_1, v_2) &= [(\alpha \otimes A) \wedge (\beta \otimes B)](v_1, v_2) \\
&= ((\alpha \wedge \beta) \otimes [A, B])(v_1, v_2) \\
&= (\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2)[A, B] \\
&= (\alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1))[A, B] \\
&= \alpha(v_1)\beta(v_2)[A, B] - \alpha(v_2)\beta(v_1)[A, B] \\
&= [\alpha(v_1)A, \beta(v_2)B] - [\alpha(v_2)A, \beta(v_1)B] \\
&= [\alpha \otimes A(v_1), \beta \otimes B(v_2)] - [\alpha \otimes A(v_2), \beta \otimes B(v_1)] \\
&= [\tilde{\alpha}(v_1), \tilde{\beta}(v_2)] - [\tilde{\alpha}(v_2), \tilde{\beta}(v_1)]
\end{aligned}$$

□

Proposition : $[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\alpha}](\cdot, \cdot) = 2[\tilde{\alpha}(\cdot), \tilde{\alpha}(\cdot)]$ pour tout $\tilde{\alpha} \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$.

Preuve : Par la dernière proposition, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\alpha}](v_1, v_2) &= [\tilde{\alpha}(v_1), \tilde{\alpha}(v_2)] - [\tilde{\alpha}(v_2), \tilde{\alpha}(v_1)] \\
&= [\tilde{\alpha}(v_1), \tilde{\alpha}(v_2)] + [\tilde{\alpha}(v_1), \tilde{\alpha}(v_2)] \\
&= 2[\tilde{\alpha}(v_1), \tilde{\alpha}(v_2)]
\end{aligned}$$

□

Remarque : En bref, on a donc pour $\tilde{\alpha} \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$:

$$[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\alpha}] = 2[\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}] = 2\tilde{\alpha}(\wedge, \circ)\tilde{\alpha}$$

Remarque : Il est donc fréquent de voir $[\eta, \eta] = \frac{1}{2}[\eta \wedge \eta]$. Ceci dit, la notation $[\cdot, \cdot]$ est déconseillée car peut porter à confusion. En effet, bien que $[\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}] = \frac{1}{2}[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\alpha}]$ est bien défini pour une 1-forme différentielle $\tilde{\alpha} \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$, qu'en est-il de $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ pour $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$? On pourrait définir $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}](v_1, v_2) := [\tilde{\alpha}(v_1), \tilde{\beta}(v_2)]$, mais c'est inutile car $[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ n'est pas une 2-forme différentielle (car pas forcément anti-symétrique). Voilà pourquoi je n'utiliserai pas cette notation, sauf pour le crochet évident entre une p-forme et une 0-forme et pour le crochet d'une 1-forme avec elle-même. Ceci dit, la notation $[\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}]$ pour $\tilde{\alpha} \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ est standard et utilisée dans [KN] et par divers auteurs.

Remarque : Pour $\alpha \in \Omega^1(P)$ et $A \in \mathfrak{g}$, on a $[\alpha \otimes A, \alpha \otimes A] = (\alpha \wedge \alpha) \otimes [A, A] = 0$. Ce sont les combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes A_i$ qui produisent des $[\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}]$ non nuls.

10.8 Formule de Leibniz sur les crochets :

Remarque : Soit $f = \sum_i f_i \otimes A_i \in \Omega^0(P;\mathfrak{g})$ pour $f_i \in C^\infty(P;\mathbb{R})$ et $A_i \in \mathfrak{g}$. Alors :

$$\mathrm{d}f = \sum_i \mathrm{d}f_i \otimes A_i$$

Remarque : $\mathrm{d}^2 f = \sum_i \mathrm{d}^2 f_i \otimes A_i = 0$.

Proposition : Soient $\tilde{\alpha} \in \Omega^p(P;\mathfrak{g})$ et $\tilde{\beta} \in \Omega^q(P;\mathfrak{g})$. Alors on a les deux égalités suivantes :

$$\mathrm{d}(\tilde{\alpha}(\wedge,\circ)\tilde{\beta}) = (\mathrm{d}\tilde{\alpha})(\wedge,\circ)\tilde{\beta} + (-1)^p\tilde{\alpha}(\wedge,\circ)(\mathrm{d}\tilde{\beta})$$
$$\mathrm{d}[\tilde{\alpha}\wedge\tilde{\beta}] = [\mathrm{d}\tilde{\alpha}\wedge\tilde{\beta}] + (-1)^p[\tilde{\alpha}\wedge\mathrm{d}\tilde{\beta}]$$

Preuve : Montrons d'abord la première égalité :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\tilde{\alpha}(\wedge,\circ)\tilde{\beta}) &= \mathrm{d}\sum_{i,j}(\alpha_i\wedge\beta_j)\otimes(A_i\circ B_j)\\
&= \sum_{i,j}\mathrm{d}(\alpha_i\wedge\beta_j)\otimes(A_i\circ B_j)\\
&= \sum_{i,j}((\mathrm{d}\alpha_i)\wedge\beta_j + (-1)^p\alpha_i\wedge(\mathrm{d}\beta_j))\otimes(A_i\circ B_j)\\
&= \sum_{i,j}((\mathrm{d}\alpha_i)\wedge\beta_j))\otimes(A_i\circ B_j) + (-1)^p\sum_{i,j}(\alpha_i\wedge(\mathrm{d}\beta_j))\otimes(A_i\circ B_j)\\
&= (\mathrm{d}\tilde{\alpha})(\wedge,\circ)\tilde{\beta} + (-1)^p\tilde{\alpha}(\wedge,\circ)(\mathrm{d}\tilde{\beta})
\end{aligned}$$

D'où la première égalité. On calcule ensuite directement la seconde :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}[\tilde{\alpha}\wedge\tilde{\beta}] &= \mathrm{d}\sum_{i,j}(\tilde{\alpha}\wedge\tilde{\beta})\otimes[A_i,B_j]\\
&= \sum_{i,j}\mathrm{d}(\alpha_i\wedge\beta_j)\otimes[A_i,B_j]\\
&= \sum_{i,j}(\mathrm{d}\alpha_i\wedge\beta_j + (-1)^p\alpha_i\wedge\mathrm{d}\beta_j)\otimes[A_i,B_j]\\
&= [\mathrm{d}\tilde{\alpha}\wedge\tilde{\beta}] + (-1)^p[\tilde{\alpha}\wedge\mathrm{d}\tilde{\beta}]
\end{aligned}$$

□

Corollaire : (1) Pour deux fonctions $f, g \in C^\infty(P; \mathfrak{g})$ on a :

$$\mathrm{d}[f, g] = [\mathrm{d}f, g] + [f, \mathrm{d}g]$$

Corollaire : (2) Pour une 1-forme $\tilde{\alpha}$ et $f \in C^\infty(P; \mathfrak{g})$ on a :

$$\mathrm{d}(f \circ \tilde{\alpha}) = \mathrm{d}f(\wedge, \circ)\tilde{\alpha} + f \circ \mathrm{d}\tilde{\alpha}$$

$$\mathrm{d}(\tilde{\alpha} \circ f) = \mathrm{d}\tilde{\alpha} \circ f - \tilde{\alpha}(\wedge, \circ)\mathrm{d}f$$

Proposition : Pour $f \in C^\infty(P; G)$ et $\tilde{\alpha} \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ on a :

$$\mathrm{d}(\mathrm{Ad}_f \tilde{\alpha}) = \mathrm{Ad}_f \mathrm{d}\tilde{\alpha} + [(\mathrm{d}f)f^{-1} \wedge \mathrm{Ad}_f \tilde{\alpha}]$$

Preuve : Calcul direct :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{Ad}_f \tilde{\alpha}) &= \mathrm{d}(f\tilde{\alpha}f^{-1}) \\
&= (\mathrm{d}f) \wedge \tilde{\alpha}f^{-1} + f(\mathrm{d}\tilde{\alpha})f^{-1} - f\tilde{\alpha}(\mathrm{d}f^{-1}) \\
&= (\mathrm{d}f)f^{-1}f \wedge \tilde{\alpha}f^{-1} + \mathrm{Ad}_f \mathrm{d}\tilde{\alpha}) + f\tilde{\alpha}f^{-1}(\mathrm{d}f)f^{-1} \\
&= (\mathrm{d}f)f^{-1} \wedge f\tilde{\alpha}f^{-1} + \mathrm{Ad}_f \mathrm{d}\tilde{\alpha}) + (\mathrm{Ad}_f \tilde{\alpha})(\mathrm{d}f)f^{-1} \\
&= \mathrm{Ad}_f \mathrm{d}\tilde{\alpha} + [((\mathrm{d}f)f^{-1}) \wedge (\mathrm{Ad}_f \tilde{\alpha})]
\end{aligned}$$

□

Corollaire : Pour $f \in C^\infty(P; G)$ et $\tilde{\alpha} \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ on a :

$$\mathrm{d}(\mathrm{Ad}_{f^{-1}} \tilde{\alpha}) = \mathrm{Ad}_{f^{-1}} \mathrm{d}\tilde{\alpha} - [f^{-1}\mathrm{d}f \wedge \mathrm{Ad}_{f^{-1}} \tilde{\alpha}]$$

Remarque : On peut reformuler les deux dernières égalités en termes de la 1-forme de Maurer-Cartan :

$$\mathrm{d}(\mathrm{Ad}_{f^{-1}} \tilde{\alpha}) = \mathrm{Ad}_{f^{-1}} \mathrm{d}\tilde{\alpha} - [f^*\theta \wedge \mathrm{Ad}_{f^{-1}} \tilde{\alpha}]$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{Ad}_f \tilde{\alpha}) = \mathrm{Ad}_f \mathrm{d}\tilde{\alpha} - [(f^{-1})^*\theta \wedge \mathrm{Ad}_f \tilde{\alpha}]$$

Proposition : Pour $X \in \mathfrak{X}(P)$ et pour $\tilde{\alpha} \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ on a :

$$\iota_X[\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}] = [\iota_X \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}]$$

Preuve : Pour $v_1, v_2 \in T_a P$ quelconques, on sait que $[\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}](v_1, v_2) = [\tilde{\alpha}(v_1), \tilde{\alpha}(v_2)]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \iota_{v_2}[\tilde{\alpha}(v_1), \tilde{\alpha}] &= [\tilde{\alpha}(v_1), \tilde{\alpha}(v_2)] \\ &= [\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}](v_1, v_2) \\ &= \iota_{v_2}([\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}](v_1, \cdot)) \\ &= \iota_{v_2}(\iota_{v_1}[\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}]) \end{aligned}$$

Comme v_2 était quelconque, on a ce qu'on cherche $[\tilde{\alpha}(v_1), \tilde{\alpha}] = \iota_{v_1}[\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}]$. □

10.9 k-formes G-équivariantes sur P :

Soient V un espace vectoriel et

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

une représentation de G sur V.

Définition : Une k-forme $\alpha \in \Omega^k(P;V)$ sur P à valeurs en V est dite G-*équivariante* si

$$(\Phi_g)^*\alpha = \rho(g^{-1})\alpha, \quad \forall g \in G$$

i.e. si

$$\left((\Phi_g)^* \circ \rho(g)\right) \alpha = \alpha, \quad \forall g \in G$$

Ceci est équivalent, sous décomposition $\alpha = \sum_i \alpha_i \otimes v_i$, à

$$\sum_{i=1}^{\dim(V)} \left((\Phi_g)^*\alpha_i\right) \otimes (\rho(g)v_i) = \sum_{i=1}^{\dim(V)} \alpha_i \otimes v_i$$

On dénote par

$$\Omega^k_\rho(P;V) := \left(\Omega^k(P;V)\right)^G$$

l'ensemble des k-formes G-équivariantes sur P à valeurs en V. De même, on pose

$$\Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V) := \left(\Omega^k_{\mathrm{hor}}(P;V)\right)^G \quad \text{et} \quad \Omega^k_{\rho,\mathrm{ver}}(P;V) := \left(\Omega^k_{\mathrm{ver}}(P;V)\right)^G$$

Remarque : La définition d'une k-forme G-invariante réelle $\alpha \in \Omega^k(P)$ découle naturellement avec la représentation triviale sur $V = \mathbb{R}$:

$$(\Phi_g)^*\alpha = \alpha, \quad \forall g \in G$$

10.10 Formes basiques :

Définition : Une k-forme G-équivariante et horizontale $\eta \in \Omega^k(P;V)$ est dite *basique*. On dénote l'ensemble des formes basiques à valeurs en V sur P par $\Omega^k_{\rho,\text{hor}}(P;V)$.

Remarque : Les formes basiques réelles vues plus haut sont un cas particulier des formes basiques.

Notation : Soient $E := P \times_\rho V$ et $\Omega^k(B;E) := \Gamma^\infty\left(\left(\wedge^k T^*B\right) \otimes E\right)$.

Proposition : Il y a une bijection $\Omega^k_{\rho,\text{hor}}(P;V) \leftrightarrow \Omega^k(B;E)$.

Preuve : Soit $\zeta \in \Omega^k(B;E)$. Supposons que $\zeta = \sigma \otimes \eta$ où $\sigma \in \Gamma^\infty(E)$ et où $\eta \in \Omega^k(B)$. À σ correspond un unique $\sigma^\sharp \in C^\infty_\rho(P;V)$ et à η correspond une unique forme basique réelle $\eta^\sharp \in \Omega^k_{\text{hor}}(P)$. Ainsi, à ζ correspond un unique $\zeta^\sharp := \sigma^\sharp \otimes \eta^\sharp$. Ensuite, si $\zeta = \sum_i \sigma_i \otimes \eta_i$, on considère la même correspondance. Inversement, soit $\zeta \in \Omega^k_{\rho,\text{hor}}(P;V)$. Supposons que $\zeta = \sigma \otimes \eta$ où $\sigma \in C^\infty_\rho(P;V)$ et $\eta \in \Omega^k_{\text{hor}}(P)$ est basique réelle. À σ correspond un unique $\sigma_\sharp \in \Gamma^\infty(E)$ et à η correspond un unique $\eta_\sharp \in \Omega^k(B)$. Donc, à ζ correspond un unique $\zeta_\sharp = \sigma_\sharp \otimes \eta_\sharp$. Ensuite, si $\zeta = \sum_i \sigma_i \otimes \eta_i$, on considère la même correspondance. □

Remarque : Tout comme pour les formes basiques réelles, je dénoterai la bijection entre $\Omega^k(B;E)$ et $\Omega^k_{\rho,\text{hor}}(P;V)$ par les applications

$$(\,\cdot\,)^\sharp : \Omega^k(B;E) \to \Omega^k_{\rho,\text{hor}}(P;V)$$

$$(\,\cdot\,)_\sharp : \Omega^k_{\rho,\text{hor}}(P;V) \to \Omega^k(B;E)$$

qui sont l'inverse l'une de l'autre.

Remarque : J'écrirai le plus souvent $\eta^\sharp$ lorsque $\eta^\sharp$ est basique (question d'avoir le dièse le plus souvent en haut qu'en bas).

10.11 Dérivée de Lie des formes basiques :

Soit $\eta^\sharp \in \Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V)$ une forme basique. Soit $\xi \in \mathfrak{g}$.

Proposition : $\mathcal{L}_{\xi^*}\eta^\sharp = -\rho_*(\xi) \circ \eta^\sharp$.

Preuve : C'est la version infinitésimale de $(\Phi_g)^*\eta^\sharp = -\rho(g) \circ \eta^\sharp$.

Proposition : $\iota_\xi \mathrm{d}\eta^\sharp = -\rho_*(\xi) \circ \eta^\sharp$.

Preuve : En utilisant la formule magique de Cartan $\mathcal{L} = \mathrm{d}\iota + \iota\mathrm{d}$ et l'horizontalité des formes basiques on trouve directement :

$$-\rho_*(\xi) \circ \eta^\sharp = \mathcal{L}_\xi \eta^\sharp = \mathrm{d}\iota_\xi \eta^\sharp + \iota_\xi \mathrm{d}\eta^\sharp = \iota_\xi \mathrm{d}\eta^\sharp$$

□

Remarque : Donc $\mathrm{d}\eta^\sharp$ n'est pas forcément basique.

Proposition : $\mathcal{L}_\xi \mathrm{d}\eta^\sharp = -\rho_*(\xi)\mathrm{d}\eta^\sharp$

Preuve : On calcule directement :

$$\mathcal{L}_\xi \mathrm{d}\eta^\sharp = \iota_\xi \mathrm{d}^2\eta^\sharp + \mathrm{d}\iota_\xi \mathrm{d}\eta^\sharp = \mathrm{d}(\iota_\xi \mathrm{d}\eta^\sharp) = \mathrm{d}\mathcal{L}_\xi \eta^\sharp = -\mathrm{d}\rho_*(\xi)\eta^\sharp = -\rho_*(\xi)\mathrm{d}\eta^\sharp$$

Remarque : $\mathrm{d}\eta^\sharp$ vérifie $\mathcal{L}_{\xi^*}\mathrm{d}\eta^\sharp = -\rho_*(\xi)\eta^\sharp$ sans être basique. Donc toute forme ρ-équivariante n'est pas forcément basique. Ce qui est simplement : toute forme ρ-équivariante n'est pas forcément horizontale.

10.12 Représentation locale des formes basiques sur la base :

Remarque : Tout comme on peut représenter localement les sections $\sigma \in \Gamma^\infty(E)$ par des applications $\sigma_\alpha := s_\alpha^* \sigma^\sharp \in C^\infty(U_\alpha; V)$, on peut représenter localement $\zeta \in \Omega^k(B; E)$ par

$$\zeta_\alpha := s_\alpha^* \zeta^\sharp \in \Omega^k(U_\alpha; V)$$

Remarque : Tout comme $\sigma_\beta = \rho(\Psi_{\alpha\beta}^{-1}) \circ \sigma_\alpha$, on a l'égalité suivante :

Proposition : Soit $\eta \in \Omega^k(B; E)$. Alors :

$$\eta_\beta = \rho(\Psi_{\alpha\beta}^{-1}) \circ \eta_\alpha$$

Preuve : Soit $\eta \in \Omega^k(B; E)$. Il lui correspond $\eta^\sharp \in \Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P; V)$. Soient deux sections trivialisantes locales $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ et $s_\beta : U_\beta \to \pi^{-1}(U_\beta)$ telles que $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Soit $\Psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G$ la fonction de transition correspondante. Elle vérifie $s_\beta = s_\alpha \cdot \Psi_{\alpha\beta}$ point par point. Posons $\eta_\alpha := s_\alpha^* \eta^\sharp$ et $\eta_\beta := s_\beta^* \eta^\sharp$. En étendant éventuellement linéairement, on peut, sans pertes de généralités, supposer que $\eta^\sharp$ se décompose comme $\eta^\sharp = \sigma^\sharp \otimes \alpha^\sharp$. Ainsi on trouve :

$$\begin{aligned}
\eta_\beta &= s_\beta^* \eta^\sharp \\
&= s_\beta^*(\sigma^\sharp \otimes \alpha^\sharp) \\
&= (s_\beta^* \sigma^\sharp) \otimes (s_\beta^* \alpha^\sharp) \\
&= (\rho(\Psi_{\alpha\beta}^{-1}) \circ s_\alpha^* \sigma^\sharp) \otimes (s_\alpha^* \alpha^\sharp) \\
&= \rho(\Psi_{\alpha\beta}^{-1}) \circ ((s_\alpha^* \sigma^\sharp) \otimes (s_\alpha^* \alpha^\sharp)) \\
&= \rho(\Psi_{\alpha\beta}^{-1}) \circ s_\alpha \eta^\sharp \\
&= \rho(\Psi_{\alpha\beta}^{-1}) \circ \eta_\alpha
\end{aligned}$$

□

11 Formes de connexion A et de courbure F_A :

11.1 Forme de connexion A :

Définition : Une *forme de connexion* sur P est une 1-forme verticale Ad-équivariante sur P à valeurs en $\mathfrak{g}$:

$$A \in \Omega^1_{\mathrm{Ad}}(P; \mathfrak{g})$$

telle que

$$A(\xi^*) = \xi, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}$$

Remarque : Ici, Ad est la représentation adjointe $\rho = \mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. La G-équivariance de A :

$$(\Phi_g)^* A = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} A, \quad \forall g \in G$$

s'exprime aussi en termes de G-invariance :

$$\left((\Phi_g)^* \circ \mathrm{Ad}_g\right) A = A, \quad \forall g \in G$$

Donnée une base $\{\xi_1, ..., \xi_{\dim(G)}\}$ de $\mathfrak{g}$, A se décompose comme :

$$A = \sum_{i=1}^{\dim(G)} A_i \otimes \xi_i \in \left(\Omega^1_{\mathrm{ver}}(P) \otimes \mathfrak{g}\right)^G$$

La G-équivariance de A s'exprime alors comme :

$$\sum_{i=1}^{\dim(G)} \left((\Phi_g)^* A_i\right) \otimes \xi_i = \sum_{i=1}^{\dim(G)} A_i \otimes \left(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\xi_i)\right), \quad \forall g \in G$$

alors que la G-invariance de A s'exprime comme :

$$\sum_{i=1}^{\dim(G)} \left((\Phi_g)^* A_i\right) \otimes \left(\mathrm{Ad}_g(\xi_i)\right) = \sum_{i=1}^{\dim(G)} A_i \otimes \xi_i, \quad \forall g \in G$$

11.2 Relation entre H et A :

Proposition : Les connexions d'Ehresmann H sont en bijection avec les formes de connexion A sur P.

Preuve : Soit P un G-fibré principal. Soit H une connexion d'Ehresmann sur P. La distribution verticale V et la distribution horizontale H induisent des projections verticales $v : T_aP \to V_a$ et horizontales $h : T_aP \to H_a$. Soit $a \in P$ et soit $X_a \in T_aP$. À la composante verticale vX_a correspond un unique $\xi \in \mathfrak{g}$ tel que $vX_a = (\xi^*)_a$. On définit alors $A \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$ par :

$$A_a(X_a) := \xi$$

L'unicité de A est évidente. La verticalité de A aussi. La G-équivariance de A découle de $(\Phi_g)_*(\xi^*) = (\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi)^*$.

Inversement, si une forme de connexion A est donnée sur P, on pose $H := \ker A$. On doit alors montrer que $H_a \cap V_a = \{0\}$ et $H_a + V_a = T_aP$ et que H est G-invariante. Soit $X_a \in H_a \cap V_a$. Comme $X_a \in H_a = \ker(A_a)$, alors $A_a(X_a) = 0$. D'autre part, $X_a = \xi^*|_a$ car X_a est vertical. Alors $0 = A_a(X_a) = A_a(\xi^*|_a) = \xi$. Donc $\xi = 0$. Donc $X_a = 0$. Ensuite on montre que $H_a + V_A = T_aP$. En a, l'application $A_a : T_aP \to \mathfrak{g}$ est surjective. Donc $T_aP \cong \mathfrak{g} + \ker(A_a) = \mathfrak{g} + H_a \cong V_a + H_a$. Enfin, on montre que H est G-invariante. Soit $X_a \in H_a$ quelconque et $g \in G$. On veut montrer que $(\Phi_g)_*(X_a) \in H_{a\cdot g}$. On a :

$$\begin{aligned} A_{a\cdot g}((\Phi_g)_*(X_a)) &= ((\Phi_g)^*A)_a(X_a) \\ &= (\mathrm{Ad}_g^{-1} \circ A)_a(X_a) \\ &= \mathrm{Ad}_g^{-1} \circ (A_a(X_a)) \\ &= \mathrm{Ad}_g^{-1} \circ (0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

11.3 Propriétés de A :

On a supposé que G agit par la droite sur P. Donc $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(P)$ est un anti-homomorphisme de groupe. Donc $\Phi_*|_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(P)$ est un anti-homomorpisme d'algèbres. Donc :

$$[\xi_1, \xi_2]^* = -[\xi_1^*, \xi_2^*], \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$$

Proposition : $A([\xi_1^*, \xi_2^*]) = -[A(\xi_1^*), A(\xi_2^*)]$.

Preuve : $A([\xi_1^*, \xi_2^*]) = -A([\xi_1, \xi_2]^*) = -[\xi_1, \xi_2] = -[A(\xi_1^*), A(\xi_2^*)]$. □

Remarque : La 2-forme $\mathrm{d}A \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$ se décompose en :

$$\mathrm{d}A = (\mathrm{d}A)_{\mathrm{hor}} + (\mathrm{d}A)_{\mathrm{mix}} + (\mathrm{d}A)_{\mathrm{ver}}$$

Que valent ces composantes ?

Proposition : $(\mathrm{d}A)_{\mathrm{ver}} = -[A, A]$.

Preuve : Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$. Puisque $(\mathrm{d}A)_{\mathrm{ver}}$ est linéaire, on peut supposer sans perte de généralités que $vX = \xi_1^*$ et $xY = \xi_2^*$. En utilisant la dernière proposition on trouve alors :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}A)_{\mathrm{ver}}(X, Y) &= (\mathrm{d}A)(vX, vY) \\
&= (\mathrm{d}A)(\xi_1^*, \xi_2^*) \\
&= \xi_1^* A(\xi_2^*) - \xi_2^* A(\xi_1^*) - A([\xi_1^*, \xi_2^*]) \\
&= \xi_1^*(\xi_2) - \xi_2^*(\xi_1) + [A(\xi_1^*), A(\xi_2^*)] \\
&= [A, A](\xi_1^*, \xi_2^*) \\
&= [A, A](X, Y)
\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du fait que le crochet de deux 1-formes verticales est une 2-forme verticale. □

Proposition : $(\mathrm{d}A)_{\mathrm{mix}} = 0$.

Preuve : Soient X horizontaux et Y verticaux. Il suffit de démontrer que $(\mathrm{d}A)(X, Y) = 0$. Sans pertes de généralités, par linéarité de $(\mathrm{d}A)_{\mathrm{mix}}$, on peut supposer $Y = \xi^*$.

On trouve alors :

$$(\mathrm{d}A)(X,Y) = XA(\xi^*) - YA(X) - A([X,Y]) = 0$$

En effet, $XA(\xi^*) = X(\xi) = 0$ car ξ est constant. $YA(X) = 0$ car X est horizontal. $A([X,Y]) = 0$ car $[\text{hor}, \text{fond}] = \text{hor} \in \ker A$ car la distribution d'Ehresmann est G-invariante (et donc le crochet de champs vectoriels horizontaux et de champs vectoriels fondamentaux est un champ vectoriel horizontal). $\square$

Proposition : $(\mathrm{d}A)_{\text{hor}} = \mathrm{d}A + [A, A]$.

Preuve : $(\mathrm{d}A)_{\text{hor}} = \mathrm{d}A - (\mathrm{d}A)_{\text{mix}} - (\mathrm{d}A)_{\text{ver}} = \mathrm{d}A + [A, A]$. $\square$

Remarque : Cette dernière égalité est nommée *équation structurelle d'Élie Cartan*.

11.4 Forme de courbure :

Définition : La *forme de courbure* $F_A^\sharp$ de la forme de connexion α est définie par

$$F_A^\sharp := (\mathrm{d}A)_{\mathrm{hor}} \in \Omega^2_{\mathrm{hor}}(P;\mathfrak{g})$$

Remarque : Ceci revient à dire

$$F_A^\sharp(\,\cdot\,,\,\cdot\,) = (\mathrm{d}A)(h\,\cdot\,,h\,\cdot\,)$$

Remarque : Par l'équation structurelle d'Élie Cartan obtenue dans la dernière section, on obtient l'équation fort utile suivante :

$$F_A^\sharp = \mathrm{d}A + [A,A] = \mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A\wedge A]$$

où $[A\wedge A](\,\cdot\,,\,\cdot\,) = 2[A\,\cdot\,,A\,\cdot\,]$ tel que vu plus haut.

Proposition : $F_A^\sharp$ est une forme basique qui vit en $\Omega^2_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$.

Preuve : D'abord, $F_A^\sharp$ est horizontale. Ensuite, de $F_A^\sharp = \mathrm{d}A + [A,A]$ on a

$$\begin{aligned}
(\Phi_g)^*F_A^\sharp &= (\Phi_g)^*(\mathrm{d}A) + (\Phi_g)^*[A,A] \\
&= \mathrm{d}(\Phi_g)^*A + [(\Phi_g)^*A,(\Phi_g)^*A] \\
&= \mathrm{d}\mathrm{Ad}_{g^{-1}}A + [\mathrm{Ad}_{g^{-1}}A,\mathrm{Ad}_{g^{-1}}A] \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\mathrm{d}A + \mathrm{Ad}_{g^{-1}}[A,A] \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\mathrm{d}A + [A,A]) \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}}F_A^\sharp
\end{aligned}$$

C'est-à-dire, $F_A^\sharp$ est Ad-équivariante. D'où $F_A^\sharp \in \Omega^2_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$. □

Remarque : $F_A^\sharp$ descend donc à une 2-forme différentielle globale $F_A \in \Omega^2(B;\mathrm{Ad}P)$.

Définition : Une forme de connexion A est dite *plate* si elle est de courbure nulle, i.e. si $F_A^\sharp = 0$, ou encore si $F_A = 0$.

Remarque : Plus bas on verra que $F_A^\sharp = \mathrm{d}^A A$.

11.5 Connexion et courbure sur la base :

Soit $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ une section trivialisante locale. Soient

$$A_\alpha := s_\alpha^* A \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})$$

et

$$(F_A)_\alpha := s_\alpha^* F_A \in \Omega^2(U_\alpha; \mathfrak{g})$$

Proposition : $(F_A)_\alpha = \mathrm{d}A_\alpha + [A_\alpha, A_\alpha]$.

Preuve : En utilisant l'équation structurelle d'Élie Cartan, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
(F_A)_\alpha &= s_\alpha^* F_A^\sharp \\
&= s_\alpha^*(\mathrm{d}A + [A, A]) \\
&= s_\alpha^* \mathrm{d}A + s_\alpha^*([A, A]) \\
&= \mathrm{d}s_\alpha^* A + [s_\alpha^* A, s_\alpha^* A] \\
&= \mathrm{d}A_\alpha + [A_\alpha, A_\alpha]
\end{aligned}$$

□

Proposition : $(F_A)_\alpha$ peut s'écrire de toutes les manières suivantes :

$$\begin{aligned}
(F_A)_\alpha &= \mathrm{d}A_\alpha + \frac{1}{2}[A_\alpha \wedge A_\alpha] \\
&= \mathrm{d}A_\alpha + [A_\alpha, A_\alpha] \\
&= \mathrm{d}A_\alpha + A_\alpha(\wedge, \circ)A_\alpha \\
&= \mathrm{d}_A A_\alpha - \frac{1}{2}[A_\alpha \wedge A_\alpha] \\
&= \mathrm{d}_A A_\alpha - [A_\alpha, A_\alpha] \\
&= \mathrm{d}_A A_\alpha - A_\alpha(\wedge, \circ)A_\alpha
\end{aligned}$$

Preuve : Découle de la dernière proposition et de :

$$\frac{1}{2}[A_\alpha \wedge A_\alpha] = [A_\alpha, A_\alpha] = A_\alpha(\wedge, \circ)A_\alpha$$

et de :

$$\mathrm{d}_A A_\alpha = \mathrm{d}A_\alpha + (\mathrm{Ad}_* A_\alpha)(\wedge, \circ)A_\alpha = \mathrm{d}A_\alpha + [A_\alpha \wedge A_\alpha]$$

□

Remarque : Cette dernière proposition est contre-intuitive au sens où $F_A^\sharp = \mathrm{d}^A A$ *ne descend pas à* $(F_A)_\alpha = \mathrm{d}_A A_\alpha$! ! !

11.6 Une égalité fort utile :

Notation : Soit θ la 1-forme de Maurer-Cartan sur G. J'utiliserai la notation $\theta_{\alpha\beta} = (\Psi_{\alpha\beta})^*\theta$ lorsque $\Psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G$ est un changement de trivialisation locale (où $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$).

Proposition : $\mathrm{d}\theta_{\alpha\beta} = -[\theta_{\alpha\beta}, \theta_{\alpha\beta}]$

Preuve : Il suffit de mettre $\Psi_{\alpha\beta}$ au lieu de f dans l'égalité $\mathrm{d}f^*\theta = -[f^*\theta, f^*\theta]$. □

Remarque : Cette dernière proposition $\mathrm{d}\theta_{\alpha\beta} + [\theta_{\alpha\beta}, \theta_{\alpha\beta}] = 0$ est simplement le rappel par $\Psi_{\alpha\beta}$ de l'équation structurelle de Maurer-Cartan $\mathrm{d}\theta + [\theta, \theta] = 0$.

Proposition : $A_\beta = \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}} A_\alpha + \theta_{\alpha\beta}$.

Preuve : Soit $X \in TB$ quelconque. En utilisant la règle de Leibniz et l'égalité $A \circ (\Phi_*)|_g = \theta|_g$ on calcule directement :

$$\begin{aligned}
A_\beta(X) &= (s_\beta^* A)(X) \\
&= A_{s_\beta}(s_\beta)_*(X) \\
&= A_{s_\beta}(s_\alpha \cdot \Psi_{\alpha\beta})_*(X) \\
&= A_{s_\beta}((s_\alpha)_*(X) \cdot \Psi_{\alpha\beta} + s_\alpha \cdot (\Psi_{\alpha\beta})_*(X)) \\
&= A_{s_\beta}((\Phi_{\Psi_{\alpha\beta}})_*(s_\alpha)_*(X) + ((\Phi_*)|_{\Psi_{\alpha\beta}}(\Psi_{\alpha\beta})_*(X))|_{s_\alpha}) \\
&= A_{s_\beta}(\Phi_{\Psi_{\alpha\beta}})_*(s_\alpha)_*(X) + A_{s_\beta}((\Phi_*)|_{\Psi_{\alpha\beta}}(\Psi_{\alpha\beta})_*(X))|_{s_\alpha} \\
&= (\Phi_{\Psi_{\alpha\beta}})^* A_{s_\beta \cdot \Psi_{\alpha\beta}^{-1}}(s_\alpha)_*(X) + \theta|_{\Psi_{\alpha\beta}}(\Psi_{\alpha\beta})_*(X) \\
&= (\Phi_{\Psi_{\alpha\beta}})^* A_{s_\alpha}(s_\alpha)_*(X) + ((\Psi_{\alpha\beta})^*\theta)(X) \\
&= \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}} A_{s_\alpha}(s_\alpha)_*(X) + \theta_{\alpha\beta}(X) \\
&= \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}((s_\alpha)^* A)(X) + \theta_{\alpha\beta}(X) \\
&= \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}} A_\alpha(X) + \theta_{\alpha\beta}(X)
\end{aligned}$$

D'où l'égalité recherchée $A_\beta = \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}} A_\alpha + \theta_{\alpha\beta}$. □

Proposition : $(F_A)_\beta = \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}} F_\alpha$.

Preuve : Ceci découle du fait que $F_A^\sharp \in \Omega^2_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$ et que $(F_A)_\alpha := (s_\alpha)^* F_A^\sharp$ se transforme en conséquence. □

Remarque : Si G est un groupe matriciel on obtient les deux dernières propositions se reformulent :

$$A_\beta = \Psi_{\alpha\beta}^{-1} A_\alpha \Psi_{\alpha\beta} - \mathrm{d}(\Psi_{\alpha\beta}^{-1})\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_{\alpha\beta}^{-1} A_\alpha \Psi_{\alpha\beta} + \Psi_{\alpha\beta}^{-1}\mathrm{d}\Psi_{\alpha\beta}$$

$$(F_A)_\beta = \Psi_{\alpha\beta}^{-1}(F_A)_\alpha \Psi_{\alpha\beta}$$

Ici j'ai utilisé l'égalité suivante d'une des sections plus haut :

$$\mathrm{d}(\Psi_{\alpha\beta}^{-1}) = -\Psi_{\alpha\beta}^{-1}(\mathrm{d}\Psi_{\alpha\beta})\Psi_{\alpha\beta}^{-1}$$

Remarque : En utilisant l'égalité :

$$\theta_{\alpha\beta} = \Psi_{\alpha\beta}^* \theta = -\mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}(\Psi_{\alpha\beta}^{-1})^*\theta$$

on trouve aussi :

$$A_\beta = \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}(A_\alpha - (\Psi_{\alpha\beta}^{-1})^*\theta)$$

11.7 La courbure et les changements de triv. loc. :

Puisque $F^\sharp \in \Omega^2_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$ est basique, on sait déjà que la forme de courbure se transforme comme

$$(F_A)_\beta = \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}(F_A)_\alpha$$

lors d'un changement de trivialisation locale. Voici une autre preuve directe de cette dernière égalité. En utilisant les égalités suivantes :

$$A_\beta = \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}A_\alpha + \theta_{\alpha\beta}$$

$$(F_A)_\beta = \mathrm{d}A_\beta + \frac{1}{2}[A_\beta \wedge A_\beta]$$

$$\mathrm{d}\theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}[\theta_{\alpha\beta} \wedge \theta_{\alpha\beta}] = 0$$

$$\tilde{\alpha}(\wedge,\circ)\tilde{\beta} + \tilde{\beta}(\wedge,\circ)\tilde{\alpha} = [\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}]$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}A_\alpha) = \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}\mathrm{d}A_\alpha - [\theta_{\alpha\beta} \wedge \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}A_\alpha]$$

on calcule directement :

$$\begin{aligned}
(F_A)_\beta &= \mathrm{d}A_\beta + \frac{1}{2}[A_\beta \wedge A_\beta] \\
&= \mathrm{d}(\mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}A_\alpha + \theta_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}A_\alpha + \theta_{\alpha\beta}) \wedge (\mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}A_\alpha + \theta_{\alpha\beta})] \\
&= \mathrm{d}(\mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}A_\alpha) + \mathrm{d}\theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}[\mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}A_\alpha \wedge \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}A_\alpha] \\
&\quad + \frac{1}{2}[\mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}A_\alpha \wedge \theta_{\alpha\beta}] + \frac{1}{2}[\theta_{\alpha\beta} \wedge \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}A_\alpha] + \frac{1}{2}[\theta_{\alpha\beta} \wedge \theta_{\alpha\beta}] \\
&= \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}\mathrm{d}A_\alpha - [\theta_{\alpha\beta} \wedge \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}A_\alpha] + \frac{1}{2}\mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}[A_\alpha \wedge A_\alpha] \\
&\quad + \frac{1}{2}[\theta_{\alpha\beta} \wedge \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}A_\alpha] + \frac{1}{2}[\theta_{\alpha\beta} \wedge \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}A_\alpha] \\
&= \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}(F_A)_\alpha
\end{aligned}$$

□

11.8 Connexions et trivialisations locales (1) :

Proposition : Soit θ la forme de Maurer-Cartan sur G. Alors

$$A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \circ \pi^* A_\alpha + \phi_\alpha^* \theta \qquad \text{(égalité } (*))$$

Avant de démontrer cela, on a besoin de l'identité suivante :

Proposition : $\phi_\beta^* \theta = -\mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \mathrm{Ad}_{\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}} (\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta})^* \theta + \phi_\alpha^* \theta$

Preuve : D'abord, $\phi_\beta^* \theta = (\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}^{-1} \phi_\alpha)^* \theta$. Ensuite, souvenons-nous de l'égalité de la section sur les rappels de la 1-forme de Maurer-Cartan $(fg)^* \theta = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} f^* \theta + g^* \theta$. Prenons $f = \widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}^{-1}$ et $g = \phi_\alpha$. On trouve alors :

$$(\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}^{-1} \phi_\alpha)^* \theta = \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} (\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}^{-1})^* \theta + \phi_\alpha^* \theta$$

En utilisant maintenant l'égalité $(f^{-1})^* \theta = -\mathrm{Ad}_f f^* \theta$ pour $f = \widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}$ on trouve l'égalité recherchée :

$$(\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}^{-1} \phi_\alpha)^* \theta = -\mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \mathrm{Ad}_{\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}} (\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta})^* \theta + \phi_\alpha^* \theta$$

Se qui se reformule en l'égalité souhaitée

$$\phi_\beta^* \theta = -\mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \mathrm{Ad}_{\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}} (\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta})^* \theta + \phi_\alpha^* \theta$$

□

Preuve : (de l'égalité $(*)$) : Il faut montrer quatre choses : (1) que le membre de droite se comporte comme une connexion au sens de la Ad-équivariance des connexions et que (2) $A(\xi^*) = \xi$. Ensuite il faut montrer que (3) l'égalité est indépendante du choix de trivialisation locale. Enfin, il faut montrer (4) que le noyau de A est bien égal au noyau du membre de droite de $(*)$. (En fait il suffit de montrer que le point (4) mais je fais aussi les autres points pour être certain).

Montrons le point (1). Soit $g \in G$ quelconque. Vérifions que $(\Phi_g)^* A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} =$

$\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$. On calcule directement :

$$\begin{aligned}
(\Phi_g)^* A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} &= (\Phi_g)^*(\mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \circ \pi^* A_\alpha + \phi_\alpha^* \theta) \\
&= \mathrm{Ad}_{(\Phi_g)^*\phi_\alpha^{-1}} (\Phi_g)^* \pi^* A_\alpha + (\Phi_g)^* \phi_\alpha^* \theta \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}\phi_\alpha^{-1}} (\pi \circ \Phi_g)^* A_\alpha + (\phi_\alpha \circ \Phi_g)^* \theta \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \pi^* A_\alpha + (\phi_\alpha g)^* \theta \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \pi^* A_\alpha + \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \phi_\alpha^* \theta + g^* \theta \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \pi^* A_\alpha + \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \phi_\alpha^* \theta \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}} (\mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \pi^* A_\alpha + \phi_\alpha^* \theta) \\
&= \mathrm{Ad}_{g^{-1}} A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}
\end{aligned}$$

où j'ai utilisé $g^*\theta = \theta_g g_* = 0$ car g est constante. Le point (1) est donc vrai. Montrons maintenant le point (2). Soit $\xi \in \mathfrak{g}$ quelconque. On veut montrer que $A(\xi^*)|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = \xi$. On calcule directement :

$$\begin{aligned}
A(\xi^*)|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} &= \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \circ (\pi^* A_\alpha)(\xi^*) + (\phi_\alpha^* \theta)(\xi^*) \\
&= \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \circ A_\alpha|_\pi \pi_*(\xi^*) + \theta_{\phi_\alpha} (\phi_\alpha)_*(\xi^*) \\
&= \theta_{\phi_\alpha} (\phi_\alpha)_* (\Phi_*|_e(\xi)) \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

où j'ai utilisé le fait que $\pi_*\xi^* = 0$. (TERMINER LE POINT (2)!!! JE DOIS MONTRER QUE C'EST NUL). Montrons ensuite le point (3), c'est-à-dire que l'égalité $(*)$ est légitime au sens où si $U_\alpha = U_\beta$ on a bien

$$A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = A|_{\pi^{-1}(U_\beta)}$$

En utilisant les égalités suivantes :

$$A_\beta = \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}} A_\alpha + \theta_{\alpha\beta}$$

$$\theta_{\alpha\beta} = (\Psi_{\alpha\beta})^* \theta$$

$$\phi_\beta = \widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}^{-1} \phi_\alpha$$

$$\phi_\beta^{-1} = \phi_\alpha^{-1} \widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}$$

$$\Psi_{\alpha\beta} \circ \pi = \widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}$$

$$\phi_\beta^* \theta = -\mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \mathrm{Ad}_{\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}} (\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta})^* \theta + \phi_\alpha^* \theta$$

on calcule directement :

$$\begin{aligned}
A|_{\pi^{-1}(U_\beta)} &= \mathrm{Ad}_{\phi_\beta^{-1}} \circ \pi^* A_\beta + \phi_\beta^* \theta \\
&= \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}} \circ \pi^*(\mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}} A_\alpha + \theta_{\alpha\beta}) + \phi_\beta^* \theta \\
&= \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \mathrm{Ad}_{\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}} \circ \pi^*(\mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}} A_\alpha) + \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \mathrm{Ad}_{\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}} \circ \pi^* \theta_{\alpha\beta} + \phi_\beta^* \theta \\
&= \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \mathrm{Ad}_{\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}} \circ (\mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}\circ\pi} \pi^* A_\alpha) + \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \mathrm{Ad}_{\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}} \circ \pi^*(\Psi_{\alpha\beta})^* \theta + \phi_\beta^* \theta \\
&= \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \mathrm{Ad}_{\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}} \circ (\mathrm{Ad}_{\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}^{-1}} \pi^* A_\alpha) + \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \mathrm{Ad}_{\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}} \circ (\Psi_{\alpha\beta} \circ \pi)^* \theta + \phi_\beta^* \theta \\
&= \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \circ \pi^* A_\alpha + \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \mathrm{Ad}_{\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}} \circ (\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta})^* \theta + \phi_\beta^* \theta \\
&= \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \circ \pi^* A_\alpha + \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \mathrm{Ad}_{\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}} \circ (\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta})^* \theta - \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \mathrm{Ad}_{\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}} (\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta})^* \theta + \phi_\alpha^* \theta \\
&= \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \circ \pi^* A_\alpha + \phi_\alpha^* \theta \\
&= A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}
\end{aligned}$$

Ce qui démontre que le point (3) est vérifier. Montrons maintenant le point (4), c'est-à-dire que A et $A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$ de $(*)$ ont le même noyau. (FAIRE LE POINT (4)) ! ! ! □

Remarque : Cette dernière preuve est horrible. Voir un peu plus bas j'ai une super preuve bien plus élégante.

11.9 Connexions et trivialisations locales (2) :

On vient de voir que pour A une forme de connexion sur P et θ la 1-forme de Maurer-Cartan sur G on a :

$$A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \circ \pi^* A_\alpha + \phi_\alpha^* \theta$$

En utilisant le pull-back par :

$$\Psi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha); \quad (x,g) \mapsto s_\alpha(x) \cdot g$$

ça nous donne une 1-forme sur $U_\alpha \times G$.

Proposition : On a :

$$A|_{U_\alpha \times G} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ A_\alpha + \theta$$

Preuve : On a :

$$A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \circ \pi^* A_\alpha + \phi_\alpha^* \theta$$

et :

$$\Psi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha); \quad (x,g) \mapsto s_\alpha(x) \cdot g$$

Souvenons-nous des deux identités suivantes :

$$\pi \circ \Psi_\alpha^{-1}(x,g) = x$$

$$\phi_\alpha \circ \Psi_\alpha^{-1}(x,g) = g$$

On calcule alors directement :

$$\begin{aligned} A|_{U_\alpha \times G} &= (\Psi_\alpha^{-1})^* (A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}) \\ &= (\Psi_\alpha^{-1})^* (\mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \circ \pi^* A_\alpha + \phi_\alpha^* \theta) \\ &= \mathrm{Ad}_{(\Psi_\alpha^{-1})^* \phi_\alpha^{-1}} \circ (\Psi_\alpha^{-1})^* \pi^* A_\alpha + (\Psi_\alpha^{-1})^* \phi_\alpha^* \theta \\ &= \mathrm{Ad}_{(\Psi_\alpha^{-1})^* \phi_\alpha^{-1}} \circ (\pi \circ \Psi_\alpha^{-1})^* A_\alpha + (\phi_\alpha \circ \Psi_\alpha^{-1})^* \theta \\ &= \mathrm{Ad}_{(\phi_\alpha \circ \Psi_\alpha^{-1})^{-1}} \circ (x)^* A_\alpha + (g)^* \theta \\ &= \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ A_\alpha + \theta \end{aligned}$$

□

Remarque : Cette preuve est basée sur la proposition de la dernière section, où la preuve était horrible. Il y a une meilleure manière de faire. On commence par montrer l'égalité :

$$A|_{U_\alpha \times G} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ A_\alpha + \theta$$

puis ça induit l'autre égalité :

$$A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \circ \pi^* A_\alpha + \phi_\alpha^* \theta$$

Voir la prochaine section.

11.10 Connexions et trivialisations locales (3) :

Proposition : Soit $\Psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ une trivialisation locale. Alors :

$$((\Psi_\alpha^{-1})^* A)|_{(x,g)} = \mathrm{Ad}_g^{-1} \circ A_\alpha|_x + \theta|_g$$

Preuve : D'abord, pour $g \in G$ et $\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} g_t \in \mathfrak{g}$, $g_0 = e$, on a :

$$\begin{aligned}
(R_*|_e(\xi))|_g &= \left(R_*|_e\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} g_t\right)\right)|_g \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} R_{g_t}(g) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} g \cdot g_t \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} L_g(g_t) \\
&= (L_g)_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} g_t\right) \\
&= (L_g)_*(\xi)
\end{aligned}$$

En particulier, tout vecteur $v \in T_g G$ peut s'écrire comme :

$$v = (R_*|_e(\xi))|_g = (L_g)_*(\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} g \cdot g_t$$

où $\xi = \theta(v)$. Maintenant, on remarque que l'application inverse $\Psi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times G \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ est explicitement donnée par :

$$\Psi_\alpha^{-1}(x, g) = (s_\alpha(x)) \cdot g = s_{\alpha,g}(x)$$

où $s_{\alpha,g} := s_\alpha \cdot g = \Phi_g \circ s_\alpha$. On a $T_{(x,g)}(U_\alpha \times G) = T_x \times T_g G$. Pour $v \in T_x U_\alpha$, on a :

$$\begin{aligned}
(\Psi_\alpha^{-1})_*|_{(x,g)}(v) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Psi_\alpha^{-1}(x + tv, g) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} s_{\alpha,g}(x + tv) \\
&= (s_{\alpha,g})_*|_x(v)
\end{aligned}$$

Pour $v \in T_g G$, on pose $\xi = \theta(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} g_t \in \mathfrak{g}$, $g_0 = e$ et on a :

$$\begin{aligned}
(\Psi_\alpha^{-1})_*|_{(x,g)}(v) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \Psi_\alpha^{-1}(x, g \cdot g_t) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (s_\alpha(x)) \cdot (g \cdot g_t) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (s_{\alpha,g}(x)) \cdot g_t \\
&= \xi^*|_{s_{\alpha,g}(x)} \\
&= (\theta|_g(v))^*|_{s_{\alpha,g}(x)}
\end{aligned}$$

L'évaluation de $(\Psi_\alpha^{-1})^* A$ sur $v \in T_x U_\alpha$ est :

$$\begin{aligned}
((\Psi_\alpha^{-1})^* A)|_{(x,g)}(v) &= A_{\Psi_\alpha^{-1}(x,g)}((\Psi_\alpha^{-1})_*|_{(x,g)} v) \\
&= A_{s_{\alpha,g}(x)}((s_{\alpha,g})_*|_x(v)) \\
&= (s_{\alpha,g}^* A)|_x(v) \\
&= ((s_\alpha \cdot g)^* A)|_x(v) \\
&= ((\Phi_g \circ s_\alpha)^* A)|_x(v) \\
&= (s_\alpha^* \Phi_g^* A)|_x(v) \\
&= (s_\alpha^*(\mathrm{Ad}_g^{-1} \circ A))|_x(v) \\
&= (\mathrm{Ad}_g^{-1} \circ (s_\alpha^* A))|_x(v) \\
&= \mathrm{Ad}_g^{-1} \circ A_\alpha|_x(v)
\end{aligned}$$

L'évaluation de $(\Psi_\alpha^{-1})^* A$ sur $v \in T_g G$ est :

$$\begin{aligned}
((\Psi_\alpha^{-1})^* A)|_{(x,g)}(v) &= A_{\Psi_\alpha^{-1}(x,g)}((\Psi_\alpha^{-1})_*|_{(x,g)} v) \\
&= A_{s_{\alpha,g}(x)}((\theta|_g(v))^*|_{s_{\alpha,g}(x)}) \\
&= \theta|_g(v)
\end{aligned}$$

D'où :

$$((\Psi_\alpha^{-1})^* A)|_{(x,g)} = \mathrm{Ad}_g^{-1} \circ A_\alpha|_x + \theta|_g$$

□

Proposition : Soit $\Psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ une trivialisation locale. Alors :

$$A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \circ \pi^* A_\alpha + \phi_\alpha^* \theta$$

Preuve : En utilisant $\Psi_\alpha = (\pi, \phi_\alpha)$, on trouve directement :

$$\begin{aligned} A|_{s_{\alpha,g}(x)} &= \Psi_\alpha^*(((\Psi_\alpha^{-1})^*A)|_{(x,g)}) \\ &= \Psi_\alpha^*(\mathrm{Ad}_g^{-1} \circ A_\alpha|_x + \theta|_g) \\ &= \mathrm{Ad}_g^{-1} \circ \Psi_\alpha^* A_\alpha|_x + \Psi_\alpha^*\theta|_g \\ &= \mathrm{Ad}_g^{-1} \circ \pi^* A_\alpha|_x + \phi_\alpha^*\theta|_g \end{aligned}$$

$\square$

12 Dérivées covariantes extérieures

12.1 Dérivée extérieur sur les k-formes à valeurs vectorielles :

La dérivée extérieure $\mathrm{d} : \Omega^k(P) \to \Omega^{k+1}(P)$ en induit une

$$\mathrm{d} : \Omega^k(P; V) \to \Omega^{k+1}(P; V)$$

donnée par :

$$\mathrm{d}\left(\sum_i \gamma_i \otimes v_i\right) := \sum_i (\mathrm{d}\gamma_i) \otimes v_i$$

Elle est vérifie les même propriétés que d, incluant $\mathrm{d}^2 = 0$ et

$$\mathrm{d}(\gamma \wedge \eta) = \mathrm{d}\gamma \wedge \eta + (-1)^p \gamma \wedge \mathrm{d}\eta$$

où $\gamma \in \Omega^p(P; V)$

Définition : Le *complexe de de Rham à valeurs en V* est le complexe donné par

$$\mathrm{d} : \Omega^k(P; V) \to \Omega^{k+1}(P; V)$$

Remarque : L'égalité $\mathrm{d}\left(\sum_i \gamma_i \otimes v_i\right) := \sum_i (\mathrm{d}\gamma_i) \otimes v_i$ n'est vraie que pour des v_i constants.

Remarque : J'écrirai plutôt le plus souvent $\eta = \sigma \otimes \alpha \in \Omega^k(P; V)$ pour $\sigma \in C^\infty(P; V)$ et $\alpha \in \Omega^k(P)$. On a alors la règle de Leibniz :

$$\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}(\sigma \otimes \alpha) = (\mathrm{d}\sigma) \wedge \alpha + \sigma \otimes \mathrm{d}\alpha$$

12.2 Dériv. cov. ext. d^A sur $\Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V)$:

Définition : La *dérivée covariante extérieure* d^A est par définition :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^A : \Omega^k_\rho(P;V) &\to \Omega^{k+1}_\rho(P;V) \\ \eta &\mapsto \mathrm{d}^A\eta := (\mathrm{d}\eta)_{\mathrm{hor}} \end{aligned}$$

Remarque : L'image de la restriction de d^A à $\Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V)$ repose en $\Omega^{k+1}_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V)$. C'est-à-dire, la dérivée covariante extérieure d^A envoie des formes basiques à des formes basiques. On a donc une application

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^A : \Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V) &\to \Omega^{k+1}_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V) \\ \eta &\mapsto \mathrm{d}^A\eta := (\mathrm{d}\eta)_{\mathrm{hor}} \end{aligned}$$

Remarque : Alors que $\mathrm{d}^2 = 0$, il n'est généralement pas vrai que $(\mathrm{d}^A)^2 = 0$. En fait, nous verrons plus bas que $(\mathrm{d}^A)^2$ mesure la courbure $F^\sharp_A$ de A. Ainsi, la courbure est une obstruction à ce que

$$\mathrm{d}^A : \Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V) \to \Omega^{k+1}_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V)$$

définisse un complexe.

Remarque : On avait définit $F^\sharp_A := (\mathrm{d}A)_{\mathrm{hor}}$. Ainsi, on peut réécrire la définition de la forme de courbure $F^\sharp_A$ sur P comme :

$$F^\sharp_A := \mathrm{d}^A A$$

Les deux définitions $F^\sharp_A := (\mathrm{d}A)_{\mathrm{hor}}$ et $F^\sharp_A := \mathrm{d}^A A$ sont évidemment équivalentes puisque $\mathrm{d}^A(\,\cdot\,) := (\mathrm{d}\,\cdot\,)_{\mathrm{hor}}$.

12.3 Égalité utile $\mathbf{d}^A = \mathbf{d} + (\rho_* A)\circ$ sur $\Gamma^\infty_\rho(P;V)$:

Proposition : Soit $\sigma^\sharp \in \Gamma^\infty_\rho(P;V) = \Omega^0_{\mathrm{Ad,hor}}(P;V)$. Alors :

$$\mathrm{d}^A\sigma^\sharp = \mathrm{d}\sigma^\sharp + (\rho_* A) \circ \sigma^\sharp$$

Preuve : Soit $X \in \mathfrak{X}(P)$ quelconque. Il se décompose en composantes horizontales et verticales comme $X = hX + vX$. Sans pertes de généralités, on peut supposer que vX est fondamental, i.e. que $X = hX + \xi^*$. Plus haut on a démontré que $\iota_{\xi^*}\mathrm{d}\sigma^\sharp = -\rho_*(\xi) \circ \sigma^\sharp$. On calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
\iota_X \mathrm{d}^A\sigma^\sharp &= \iota_X(\mathrm{d}\sigma^\sharp)_h \\
&= \iota_{hX}\mathrm{d}\sigma^\sharp \\
&= \iota_{X-\xi^*}\mathrm{d}\sigma^\sharp \\
&= \iota_X\mathrm{d}\sigma^\sharp - \iota_{\xi^*}\mathrm{d}\sigma^\sharp \\
&= \iota_X\mathrm{d}\sigma^\sharp + \rho_*(\xi) \circ \sigma^\sharp \\
&= \iota_X\mathrm{d}\sigma^\sharp + \rho_*(A(\xi^*)) \circ \sigma^\sharp \\
&= \iota_X\mathrm{d}\sigma^\sharp + \rho_*(A(hX + \xi^*)) \circ \sigma^\sharp \\
&= \iota_X\mathrm{d}\sigma^\sharp + \rho_*(A(X)) \circ \sigma^\sharp \\
&= \iota_X\mathrm{d}\sigma^\sharp + (\rho_* A)(X) \circ \sigma^\sharp \\
&= \iota_X\mathrm{d}\sigma^\sharp + \iota_X(\rho_* A) \circ \sigma^\sharp \\
&= \iota_X(\mathrm{d}\sigma^\sharp + (\rho_* A) \circ \sigma^\sharp)
\end{aligned}$$

Mais X était quelconque. D'où l'égalité recherchée $\mathrm{d}^A\sigma^\sharp = \mathrm{d}\sigma^\sharp + (\rho_* A)\sigma^\sharp$. □

12.4 Égalité utile $\mathbf{d}^A = \mathbf{d} + (\rho_* A)(\wedge, \circ)$ sur $\Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P; V)$:

Proposition : Sur les formes basiques on a l'égalité :

$$\mathrm{d}^A = \mathrm{d} + (\rho_* A)(\wedge, \circ)$$

Preuve : Soient A une forme de connexion sur P et $\eta^\sharp \in \Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P; V)$. Soit $X \in \mathfrak{X}(P)$. Sans pertes de généralités, on peut supposer que la composante verticale de X est fondamentale, i.e. que $X = hX + \xi^*$ pour un certain $\xi \in \mathfrak{g}$. Aussi, sans pertes de généralités, on peut supposer que $\eta^\sharp = \sigma^\sharp \otimes \alpha^\sharp$ où $\sigma^\sharp$ est ρ-équivariante et où $\alpha^\sharp$ est une forme basique réelle. Comme $\alpha^\sharp$ est basique, $\mathrm{d}\alpha^\sharp$ est aussi basique. Il suit que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^A \eta^\sharp &= (\mathrm{d}\eta^\sharp)_{\mathrm{hor}} \\
&= (\mathrm{d}(\sigma^\sharp \otimes \alpha^\sharp))_{\mathrm{hor}} \\
&= ((\mathrm{d}\sigma^\sharp) \wedge \alpha^\sharp + \sigma^\sharp \wedge (\mathrm{d}\alpha^\sharp))_{\mathrm{hor}} \\
&= (\mathrm{d}\sigma^\sharp)_{\mathrm{hor}} \wedge (\alpha^\sharp)_{\mathrm{hor}} + (\sigma^\sharp)_{\mathrm{hor}} \otimes (\mathrm{d}\alpha^\sharp)_{\mathrm{hor}} \\
&= (\mathrm{d}^A \sigma^\sharp) \wedge \alpha^\sharp + \sigma^\sharp \otimes \mathrm{d}\alpha^\sharp \\
&= (\mathrm{d}\sigma^\sharp + (\rho_* A) \circ \sigma^\sharp) \wedge \alpha^\sharp + \sigma^\sharp \otimes \mathrm{d}\alpha^\sharp \\
&= (\mathrm{d}\sigma^\sharp) \wedge \alpha^\sharp + ((\rho_* A) \circ \sigma^\sharp) \wedge \alpha^\sharp + \sigma^\sharp \otimes \mathrm{d}\alpha^\sharp \\
&= \mathrm{d}(\sigma^\sharp \otimes \alpha^\sharp) + (\rho_* A)(\wedge, \circ)(\sigma^\sharp \otimes \alpha^\sharp) \\
&= \mathrm{d}\eta^\sharp + (\rho_* A)(\wedge, \circ)\eta^\sharp
\end{aligned}$$

□

Remarque : Il serait tentant d'utiliser la formule $\mathrm{d}^A = \mathrm{d} + \rho_* A(\wedge, \circ)$ sur A pour retrouver l'équation structurelle d'Élie Cartan $F^\sharp_A = \mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A \wedge A]$. Mais la forme de connexion A n'est pas basique et $\mathrm{d}^A = \mathrm{d} + \rho_* A(\wedge, \circ)$ ne s'y applique donc pas. En effet, il manque un facteur 1/2 quand on utilise ça. En effet, avec $\rho = \mathrm{Ad}$, on a un facteur 2 de trop :

$$(\mathrm{Ad}_* A)(\wedge, \circ)A = [A \wedge A] = 2[A, A]$$

12.5 Dériv. cov. $\mathbf{d}_A$ sur $\Omega^k(B; P \times_\rho V)$:

Soit $E := P \times_\rho V$. En utilisant la bijection $\Omega^k(B;E) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V)$ on définit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_A : \Omega^k(B;E) &\to \Omega^{k+1}(B;E) \\ \eta &\mapsto \mathrm{d}_A\eta := (\mathrm{d}^A\eta^\sharp)_\sharp \end{aligned}$$

Remarque : Il est aussi usuel d'utiliser la notation ∇ au lieu de d_A. J'utiliserai la notation d_A pour souligner la dépendance de la dérivée covariante en la connexion A.

Remarque : Souvenons-nous que $\sigma \in \Gamma^\infty(E)$ peut s'écrire comme $\sigma(\pi(a)) = [a, \sigma^\sharp(a)]$ pour tout $a \in P$. On a alors l'égalité :

$$(\nabla_X\sigma)(\pi(a)) = (\iota_X \mathrm{d}_A\sigma)(\pi(a)) = [a, (\mathrm{d}\sigma^\sharp)_a(X^\sharp)_a]$$

où $X^\sharp$ est le relevé horizontal de $X \in \mathfrak{X}(B)$. C'est ce genre de formulation que j'ai utilisé dans mon mémoire de maîtrise.

Remarque : L'égalité $\mathrm{d}^A = \mathrm{d} + (\rho_*A)(\wedge,\circ)$ ne descend, hélas, pas sur B car A ne descend pas sur B (n'étant pas basique). Néanmoins, donnée une section trivialisante locale $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}$, la dérivée covariante extérieure d_A peut localement s'exprimer comme :

Proposition : $(\mathrm{d}_A\eta)_\alpha = \mathrm{d}\eta_\alpha + (\rho_*A_\alpha)(\wedge,\circ)\eta_\alpha$.

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}_A\eta)_\alpha &= s_\alpha^*(\mathrm{d}_A\eta)^\sharp \\ &= s_\alpha^*((\mathrm{d}^A\eta^\sharp)_\sharp)^\sharp \\ &= s_\alpha^*(\mathrm{d}^A\eta^\sharp) \\ &= s_\alpha^*(\mathrm{d}\eta^\sharp + (\rho_*A)(\wedge,\circ)\eta^\sharp) \\ &= \mathrm{d}s_\alpha^*\eta^\sharp + (\rho_*(s_\alpha^*A))(\wedge,\circ)(s_\alpha^*\eta^\sharp) \\ &= \mathrm{d}\eta_\alpha + (\rho_*A_\alpha)(\wedge,\circ)\eta_\alpha \end{aligned}$$

□

Remarque : Cette dernière égalité est parfois dénotée $\mathrm{d}_A\eta_\alpha$ sans parenthèse. Il ne faut pas s'y méprendre : d_A agit *a priori* sur $\Omega^k(B;E)$ et non sur $\Omega^k(U_\alpha;V)$. Lorsqu'on dit que d_A agit sur $\Omega^k(U_\alpha;V)$, c'est toujours via l'égalité de la dernière proposition.

12.6 Variation de la connexion dans d_A :

Plus bas on verra que l'espace $\mathcal{A}$ des connexions A sur P est un espace affine modélisé sur $\Omega^1(B; \mathrm{Ad}P)$. Ainsi, pour tout $\tau \in \Omega^1(B; \mathrm{Ad}P)$, $A + \tau^\sharp \in \mathcal{A}$. On peut alors se demander quel est le lien entre la dérivée covariante $\mathrm{d}^{A+\tau^\sharp}$ et la dérivée covariante d^A.

Proposition : $\mathrm{d}^{A+\tau^\sharp}(\,\cdot\,) = \mathrm{d}^A(\,\cdot\,) + (\rho_*\tau^\sharp)(\wedge, \circ)(\,\cdot\,)$.

Preuve : Soit $\eta \in \Omega^k(B; E)$ pour un fibré associé $E = P \times_G V$ où $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ est une représentation de G sur V. Soient $A \in \mathcal{A}$ et $\tau \in \Omega^1(B; \mathrm{Ad}P)$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{A+\tau^\sharp}\eta^\sharp &= \mathrm{d}\eta^\sharp + (\rho_*(A + \tau^\sharp))(\wedge, \circ)\eta^\sharp \\ &= \mathrm{d}\eta^\sharp + (\rho_*A)(\wedge, \circ)\eta^\sharp + (\rho_*\tau^\sharp)(\wedge, \circ)\eta^\sharp \\ &= \mathrm{d}^A\eta^\sharp + (\rho_*\tau^\sharp)(\wedge, \circ)\eta^\sharp \end{aligned}$$

□

Corollaire : $\mathrm{d}_{A+\tau^\sharp} = \mathrm{d}_A + (\rho_*\tau)(\wedge, \circ)$.

Remarque : En particulier, pour $\rho = \mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ la représentation adjointe et pour $\eta \in \Omega^k(B; \mathrm{Ad}P)$, on a :

$$\mathrm{d}_{A+\tau^\sharp}\eta = \mathrm{d}_A\eta + [\tau \wedge \eta]$$

12.7 Égalité $(\mathbf{d}^A)^2 = F_A^\sharp$ et la courbure :

Proposition : $(\mathrm{d}^A)^2\eta^\sharp = (\rho_* F_A^\sharp)(\wedge,\circ)\eta^\sharp$.

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{array}{rcl}
(\mathrm{d}^A)^2\eta^\sharp & = & \mathrm{d}^A(\mathrm{d}^A\eta^\sharp) \\
& = & \mathrm{d}^A(\mathrm{d}\eta^\sharp + (\rho_*A)(\wedge,\circ)\eta^\sharp) \\
& = & (\mathrm{d} + (\rho_*A)(\wedge,\circ))(\mathrm{d}\eta^\sharp + (\rho_*A)(\wedge,\circ)\eta^\sharp) \\
& = & \mathrm{d}^2\eta^\sharp + (\rho_*A)(\wedge,\circ)\mathrm{d}\eta^\sharp + \mathrm{d}((\rho_*A)(\wedge,\circ)\eta^\sharp) + (\rho_*A)(\wedge,\circ)((\rho_*A)(\wedge,\circ)\eta^\sharp) \\
& = & (\rho_*A)(\wedge,\circ)\mathrm{d}\eta^\sharp + \mathrm{d}((\rho_*A)(\wedge,\circ)\eta^\sharp) + (\rho_*A)(\wedge,\circ)((\rho_*A)(\wedge,\circ)\eta^\sharp)
\end{array}$$

où

$$\mathrm{d}((\rho_*A)(\wedge,\circ)\eta^\sharp) = (\rho_*\mathrm{d}A)(\wedge,\circ)\eta^\sharp - (\rho_*A)(\wedge,\circ)\mathrm{d}\eta^\sharp$$

où le -1 découle du fait que A est une 1-forme. On a aussi

$$(\rho_*A)(\wedge,\circ)((\rho_*A)(\wedge,\circ)\eta^\sharp) = \rho_*(A(\wedge,\circ)A)(\wedge,\circ)\eta^\sharp = \rho_*([A,A])(\wedge,\circ)\eta^\sharp$$

qui implique que

$$\begin{array}{rcl}
(\mathrm{d}^A)^2\eta^\sharp & = & (\rho_*A)(\wedge,\circ)\mathrm{d}\eta^\sharp + \mathrm{d}((\rho_*A)(\wedge,\circ)\eta^\sharp) + (\rho_*A)(\wedge,\circ)((\rho_*A)(\wedge,\circ)\eta^\sharp) \\
& = & (\rho_*A)(\wedge,\circ)\mathrm{d}\eta^\sharp + (\rho_*\mathrm{d}A)(\wedge,\circ)\eta^\sharp - (\rho_*A)(\wedge,\circ)\mathrm{d}\eta^\sharp + \rho_*([A,A])(\wedge,\circ)\eta^\sharp \\
& = & (\rho_*\mathrm{d}A)(\wedge,\circ)\eta^\sharp + \rho_*([A,A])(\wedge,\circ)\eta^\sharp \\
& = & \rho_*(\mathrm{d}A + [A,A])(\wedge,\circ)\eta^\sharp \\
& = & (\rho_*F_A^\sharp)(\wedge,\circ)\eta^\sharp
\end{array}$$

□

Corollaire : $\mathrm{d}_A^2\eta = (\rho_*F_A)(\wedge,\circ)\eta$.

Remarque : Si $\rho = \mathrm{Ad}$, alors $\mathrm{d}_A^2\eta = [F_A \wedge \eta]$.

Remarque : On voit alors explicitement que la courbure est une restriction à ce que d^A, ou encore d_A, définisse un complexe de cochaînes (les complexes de cochaînes ont une différentielle d qui fait augmenter l'indice et qui vérifie $\mathrm{d}^2 = 0$).

Remarque : Si ρ agit trivialement sur V, i.e. si $\rho = \mathrm{id}_V$, on a d'une part $E = B \times V$ et d'autre part $\rho_* = 0$. Ainsi, $\mathrm{d}^A = \mathrm{d}$ et donc $\mathrm{d}_A = \mathrm{d}$ et donc $\mathrm{d}_A^2 = \rho_* F_A = 0$. On voit alors une relation intéressante : le fibré $E = B \times V$ trivial a courbure nulle et on a un complexe de cochaîne. Il semble alors naturel de définir la courbure d'une suite comme étant le carré de la différentielle. On aurait qu'un complexe de (co-)chaîne lorsque la courbure serait nulle (à réfléchir).

12.8 Identité de Jacobi et $[A \wedge [A \wedge A]] = 0$:

Proposition : $[A \wedge [A \wedge A]] = 0$.

Preuve : La forme de connexion A peut toujours se décomposer comme :

$$A = \sum_i \xi_i \otimes \alpha_i$$

pour certains $\xi_i \in \mathfrak{g}$ et α_i des 1-formes réelles verticales. En utilisant cette décomposition ainsi que l'identité de Jacobi, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
[A \wedge [A \wedge A]] &= \sum_{i,j,k} \big[(\xi_i \otimes \alpha_i) \wedge \big[(\xi_j \otimes \alpha_j) \wedge (\xi_k \otimes \alpha_k)\big]\big] \\
&= \sum_{i,j,k} [\xi_i, [\xi_j, \xi_k]] \otimes (\alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \alpha_k) \\
&= \sum_{i,j,k} ([\xi_k, [\xi_j, \xi_i]] + [\xi_j, [\xi_i, \xi_k]]) \otimes (\alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \alpha_k) \\
&= \sum_{i,j,k} [\xi_k, [\xi_j, \xi_i]] \otimes (\alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \alpha_k) + [\xi_j, [\xi_i, \xi_k]] \otimes (\alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \alpha_k) \\
&= \sum_{i,j,k} [\xi_i, [\xi_j, \xi_k]] \otimes (\alpha_k \wedge \alpha_j \wedge \alpha_i) + [\xi_i, [\xi_j, \xi_k]] \otimes (\alpha_j \wedge \alpha_i \wedge \alpha_k) \\
&= \sum_{i,j,k} [\xi_i, [\xi_j, \xi_k]] \otimes (\alpha_k \wedge \alpha_j \wedge \alpha_i + \alpha_j \wedge \alpha_i \wedge \alpha_k) \\
&= \sum_{i,j,k} [\xi_i, [\xi_j, \xi_k]] \otimes (-\alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \alpha_k - \alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \alpha_k) \\
&= -2 \sum_{i,j,k} [\xi_i, [\xi_j, \xi_k]] \otimes (\alpha_i \wedge \alpha_j \wedge \alpha_k) \\
&= -2[A \wedge [A \wedge A]]
\end{aligned}$$

D'où $3[A \wedge [A \wedge A]] = 0$. D'où l'égalité recherchée $[A \wedge [A \wedge A]] = 0$. □

12.9 Vers l'identité de Bianchi :

Proposition : $[\mathrm{d}A \wedge A] + [A \wedge \mathrm{d}A] = 0$.

Preuve : On a vu plus haut que $[\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}] = (-1)^{pq+1}[\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha}]$. Il suit que $[\mathrm{d}A \wedge A] = -[A \wedge \mathrm{d}A]$. D'où l'égalité recherchée $[\mathrm{d}A \wedge A] + [A \wedge \mathrm{d}A] = 0$. $\square$

Proposition : $\mathrm{d}[A \wedge A] = [\mathrm{d}A \wedge A] - [A \wedge \mathrm{d}A]$.

Preuve : En décomposant A comme

$$A = \sum_i \xi_i \otimes \alpha_i$$

on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}[A \wedge A] &= \sum_{i,j} [\xi_i, \xi_j] \otimes \mathrm{d}(\alpha_i \wedge \alpha_j) \\
&= \sum_{i,j} [\xi_i, \xi_j] \otimes (\mathrm{d}\alpha_i \wedge \alpha_j - \alpha_i \wedge \mathrm{d}\alpha_j) \\
&= \sum_{i,j} [(\xi_i \otimes \mathrm{d}\alpha_i) \wedge (\xi_j \otimes \alpha_j)] - [(\xi_i \otimes \alpha_i) \wedge (\xi_j \otimes \mathrm{d}\alpha_j)] \\
&= \sum_{i,j} [\mathrm{d}(\xi_i \otimes \alpha_i) \wedge (\xi_j \otimes \alpha_j)] - [(\xi_i \otimes \alpha_i) \wedge \mathrm{d}(\xi_j \otimes \alpha_j)] \\
&= [\mathrm{d}A \wedge A] - [A \wedge \mathrm{d}A]
\end{aligned}$$

$\square$

Corollaire : $\mathrm{d}[A \wedge A] = -2[A \wedge \mathrm{d}A]$.

12.10 Identité de Bianchi $\mathrm{d}_A F_A = 0$:

Proposition : La forme de courbure vérifie l'identité de Bianchi :

$$\mathrm{d}_A F_A = 0$$

Preuve : Il suffit de démontrer que $\mathrm{d}^A F_A^\sharp = 0$. En utilisant les identités de la dernière section, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^A(F_A^\sharp) &= \mathrm{d}F_A^\sharp + (\mathrm{Ad}_*(A))(\wedge,\circ)F_A^\sharp \\
&= \mathrm{d}(\mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A \wedge A]) + (\mathrm{Ad}_*(A))(\wedge,\circ)(\mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A \wedge A]) \\
&= \mathrm{d}^2 A + \frac{1}{2}\mathrm{d}([A \wedge A]) + (\mathrm{Ad}_*(A))(\wedge,\circ)(\mathrm{d}A) + \frac{1}{2}(\mathrm{Ad}_*(A))(\wedge,\circ)([A \wedge A]) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{d}([A \wedge A]) + [A \wedge \mathrm{d}A] + \frac{1}{2}[A \wedge [A \wedge A]] \\
&= \frac{1}{2}(-2[A \wedge \mathrm{d}A]) + [A \wedge \mathrm{d}A] \\
&= -[A \wedge \mathrm{d}A] + [A \wedge \mathrm{d}A] \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

12.11 Règle de Leibniz sur d^A et d_A :

Soient $\eta_1^\sharp \in \Omega^p_{\rho_1,\mathrm{hor}}(P;V_1)$ et $\eta_2^\sharp \in \Omega^q_{\rho_2,\mathrm{hor}}(P;V_2)$ deux formes basiques respectivement ρ_1-équivariante et ρ_2-équivariante. On peut les tensoriser et obtenir une forme basique $(\rho_1 \otimes \rho_2)$-équivariante :

$$\eta_1^\sharp(\wedge,\otimes)\eta_2^\sharp \in \Omega^{p+q}_{\rho_1\otimes\rho_2}(P;V_1\otimes V_2)$$

Comme cette dernière forme est basique, on peut la dériver de manière covariante :

$$\mathrm{d}^A(\eta_1^\sharp(\wedge,\otimes)\eta_2^\sharp) \in \Omega^{p+q+1}_{\rho_1\otimes\rho_2}(P;V_1\otimes V_2)$$

On obtient alors une règle de Leibniz pour les dérivées covariantes de formes basiques :

Proposition : $\mathrm{d}^A(\eta_1^\sharp(\wedge,\otimes)\eta_2^\sharp) = (\mathrm{d}^A\eta_1^\sharp)(\wedge,\otimes)\eta_2^\sharp + (-1)^p\eta_1^\sharp(\wedge,\otimes)\mathrm{d}^A\eta_2^\sharp$.

Preuve : En utilisant la règle de Leibniz à la représentation infinitésimale

$$(\rho_1\otimes\rho_2)_* = (\rho_1)_*\otimes \mathrm{id}_{V_1} + \mathrm{id}_{V_2}\otimes(\rho_2)_*$$

on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^A(\eta_1^\sharp(\wedge,\otimes)\eta_2^\sharp) &= \mathrm{d}(\eta_1^\sharp(\wedge,\otimes)\eta_2^\sharp) + ((\rho_1\otimes\rho_2)_*A)(\wedge,\circ)(\eta_1^\sharp(\wedge,\otimes)\eta_2^\sharp)\\
&= (\mathrm{d}\eta_1^\sharp)(\wedge,\otimes)\eta_2^\sharp + (-1)^p\eta_1^\sharp(\wedge,\otimes)\mathrm{d}\eta_2^\sharp\\
&\quad +(((\rho_1)_*\otimes\mathrm{id}_{V_1} + \mathrm{id}_{V_1}\otimes(\rho_2)_*)A)(\wedge,\circ)(\eta_1^\sharp(\wedge,\otimes)\eta_2^\sharp)\\
&= (\mathrm{d}\eta_1^\sharp)(\wedge,\otimes)\eta_2^\sharp + (-1)^p\eta_1^\sharp(\wedge,\otimes)\mathrm{d}\eta_2^\sharp\\
&\quad +(((\rho_1)_*A)(\wedge,\circ)\eta_1^\sharp)(\wedge,\otimes)\eta_2^\sharp + \eta_1^\sharp(\wedge,\otimes)((-1)^p((\rho_2)_*A)(\wedge,\circ)\eta_2^\sharp)\\
&= (\mathrm{d}\eta_1^\sharp + ((\rho_1)_*A)(\wedge,\circ)\eta_1^\sharp)(\wedge,\otimes)\eta_2^\sharp\\
&\quad +(-1)^p\eta_1^\sharp(\wedge,\otimes)(\mathrm{d}\eta_2^\sharp + ((\rho_2)_*A)(\wedge,\circ)\eta_2^\sharp)\\
&= (\mathrm{d}^A\eta_1^\sharp)(\wedge,\otimes)\eta_2^\sharp + (-1)^p\eta_1^\sharp(\wedge,\otimes)\mathrm{d}^A\eta_2^\sharp
\end{aligned}$$

□

Corollaire : $\mathrm{d}_A(\eta_1(\wedge,\otimes)\eta_2) = (\mathrm{d}_A\eta_1)(\wedge,\otimes)\eta_2 + (-1)^p\eta_1(\wedge,\otimes)(\mathrm{d}_A\eta_2)$.

Corollaire : Pour $\eta_1 \in \Omega^p(B;E)$, $\eta_2 \in \Omega^q(B;E)$ et $h \in \Gamma^\infty(E^* \otimes E^*)$ on a :

$$\mathrm{d}(\eta_1 \wedge^h \eta_2) = \eta_1 \wedge^{\mathrm{d}_A h} \eta_2 + (\mathrm{d}_A \eta_1) \wedge^h \eta_2 + (-1)^p \eta_1 \wedge^h (\mathrm{d}_A \eta_2)$$

où $\eta_1 \wedge^h \eta_2 := h(\eta_1(\wedge, \otimes)\eta_2)$.

Remarque : Si h est d_A-adapté, i.e. si $\mathrm{d}_A h = 0$, on trouve

$$\mathrm{d}(\eta_1 \wedge^h \eta_2) = (\mathrm{d}_A \eta_1) \wedge^h \eta_2 + (-1)^p \eta_1 \wedge^h (\mathrm{d}_A \eta_2)$$

Cette dernière égalité est très utile pour relier théorie de jauge sur une variété à bord et théorème de Stokes. En particulier, en trivialisation locale s_α, pour $h = \kappa$ induit par la forme de Killing $\kappa^\sharp = -K$ sur un $\mathrm{SU}(2)$-fibré principal (κ est d_A-adapté car $\kappa^\sharp$ est constant), pour $\mu \in \Omega^p(B; \mathrm{Ad}P_B)$ et pour $\nu \in \Omega^q(B; \mathrm{Ad}P_B)$ on peut utiliser les deux formules équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\mu_\alpha \wedge^{\kappa_\alpha} \nu_\alpha) &= (\mathrm{d}_A \mu)_\alpha \wedge^{\kappa_\alpha} \nu_\alpha + (-1)^p \mu_\alpha \wedge^{\kappa_\alpha} (\mathrm{d}_A \nu)_\alpha \\ &= \mathrm{d}\mu_\alpha \wedge^{\kappa_\alpha} \nu_\alpha + (-1)^p \mu_\alpha \wedge^{\kappa_\alpha} \mathrm{d}\nu_\alpha \end{aligned}$$

où la dernière égalité ne contient ni $[A_\alpha \wedge \mu_\alpha]$ ni $[A_\alpha \wedge \nu_\alpha]$. La preuve se trouve dans mes feuilles du 2017-11-29. Elle est utile pour vérifier divers calculs en théorie de Chern-Simons (qui est le plus souvent en trivialisation globale s_α).

12.12 Règle de Leibniz (autres formules) :

Proposition : Soient $\alpha \in \Omega^p(B;\mathrm{Ad}P)$ et $\beta \in \Omega^q(B;\mathrm{Ad}P)$. Alors on a les deux égalités suivantes :

$$\mathrm{d}_A(\alpha(\wedge,\circ)\beta) = (\mathrm{d}_A\alpha)(\wedge,\circ)\beta + (-1)^p\alpha(\wedge,\circ)(\mathrm{d}_A\beta)$$

$$\mathrm{d}_A[\alpha\wedge\beta] = [(\mathrm{d}_A\alpha)\wedge\beta] + (-1)^p[\alpha\wedge(\mathrm{d}_A\beta)]$$

Preuve : Soit $A \in \mathcal{A}$. À α et β correspondent les formes basiques $\alpha^\sharp \in \Omega^p_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$ et $\beta^\sharp \in \Omega^p_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$. Par une proposition vue plus haut on a :

$$\mathrm{d}(\alpha^\sharp(\wedge,\circ)\beta^\sharp) = (\mathrm{d}\alpha^\sharp)(\wedge,\circ)\beta^\sharp + (-1)^p\alpha^\sharp(\wedge,\circ)(\mathrm{d}\beta^\sharp)$$

$$\mathrm{d}[\alpha^\sharp\wedge\beta^\sharp] = [\mathrm{d}\alpha^\sharp\wedge\beta^\sharp] + (-1)^p[\alpha^\sharp\wedge\mathrm{d}\beta^\sharp]$$

On a donc d'une part :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^A(\alpha^\sharp(\wedge,\circ)\beta^\sharp) &= \Big(\mathrm{d}(\alpha^\sharp(\wedge,\circ)\beta^\sharp)\Big)_{\mathrm{hor}} \\
&= \Big((\mathrm{d}\alpha^\sharp)(\wedge,\circ)\beta^\sharp + (-1)^p\alpha^\sharp(\wedge,\circ)(\mathrm{d}\beta^\sharp)\Big)_{\mathrm{hor}} \\
&= (\mathrm{d}\alpha^\sharp)_{\mathrm{hor}}(\wedge,\circ)\beta^\sharp_{\mathrm{hor}} + (-1)^p\alpha^\sharp_{\mathrm{hor}}(\wedge,\circ)(\mathrm{d}\beta^\sharp)_{\mathrm{hor}} \\
&= (\mathrm{d}^A\alpha^\sharp)(\wedge,\circ)\beta^\sharp + (-1)^p\alpha^\sharp(\wedge,\circ)(\mathrm{d}^A\beta^\sharp)
\end{aligned}$$

D'où la première égalité :

$$\mathrm{d}_A(\alpha(\wedge,\circ)\beta) = (\mathrm{d}_A\alpha)(\wedge,\circ)\beta + (-1)^p\alpha(\wedge,\circ)(\mathrm{d}_A\beta)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^A[\alpha^\sharp\wedge\beta^\sharp] &= \Big(\mathrm{d}[\alpha^\sharp\wedge\beta^\sharp]\Big)_{\mathrm{hor}} \\
&= \Big([\mathrm{d}\alpha^\sharp\wedge\beta^\sharp] + (-1)^p[\alpha^\sharp\wedge\mathrm{d}\beta^\sharp]\Big)_{\mathrm{hor}} \\
&= [(\mathrm{d}\alpha^\sharp)_{\mathrm{hor}}\wedge\beta^\sharp_{\mathrm{hor}}] + (-1)^p[\alpha^\sharp_{\mathrm{hor}}\wedge(\mathrm{d}\beta^\sharp)_{\mathrm{hor}}] \\
&= [(\mathrm{d}^A\alpha^\sharp)\wedge\beta^\sharp] + (-1)^p[\alpha^\sharp\wedge(\mathrm{d}^A\beta^\sharp)]
\end{aligned}$$

D'où la seconde égalité :

$$\mathrm{d}_A[\alpha\wedge\beta] = [(\mathrm{d}_A\alpha)\wedge\beta] + (-1)^p[\alpha\wedge(\mathrm{d}_A\beta)]$$

□

Corollaire : Si $\alpha, \beta \in \Omega^0(B; \mathrm{Ad}P)$, alors :

$$\mathrm{d}_A[\alpha, \beta] = [\mathrm{d}_A\alpha, \beta] + [\alpha, \mathrm{d}_A\beta]$$

12.13 Représentation triviale $\rho = \mathrm{Id}_V$:

Supposons ici que ρ agisse trivialement sur V. Par exemple, pour G abélien, l'automorphisme intérieur ι agit trivialement sur G, de même que la représentation adjointe Ad sur $\mathfrak{g}$.

Fait : Si ρ agit trivialement sur V, $P \times_\rho V = B \times V$. En particulier,

$$\Omega^k(B; P \times_\rho V) = \Omega^k(B; V)$$

Proposition : Si ρ agit trivialement sur V, $\mathrm{d}^A = \mathrm{d}$ et $\mathrm{d}_A = \mathrm{d}$.

Preuve : $\mathrm{d}^A = \mathrm{d} + (\rho_* A)(\wedge, \circ)$. Mais $\rho_* = 0$. $\square$.

Proposition : Si ρ agit trivialement sur V, le fibré trivial $B \times V$ est de courbure nulle.

Preuve : $\rho_* F_A = 0$. $\square$

12.14 Sur la base :

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}$ une connexion et $F_A \in \Omega^2(B; \mathrm{Ad}P)$ sa courbure. Soit $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ une section trivialisante locale. Alors :

$$\mathrm{d}(F_A)_\alpha = -[A_\alpha \wedge (F_A)_\alpha]$$

Preuve : En trivialisation locale sur la base B, l'équation de Bianchi $\mathrm{d}_A F_A = 0$ s'écrit :

$$0 = (\mathrm{d}_A F_A)_\alpha = \mathrm{d}(F_A)_\alpha + (\mathrm{Ad}_* A_\alpha)(\wedge, \circ)(F_A)_\alpha = \mathrm{d}(F_A)_\alpha + [A_\alpha \wedge (F_A)_\alpha]$$

D'où l'égalité recherchée $\mathrm{d}(F_A)_\alpha = -[A_\alpha, (F_A)_\alpha]$. □

Proposition : Soit $E = P \times_\rho V$ un V-fibré vectoriel associé. Soit $\eta \in \Omega^k(B; E)$. Soient deux sections trivialisantes locales $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ et $s_\beta : U_\beta \to \pi^{-1}(U_\beta)$ telles que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Soit $\Psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G$ la fonction de transition correspondante. Alors :

$$(\mathrm{d}_A \eta)_\beta = \rho(\Psi_{\alpha\beta}^{-1}) \circ (\mathrm{d}_A \eta)_\alpha$$

Preuve : $\mathrm{d}_A \eta \in \Omega^{k+1}(B; E)$. L'égalité découle directement. □

12.15 Une formule pour la courbure :

Soit A une connexion sur P. Dénotons $\nabla = \mathrm{d}_A$. Soit $X \in TB$. Alors :

$$\nabla_X = \iota_X \mathrm{d}_A$$

Proposition : [DK, p.36] : Soit A une connexion sur P. Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$. Alors la courbure de A peut s'écrire comme :

$$F_A(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$$

Preuve : [DK, p.36] : Considérons une trivialisation locale $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ ainsi que des coordonnées (x^i) sur U_α. Posons $\partial_i := \partial/\partial x^i$. Alors, en trivialisation locale, la courbure F_A de A s'écrit localement comme :

$$(F_A)_\alpha = \sum_{i,j} F_{i,j} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

où $F_{i,j} := ((F_A)_\alpha)_{i,j} = ((F_A)_\alpha)(\partial_i, \partial_j)$. Pour montrer l'égalité recherchée, il suffit de montrer que :

$$(F_\alpha)_{i,j} = [\nabla_{\partial_i}, \nabla_{\partial_j}] - \nabla_{[\partial_i, \partial_j]}$$

Mais $[\partial_i, \partial_j] = 0$ et $(F_\alpha)_{i,j} = (\mathrm{d}A_\alpha)(\partial_i, \partial_j) + [A_\alpha(\partial_i), A_\alpha(\partial_j)]$. Il suffit donc de montrer que :

$$(\mathrm{d}A_\alpha)(\partial_i, \partial_j) + [A_\alpha(\partial_i), A_\alpha(\partial_j)] = [\nabla_{\partial_i}, \nabla_{\partial_j}]$$

Cette égalité découle de :

$$\begin{aligned}
& (\mathrm{d}A_\alpha)(\partial_i, \partial_j) + [A_\alpha(\partial_i), A_\alpha(\partial_j)] \\
= \; & \partial_i(A_\alpha(\partial_j)) - \partial_j(A_\alpha(\partial_i)) - A_\alpha([\partial_i, \partial_j]) + [A_\alpha(\partial_i), A_\alpha(\partial_j)] \\
= \; & \partial_i(A_\alpha(\partial_j)) - \partial_j(A_\alpha(\partial_i)) + [A_\alpha(\partial_i), A_\alpha(\partial_j)] \\
= \; & [\partial_i, \partial_j] + [\partial_i, A_\alpha(\partial_j)] + [A_\alpha(\partial_i), \partial_j] + [A_\alpha(\partial_i), A_\alpha(\partial_j)] \\
= \; & [\partial_i + A_\alpha(\partial_i), \partial_j + A_\alpha(\partial_j)] \\
= \; & [\iota_{\partial_i}(\mathrm{d} + A_\alpha), \iota_{\partial_j}(\mathrm{d} + A_\alpha)] \\
= \; & [\iota_{\partial_i}\mathrm{d}_A, \iota_{\partial_j}\mathrm{d}_A] \\
= \; & [\nabla_{\partial_i}, \nabla_{\partial_j}]
\end{aligned}$$

□

12.16 Champs vectoriels horizontaux :

Définition : Soit $X \in \mathfrak{X}(B)$. Soit A une connexion sur P. Le *relevé horizontal* de X est l'unique champ vectoriel $X^\sharp \in \mathfrak{X}(P)$ les deux égalités suivantes :

$$\pi_* X^\sharp = X$$

$$A(X^\sharp) = 0$$

Proposition : Le relevé horizontal $X^\sharp$ vérifie les trois égalités suivantes :

$$(\Phi_g)_* X^\sharp = X^\sharp, \ \forall g \in G$$

$$v X^\sharp = 0$$

$$h X^\sharp = X^\sharp$$

Preuve : La première égalité recherchée découle de l'unicité de $X^\sharp$ et du fait que :

$$\pi_*((\Phi_g)_* X^\sharp) = (\pi \circ \Phi_g)_* X^\sharp = \pi_* X^\sharp = X$$

$$A((\Phi_g)_* X^\sharp) = ((\Phi_g)^* A)(X^\sharp) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ A(X^\sharp) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ 0 = 0$$

La seconde égalité recherchée découle du fait que si on avait $vX^\sharp \neq 0$, alors on aurait $A(X^\sharp) \neq 0$, ce qui est faux. La troisième égalité recherchée découle du fait que $vX^\sharp = 0$. □

Proposition : Considérons une trivialisation locale $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ du G-fibré principal $P \to B$. Alors localement le relevé horizontal $X^\sharp$ de X s'exprime explicitement comme :

$$X^\sharp|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = h((s_\alpha)_* X) = (s_\alpha)_* X - v((s_\alpha)_* X)$$

Preuve : Par unicité de $X^\sharp$, il suffit de vérifier les deux égalités $\pi_* X^\sharp = X$ et $A(X^\sharp) = 0$:

$$\pi_*(h((s_\alpha)_* X)) = \pi_*((s_\alpha)_* X) = (\pi \circ s_\alpha)_*(X) = (\mathrm{id}_{U_\alpha})_*(X) = X$$

$$A(h((s_\alpha)_* X)) = 0$$

□

Pour $\sigma \in \Gamma^\infty(E)$ on a :

$$\nabla_X \sigma := \iota_X \mathrm{d}_A \sigma = (\iota_{X^\sharp} \mathrm{d}\sigma^\sharp)_\sharp = (\mathcal{L}_{X^\sharp} \sigma^\sharp)_\sharp$$

Plus généralement, pour $\eta \in \Omega^k(B; E)$, on a :

$$\nabla_X \eta = \iota_X \mathrm{d}_A \eta = \iota_X (\mathrm{d}^A \eta^\sharp)_\sharp = (\iota_{X^\sharp} \mathrm{d}\eta^\sharp)_\sharp = (\iota_{X^\sharp} \mathrm{d}^A \eta^\sharp)_\sharp$$

C'est à vérifier. TO DO ! ! !

12.17 Intégrabilité de $\ker(\mathbf{d}_A\sigma)$:

Soit $P \to M$ un G-fibré principal. Soit A une forme de connexion sur P. Soit $\sigma \in \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P)$ une section du fibré adjoint $\mathrm{Ad}P$. Considérons $\mathrm{d}_A\sigma \in \Omega^1(M;\mathrm{Ad}P)$.

Question : La distribution $\ker(\mathrm{d}_A\sigma)$ est-elle intégrable en feuilletage ? Pour $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ tels que $X_1, X_2 \in \ker(\mathrm{d}_A\sigma)$ il suffit de vérifier si :

$$[X_1, X_2] \in \ker(\mathrm{d}_A\sigma)$$

Proposition : Soient $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ tels que $X_1, X_2 \in \ker(\mathrm{d}_A\Sigma)$. Alors :

$$(\mathrm{d}_A\sigma)([X_1, X_2]) = -[F_A, \sigma](X_1, X_2) = -(\mathrm{d}_A^2\sigma)(X_1, X_2)$$

Preuve : Il suffit de faire la preuve dans une trivialisation locale s_α sur un ouvert U_α. D'abord, $X_1, X_2 \in \ker(\mathrm{d}_A\sigma)$. Alors

$$0 = (\mathrm{d}_A\sigma)_\alpha(X_1) = X_1\sigma_\alpha + [A_\alpha(X_1), \sigma]$$
$$0 = (\mathrm{d}_A\sigma)_\alpha(X_2) = X_2\sigma_\alpha + [A_\alpha(X_2), \sigma]$$

En utilisant éventuellement l'identité de Jacobi sur $[\,\cdot\,, [\,\cdot\,, \,\cdot\,]]$, on calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
& (\mathrm{d}_A\sigma)_\alpha([X_1, X_2]) \\
= \;& [X_1, X_2]\sigma_\alpha - [A_\alpha([X_1, X_2]), \sigma_\alpha] \\
= \;& X_1(X_2\sigma_\alpha) - X_2(X_1\sigma_\alpha) - [A_\alpha([X_1, X_2]), \sigma_\alpha] \\
= \;& X_1(-[A_\alpha(X_2), \sigma]) - X_2(-[A_\alpha(X_1), \sigma]) - [A_\alpha([X_1, X_2]), \sigma_\alpha] \\
= \;& -X_1[A_\alpha(X_2), \sigma] + X_2[A_\alpha(X_1), \sigma] - [A_\alpha([X_1, X_2]), \sigma_\alpha] \\
= \;& -[X_1A_\alpha(X_2), \sigma] - [A_\alpha(X_2), X_1\sigma] + [X_2A_\alpha(X_1), \sigma] \\
& +[A_\alpha(X_1), X_2\sigma] - [A_\alpha([X_1, X_2]), \sigma_\alpha] \\
= \;& -[X_1A_\alpha(X_2) - X_2A_\alpha(X_1) - A_\alpha([X_1, X_2]), \sigma] - [A_\alpha(X_2), X_1\sigma] + [A_\alpha(X_1), X_2\sigma] \\
= \;& -[(\mathrm{d}A_\alpha)(X_1, X_2), \sigma] - [A_\alpha(X_2), -[A_\alpha(X_1), \sigma]] + [A_\alpha(X_1), -[A_\alpha(X_2), \sigma]] \\
= \;& -[(\mathrm{d}A_\alpha)(X_1, X_2), \sigma] - [A_\alpha(X_2), [\sigma, A_\alpha(X_1)]] - [A_\alpha(X_1), [A_\alpha(X_2), \sigma]] \\
= \;& -[(\mathrm{d}A_\alpha)(X_1, X_2), \sigma] + [\sigma, [A_\alpha(X_1), A_\alpha(X_2)]] \\
= \;& -[(\mathrm{d}A_\alpha)(X_1, X_2), \sigma] - [[A_\alpha(X_1), A_\alpha(X_2)], \sigma] \\
= \;& -[(\mathrm{d}A_\alpha)(X_1, X_2) + [A_\alpha(X_1), A_\alpha(X_2)], \sigma] \\
= \;& -[(F_A)_\alpha(X_1, X_2), \sigma] \\
= \;& -[(F_A)_\alpha, \sigma](X_1, X_2)
\end{aligned}$$

D'où l'égalité recherchée :

$$(\mathrm{d}_A\sigma)([X_1, X_2]) = -[F_A, \sigma](X_1, X_2) = -(\mathrm{d}_A^2\sigma)(X_1, X_2)$$

□

Remarque : Par la dernière proposition, on a pour $X_1, X_2 \in \ker(\mathrm{d}_A\sigma)$ l'égalité :

$$(\mathrm{d}_A\sigma)([X_1, X_2]) = -[F_A, \sigma](X_1, X_2)$$

Il suit que $\ker(\mathrm{d}_A\sigma)$ sera intégrable si X_1 ou X_2 est dans le noyau de $[F_A, \sigma]$. Dans certaines situations, cette condition sera vérifiée. Par exemple, elle sera vérifiée lorsque $[F_A, \sigma] = 0$. Elle le sera donc aussi en particulier lorsque $F_A = 0$, i.e. lorsque A est une connexion plate.

13 Groupe de jauge G et son algèbre de Lie $\mathfrak{G}$

13.1 Groupe de jauge $\mathcal{G}$ et transformation de jauge Λ :

Définition : Le *groupe des automorphismes du fibré* $\pi : P \to B$ est par définition

$$\mathrm{Aut}(P,\pi) := \{\Psi \in \mathrm{Diff}(P) | \exists \psi \in \mathrm{Diff}(B), \pi \circ \Psi = \psi \circ \pi\} < \mathrm{Diff}(P)$$

Le *groupe des automorphismes du* G*-fibré principal* $\pi : P \to B$ est par définition

$$\mathrm{Aut}(P,\pi,\Phi) := \{\Psi \in \mathrm{Diff}(P) | \forall g \in G, \Phi_g \circ \Psi = \Psi \circ \Phi_g\} < \mathrm{Aut}(P,\pi)$$

Le *groupe des transformations de jauges du* G*-fibré principal* $\pi : P \to B$ est par définition

$$\mathcal{G} := \{\Lambda \in \mathrm{Aut}(P,\pi,\Phi) | \pi \circ \Lambda = \pi\} < \ \mathrm{Aut}(P,\pi,\Phi)$$

Les éléments Λ de $\mathcal{G}$ sont dits *transformations de jauges*.

Proposition : Il y a une bijection

$$\begin{aligned} \Omega^0_{\iota,\mathrm{hor}}(P;G) &\leftrightarrow \mathcal{G} \\ \lambda^\sharp &\mapsto \Lambda(a) = a \cdot \lambda^\sharp(a), \quad \forall a \in P \end{aligned}$$

où $\iota_g(h) = ghg^{-1}$, pour tous $g, h \in G$, est l'automorphisme intérieur sur G.

Preuve : TO DO ! ! ! □

Remarque : $\lambda^\sharp$ étant basique, il descend à $\lambda \in \Gamma^\infty(B; \mathrm{Aut}P)$ où

$$\mathrm{Aut}P := P \times_\iota G$$

Le fibré $\mathrm{Aut}P$ s'écrit aussi ιP.

Remarque : $\Omega^0_{\iota,\mathrm{hor}}(P;G)$ possède une structure de groupe donnée par :

$$(\lambda_1^\sharp \lambda_2^\sharp)(a) = \lambda_1^\sharp(a)\lambda_2^\sharp(a), \quad \forall a \in P$$

Remarque : À moins que G soit abélien, l'image de $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(P)$ ne repose généralement pas $\mathcal{G}$.

Proposition : La correspondance entre $\mathcal{G}$ et $\Omega^0_{\iota,\mathrm{hor}}(P;G)$ est non seulement bijective mais est un isomorphisme de groupes, i.e. si Λ_1 correspond à $\lambda_1^\sharp$ et Λ_2 correspond à $\lambda_2^\sharp$, alors $\Lambda_1 \circ \Lambda_2$ correspond à $\lambda_1^\sharp \lambda_2^\sharp$.

Preuve : En utilisant la ι-équivariance des $\lambda^\sharp$, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
(\Lambda_1 \circ \Lambda_2)(a) &= \Lambda_1(\Lambda_2(a)) \\
&= \Lambda_1(a \cdot \lambda_2^\sharp(a)) \\
&= (a \cdot \lambda_2^\sharp(a)) \cdot \lambda_1^\sharp(a \cdot \lambda_2^\sharp(a)) \\
&= (a \cdot \lambda_2^\sharp(a)) \cdot \lambda_2^\sharp(a)^{-1} \cdot \lambda_1^\sharp(a) \cdot \lambda_2^\sharp(a) \\
&= a \cdot (\lambda_1^\sharp(a) \lambda_2^\sharp(a)) \\
&= a \cdot ((\lambda_1^\sharp \lambda_2^\sharp)(a))
\end{aligned}$$

□

13.2 Algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de $\mathcal{G}$:

Définition : L'algèbre de Lie du groupe de jauge est par définition $\mathfrak{G} := \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$. Les éléments $\Upsilon \in \mathfrak{G}$ sont dits *transformations de jauges infinitésimales*.

Remarque : Les transformations de jauges infinitésimales sont des champs vectoriels verticaux sur P. La structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{G}$ est la même que celle sur $\mathfrak{X}(P)$, i.e. est le crochet de Lie de champs vectoriels.

Proposition : Soit A une connexion quelconque sur P. Alors il y a une correspondance bijective

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &\leftrightarrow \Omega^0_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g}) \\ \Upsilon &\mapsto v^\sharp := A(\Upsilon) \end{aligned}$$

L'application inverse est donnée pour tout $v^\sharp \in \Omega^0_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$ par :

$$\Upsilon|_a = \Phi_*|_e(v^\sharp(a)), \quad \forall a \in P$$

Preuve : Pour montrer la bijection, il suffit de montrer que la composition des applications mutuellement inverses donne l'identité. Dans un sens on trouve :

$$A_a(\Phi_*|_e(v^\sharp(a))) = A_a(\Upsilon|_a) = v^\sharp(a)$$

Dans l'autre sens on trouve :

$$\Phi_*|_e(A(\Upsilon|_a)) = \Phi_*|_e(v^\sharp(a)) = \Upsilon|_a$$

□

Remarque : Cette définition est indépendante de la connexion A choisie car Υ est vertical et toutes les formes de connexions ont la même valeur lorsqu'évaluées sur des champs vectoriels verticaux.

Remarque : Comme les $v^\sharp \in \Omega^0_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$ sont basiques, ils descendent à des $v \in \Gamma^\infty(B;\mathrm{Ad}P)$.

Proposition : $\Omega^0_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie.

Preuve : Soient $\upsilon_1^\sharp, \upsilon_2^\sharp \in \Omega^0_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$. Montrons que $[\upsilon_1^\sharp, \upsilon_2^\sharp](a) := [\upsilon_1^\sharp(a), \upsilon_2^\sharp(a)]$ repose bien en $\Omega^0_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$. D'abord, le crochet de deux 0-formes est une 0-forme. Ensuite, toute 0-forme est automatiquement horizontale. Ensuite, le crochet d'éléments de $\mathfrak{g}$ repose en $\mathfrak{g}$. Ensuite, la Ad-équivariance découle du fait que le crochet sur $\mathfrak{g}$ est Ad-équivariant, i.e. $[\mathrm{Ad}_g\,\cdot\,, \mathrm{Ad}_g\,\cdot\,] = \mathrm{Ad}_g[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$. Le crochet $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ d'éléments en $\Omega^0_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$ repose donc bien en $\Omega^0_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$. Enfin, le crochet $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ vérifie l'identité de Jacobi car $[\upsilon_1^\sharp, \upsilon_2^\sharp]$ est défini point par point par le crochet sur $\mathfrak{g}$ qui vérifie forcément l'identité de Jacobi. □

Remarque : La correspondance $\mathfrak{G} \leftrightarrow \Omega^0_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g}); \Upsilon \mapsto \upsilon^\sharp$ est non seulement une bijection mais un anti-isorphisme d'algèbres, i.e. pour $\upsilon_1^\sharp = A(\Upsilon_1)$ et $\upsilon_2^\sharp = A(\Upsilon_2)$ on a l'égalité suivante :

$$[\upsilon_1^\sharp, \upsilon_2^\sharp] = -A([\Upsilon_1, \Upsilon_2])$$

Ce que je vais montrer sous peu. De la même manière, la correspondance inverse $\upsilon^\sharp \mapsto \Upsilon$ donnée par :

$$\Upsilon_a = \Phi_*|_e(\upsilon^\sharp(a)), \quad \forall a \in P$$

est aussi un anti-isomorphisme d'algèbre. Le fait que $\upsilon^\sharp \mapsto \Upsilon$ soit un anti-isomorphisme semble déjà naturel puisque $\Phi : G \to \mathrm{Diff}(P)$ est un anti-homomorphisme de groupes.

13.3 Anti-isomorphisme d'algèbres $\Upsilon \mapsto \upsilon^\sharp$:

On a posé la relation $\upsilon^\sharp = A(\Upsilon)$. On sait qu'elle est indépendante de la connexion A choisie. Montrons maintenant que c'est un anti-isomorphisme d'algèbre entre $\mathfrak{G}$ et $\Omega^0_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$.

Proposition : $\upsilon^\sharp = A(\Upsilon)$ est un anti-isomorphisme d'algèbre, i.e.

$$[\upsilon_1^\sharp, \upsilon_2^\sharp] = -A([\Upsilon_1, \Upsilon_2])$$

Preuve : On veut montrer que $[\upsilon_1^\sharp, \upsilon_2^\sharp] = A([\Upsilon_1, \Upsilon_2])$. On calcule d'abord :

$$\begin{aligned}
[\upsilon_1^\sharp, \upsilon_2^\sharp] &= [A(\Upsilon_1), A(\Upsilon_2)] \\
&= [A, A](\Upsilon_1, \Upsilon_2) \\
&= F_A(\Upsilon_1, \Upsilon_2) - \mathrm{d}A(\Upsilon_1, \Upsilon_2)
\end{aligned}$$

Mais F_A est horizontale et les Υ_i sont verticaux. D'où :

$$\begin{aligned}
[\upsilon_1^\sharp, \upsilon_2^\sharp] &= -\mathrm{d}A(\Upsilon_1, \Upsilon_2) \\
&= -\Upsilon_1 A(\Upsilon_2) + \Upsilon_2 A(\Upsilon_1) + A([\Upsilon_1, \Upsilon_2]) \\
&= -\mathcal{L}_{\Upsilon_1}\upsilon_2^\sharp + \mathcal{L}_{\Upsilon_2}\upsilon_1^\sharp + A([\Upsilon_1, \Upsilon_2])
\end{aligned}$$

En se souvenant que les applications équivariantes vérifient $\mathcal{L}_X\sigma^\sharp = -\rho_*(A(X))\sigma^\sharp$ pour $X \in \mathfrak{X}(P)$ vertical, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\Upsilon_1}\upsilon_2^\sharp &= -\mathrm{Ad}_*(A(\Upsilon_1))\upsilon_2^\sharp \\
&= -\mathrm{Ad}_*(\upsilon_1^\sharp)\upsilon_2^\sharp \\
&= -[\upsilon_1^\sharp, \upsilon_2^\sharp]
\end{aligned}$$

En permutant 1 et 2 on trouve aussi $\mathcal{L}_{\Upsilon_2}\upsilon_1^\sharp = -[\upsilon_2^\sharp, \upsilon_1^\sharp]$. D'où :

$$\begin{aligned}
[\upsilon_1^\sharp, \upsilon_2^\sharp] &= -\mathcal{L}_{\Upsilon_1}\upsilon_2^\sharp + \mathcal{L}_{\Upsilon_2}\upsilon_1^\sharp + A([\Upsilon_1, \Upsilon_2]) \\
&= [\upsilon_1^\sharp, \upsilon_2^\sharp] - [\upsilon_2^\sharp, \upsilon_1^\sharp] + A([\Upsilon_1, \Upsilon_2]) \\
&= [\upsilon_1^\sharp, \upsilon_2^\sharp] + [\upsilon_1^\sharp, \upsilon_2^\sharp] + A([\Upsilon_1, \Upsilon_2]) \\
&= 2[\upsilon_1^\sharp, \upsilon_2^\sharp] + A([\Upsilon_1, \Upsilon_2])
\end{aligned}$$

D'où $[\upsilon_1^\sharp, \upsilon_2^\sharp] = -A([\Upsilon_1, \Upsilon_2])$. □

13.4 Groupes de transformations de jauge à 1-paramètre :

Définition : Un *groupe de transformations de jauge à 1-paramètre* est un homomorphisme différentiable

$$\begin{aligned} \Lambda : (\mathbb{R}, +) &\to \mathcal{G} \\ t &\mapsto \Lambda_t \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\Lambda_{s+t} = \Lambda_s \circ \Lambda_t = \Lambda_t \circ \Lambda_s$$

Proposition : Soit Λ_t un groupe de transformations de jauge à 1-paramètre. Alors :

$$\lambda^\sharp_{s+t} = \lambda^\sharp_s \lambda^\sharp_t = \lambda^\sharp_t \lambda^\sharp_s$$

Preuve : On a vu que si Λ_1 et Λ_2 correspondent respectivement à $\lambda^\sharp_1$ et $\lambda^\sharp_2$, alors $\Lambda_1 \circ \Lambda_2$ correspond à $\lambda^\sharp_1 \lambda^\sharp_2$. Pour $a \in P$ quelconque, on calcule :

$$\begin{aligned} a \cdot \lambda^\sharp_{s+t}(a) &= \Lambda_{s+t}(a) \\ &= (\Lambda_s \circ \Lambda_t)(a) \\ &= a \cdot ((\lambda^\sharp_s \lambda^\sharp_t)(a)) \end{aligned}$$

Comme a était quelconque en P, on a bien l'égalité souhaitée $\lambda^\sharp_{s+t} = \lambda^\sharp_s \lambda^\sharp_t$. Enfin, $\lambda^\sharp_s \lambda^\sharp_t = \lambda^\sharp_{s+t} = \lambda^\sharp_{t+s} = \lambda^\sharp_t \lambda^\sharp_s$. □

Remarque : Puisque toute transformation de jauge à 1-paramètre Λ_t est un groupe de difféomorphismes à 1-paramètres, il correspond à Λ_t un champ vectoriel $\Upsilon \in \mathfrak{X}(P)$ indépendant du temps t tel que :

$$\Lambda_t = \exp(t\Upsilon)$$

Il vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda_t = \Upsilon \circ \Lambda_t = (\Lambda_t)_* \Upsilon$$

Il vérifie aussi :

$$\Upsilon = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Lambda_t = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \Lambda_{s-t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \Lambda_s \circ \Lambda_t^{-1} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \Lambda_t^{-1} \circ \Lambda_s$$

Proposition : Soit Λ_t un groupe de transformations de jauge à 1-paramètre auquel correspond $\lambda_t^\sharp$ et Υ. Soit $\upsilon^\sharp := A(\Upsilon)$. Alors :

$$\upsilon^\sharp = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \lambda_t^\sharp$$

Preuve : Soit $a \in P$ quelconque. Il suffit de montrer que

$$\upsilon^\sharp(a) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \lambda_t^\sharp(a)$$

On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\upsilon^\sharp(a) &= A_a(\Upsilon_a) \\
&= A_a\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Lambda_t(a)\right) \\
&= A_a\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} a \cdot \lambda_t^\sharp(a)\right) \\
&= A_a\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Phi_{\lambda_t^\sharp(a)}(a)\right) \\
&= A_a \circ \left(\Phi_*|_e\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \lambda_t^\sharp(a)\right)\right)_a \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \lambda_t^\sharp(a)
\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de $A(\xi^*) = \xi$ pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$. □

Remarque : Cette dernière proposition s'écrit de manière équivalente comme :

$$\upsilon^\sharp = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \lambda_t^\sharp = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \lambda_{s-t}^\sharp = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \lambda_s^\sharp(\lambda_t^\sharp)^{-1} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} (\lambda_t^\sharp)^{-1}\lambda_s^\sharp$$

ou encore :

$$\dot{\lambda}_t^\sharp = \upsilon^\sharp\lambda_t^\sharp = \lambda_t^\sharp\upsilon^\sharp$$

où $\dot{\lambda} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda$. En particulier, on trouve

$$\lambda_t^\sharp = \exp(t\upsilon^\sharp)$$

Enfin, une dernière manière de voir les choses est $\Upsilon = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \Lambda_t$ qui devient

$$v^\sharp = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(tv^\sharp) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln(\exp(tv^\sharp)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \lambda_t^\sharp$$

Remarque : Toute comme les groupes de difféomorphismes à 1-paramètres sont des cas particuliers d'isotopies, les groupes de transformations de jauges à 1-paramètre sont des cas particuliers d'isotopies de jauge. Ce que je vais développer à l'instant.

13.5 Isotopies de jauge :

Définition : Une *isotopie de jauge* est une courbe différentiable

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbb{R} &\to \mathcal{G} \\ t &\mapsto \Lambda_t \end{aligned}$$

telle que $\Lambda_0 = \mathrm{id}_P$.

Remarque : Contrairement aux groupes de transformation de jauge à 1-paramètre, les isotopies de jauge ne vérifient généralement pas

$$\Lambda_{s+t} = \Lambda_s \circ \Lambda_t$$

Remarque : À une isotopie de jauge Λ_t on peut associer un champ vectoriel dépendant du temps Υ_t de deux manières :

$$\text{première manière :} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda_t = \Upsilon_t \circ \Lambda_t, \quad \text{i.e.} \quad \Upsilon_t = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \Lambda_s \circ \Lambda_t^{-1}$$

$$\text{seconde manière :} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda_t = (\Lambda_t)_*\Upsilon_t, \quad \text{i.e.} \quad \Upsilon_t = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \Lambda_t^{-1} \circ \Lambda_s$$

Lorsque Λ_t est un groupe de transformations de jauges à 1-paramètre, ces deux manières sont équivalentes. Toutefois, pour une isotopie de jauge Λ_t quelconque, ces deux manières ne sont pas équivalentes. Bien que la première définition semble plus naturelle, les deux définitions sont autant naturelles. Le choix d'une définition ou d'une autre est pour simplifier les calculs subséquents. La première définition simplifie les calculs dans le cas d'une action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ par la gauche $\Lambda_t \cdot A = (\Lambda_t^{-1})^* A$ alors que la seconde simplifie les calculs dans le cas d'une action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ par la droite $A \cdot \Lambda_t = \Lambda_t^* A$. Je choisirai donc la définition de Υ_t qui simplifie les calculs selon si on travaille avec l'action à droite ou à gauche de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$.

Remarque : Au champ vectoriel dépendant du temps Υ_t correspond

$$\upsilon_t^\sharp := A(\Upsilon_t)$$

qui est bien défini car indépendant du choix de connexion A.

Proposition : Soit Λ_t une isotopie de jauge correspondant à $\lambda_t^\sharp$. Soit Υ_t donné par la première manière $\Upsilon_t = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \Lambda_s \circ \Lambda_t^{-1}$ ou par la seconde manière $\Upsilon_t = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \Lambda_t^{-1} \circ \Lambda_s$. Soit $\upsilon_t^\sharp = A(\Upsilon_t)$. Alors :

$$\text{première manière :} \quad \upsilon_t^\sharp = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \lambda_s^\sharp(\lambda_t^\sharp)^{-1}$$

$$\text{seconde manière :} \quad \upsilon_t^\sharp = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} (\lambda_t^\sharp)^{-1}\lambda_s^\sharp$$

Preuve : Soit $a \in P$ quelconque. Montrons pour la première manière. Il suffit de démontrer que :

$$\upsilon_t^\sharp(a) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \lambda_s^\sharp(a)(\lambda_t^\sharp(a))^{-1}$$

On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\upsilon_t^\sharp(a) &= A_a(\Upsilon_t|_a) \\
&= A_a\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} (\Lambda_s\Lambda_t^{-1})(a)\right) \\
&= A_a\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} a\cdot(\lambda_s^\sharp(a)(\lambda_t^\sharp(a))^{-1})\right) \\
&= A_a\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \Phi_{\lambda_s^\sharp(a)(\lambda_t^\sharp(a))^{-1}}(a)\right) \\
&= A_a \circ \left(\Phi_*|_e\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \lambda_s^\sharp(a)(\lambda_t^\sharp(a))^{-1}\right)\right)_a \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \lambda_s^\sharp(a)(\lambda_t^\sharp(a))^{-1}
\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de $A(\xi^*) = \xi$ pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$. On montre ensuite pour la seconde manière :

$$\begin{aligned}
\upsilon_t^\sharp(a) &= A_a(\Upsilon_t|_a) \\
&= A_a\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} (\Lambda_t^{-1}\Lambda_s)(a)\right) \\
&= A_a\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} a\cdot((\lambda_t^\sharp(a))^{-1}\lambda_s^\sharp(a))\right) \\
&= A_a\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} \Phi_{(\lambda_t^\sharp(a))^{-1}\lambda_s^\sharp(a)}(a)\right) \\
&= A_a\circ\left(\Phi_*|_e\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} (\lambda_t^\sharp(a))^{-1}\lambda_s^\sharp(a)\right)\right)_a \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t} (\lambda_t^\sharp(a))^{-1}\lambda_s^\sharp(a)
\end{aligned}$$

□

14 Action de jauge $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$

14.1 Espace de connexions $\mathcal{A}$:

Notation : On dénote l'espace des formes de connexions A sur P par :

$$\mathcal{A} := \{A \in \Omega^1_{\mathrm{Ad}}(P;\mathfrak{g}) | \forall \xi \in \mathfrak{g}, A(\xi^*) = \xi\}$$

Proposition : $\mathcal{A}$ est un espace affine modélisé sur $\Omega^1_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$. En particulier,

$$T_A\mathcal{A} = \Omega^1_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$$

Preuve : Soient $A, A' \in \mathcal{A}$. Soit $\tau^\sharp := A - A'$. Montrons que $\tau^\sharp \in \Omega^1_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$. La Ad-équivariance de $\tau^\sharp$ découle de celle de A et de celle de A'. L'horizontalité de $\tau^\sharp$ découle du fait que toutes les formes de connexions ont la même valeur lorsqu'évaluée sur un vecteur vertical. Enfin, $\tau^\sharp$ est évidemment une 1-forme à valeurs en $\mathfrak{g}$. □

Remarque : $\tau^\sharp \in \Omega^1_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$ étant basique, elle descend à

$$\tau \in \Omega^1(B; \mathrm{Ad}P)$$

Remarque : Donnée une trivialisation locale $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$, l'égalité $\tau^\sharp = A - A'$ sur P se tire à U_α via s_α à $\tau_\alpha = A_\alpha - A'_\alpha$.

Remarque : Comme $\tau^\sharp$ est Ad-équivariante, il suit que $\tau_\beta = \mathrm{Ad}_{\Psi^{-1}_{\alpha\beta}}\tau_\alpha$.

Remarque : Comme l'espace $\Omega^1(B;\mathrm{Ad}P)$ est un espace vectoriel de dimension infinie, l'espace $\mathcal{A}$ des connexions sur P est un espace affine de dimension infinie modélisé sur $\Omega^1(B;\mathrm{Ad}P)$. Il suit que $\mathcal{A}$ est contractile. En particulier, l'espace tangent $T_A\mathcal{A} = \Omega^1_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$ à $\mathcal{A}$ en A est isomorphe à $\Omega^1(B;\mathrm{Ad}P)$.

Remarque : Pour les questions de topologies sur $\mathcal{A}$ et sur $\mathcal{G}$, voir la section 5 en [DK].

14.2 Action de $\mathcal{G}$ sur l'espace des connexions d'Ehresmann :

La $\mathcal{G}$-action de groupe sur P en induit naturellement une, par pull-back, sur l'espace des formes de connexions $\mathcal{A}$. De la même manière, $\mathcal{G}$ agit sur les connexions d'Ehresmann par push-forward. Établissons d'abord quelques propriétés de l'action de $\mathcal{G}$ sur les connexions d'Ehresmann.

Remarque : Avant j'utilisais la notation $H^\Lambda = \Lambda_* H$ et $A^\Lambda = (\Lambda^{-1})^* A$. Mais je n'utiliserai plus cette notation (du moins je vais éviter de l'utiliser...). Le problème vient du fait que ça donne une $\mathcal{G}$-action de groupe par la gauche sur l'espace $\mathcal{A}$ alors qu'il est préférable, à long terme, d'avoir une $\mathcal{G}$-action de groupe par la droite. D'une part, j'ai toujours travaillé avec des fibrés principaux à droite (donc avantageux pour étudier $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ en tant que $\mathcal{G}$-fibré) et aussi quand on prend une action à gauche au lieu d'à droite ça fait apparaitre plein de signes négatifs inutiles. Bref, pour l'instant, je n'utiliserai plus la notation H^Λ ni A^Λ.

Proposition : Si H est un connexion d'Ehresmann sur P, alors pour tout $\Lambda \in \mathcal{G}$, $\Lambda_* H$ et $(\Lambda^{-1})_* H$ sont aussi des connexions d'Ehresmann sur P.

Preuve : Soit H une connexion d'Ehresmann sur P. Soit $\Lambda \in \mathcal{G}$. Alors pour tout $g \in G$ on a $\Phi_g \circ \Lambda = \Lambda \circ \Phi_g$, par définition de $\mathcal{G}$. D'abord, $\Lambda_* H$ est G-invariante :

$$\begin{aligned}(\Phi_g)_*(\Lambda_* H) &= (\Phi_g \circ \Lambda)_* H \\ &= (\Lambda \circ \Phi_g)_* H \\ &= \Lambda_* (\Phi_g)_* H \\ &= \Lambda_* H\end{aligned}$$

Ensuite, $\Lambda_* H$ est supplémentaire à la distribution verticale V puisque $(\Phi_g)_*$ est un isomorphisme qui préserve le sous-espace vertical. Il suit que $\Lambda_* H$ est une connexion d'Ehresmann sur P. Enfin, puisque Λ^{-1} est aussi une transformation de jauge, il suit que $(\Lambda^{-1})_* H$ est aussi une connexion d'Ehresmann sur P. □

Proposition : Les champs vectoriels fondamentaux sont laissés invariants par les transformations de jauge, i.e. $\Lambda_* \xi^* = \xi^*$ pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$ et $\Lambda \in \mathcal{G}$.

Preuve : L'action Φ commute avec les éléments de $\mathcal{G}$. Plus explicitement, pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$ et $a \in P$ on a $\xi^*|_a = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Phi_{g(t)}(a)$ où $g(0) = e$ et $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(t) = \xi$.

Ainsi, pour tout $\Lambda \in \mathcal{G}$ on trouve :

$$\begin{aligned}
\Lambda_* \xi^*|_a &= \Lambda_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Phi_{g(t)}(a) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Lambda \circ \Phi_{g(t)}(a) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Phi_{g(t)}(\Lambda(a)) \\
&= \xi^*|_{\Lambda((a)}
\end{aligned}$$

i.e. $\Lambda_* \xi^* = \xi^*|_\Lambda$. D'où la $\mathcal{G}$-invariance de l'espace des champs vectoriels fondamentaux $\mathfrak{X}^\Phi(P) := (\Phi_*|_e)(\mathfrak{g}) < \mathfrak{X}(P)$. □

14.3 Action de $\mathcal{G}$ sur l'espace $\mathcal{A}$ des formes de connexions :

Remarque : Tel que mentionné plus haut, avant j'utilisais la notation $A^\Lambda = (\Lambda^{-1})^*A$. Je n'utiliserai plus cette notation car je réoriente le présent document à l'action à droite de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ par Λ^*A.

Proposition : Soit A la 1-forme de connexion d'une connexion d'Ehresmann H. Soit $\Lambda \in \mathcal{G}$. Alors $(\Lambda^{-1})^*A$ est la 1-forme de connexion de la connexion d'Ehresmann Λ_*H. De la même manière Λ^*A est la forme de connexion de $(\Lambda^{-1})_*H$.

Preuve : Il suffit de démontrer que $\Lambda_*H = \ker((\Lambda^{-1})^*A)$. On calcule directement :

$$((\Lambda^{-1})^*A)(\Lambda_*H) = A_{\Lambda^{-1}}(\Lambda^{-1})_*\Lambda_*H = A(H) = 0$$

$\square$

Remarque : Les relations de cette dernière proposition se résument à :

$$H \longleftrightarrow A$$

$$\Lambda_*H \longleftrightarrow (\Lambda^{-1})^*A$$
$$(\Lambda^{-1})_*H \longleftrightarrow \Lambda^*A$$

Proposition : L'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ par $(\Lambda^{-1})^*A$ est une action de groupe à gauche alors que l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ par Λ^*A est une action de groupe à droite.

Preuve : Pour $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{G}$ et $A \in \mathcal{A}$ quelconques, on calcule directement :

$$(\Lambda_1^{-1})^*(\Lambda_2^{-1})^*A = (\Lambda_2^{-1} \circ \Lambda_1^{-1})^*A = ((\Lambda_1 \circ \Lambda_2)^{-1})^*A$$

$$(\Lambda_1)^*(\Lambda_2)^*A = (\Lambda_2 \circ \Lambda_1)^*A$$

$\square$

Remarque : Par la dernière proposition, il est légitime de poser les $\mathcal{G}$-actions de groupe sur $\mathcal{A}$ par la gauche et par la droite par :

$$\Lambda \cdot A = (\Lambda^{-1})^*A \qquad \text{(à gauche)}$$
$$A \cdot \Lambda = \Lambda^*A \qquad \text{(à droite)}$$

Proposition : Soit H une connexion d'Ehresmann et soit $h_H : TP \to H$ sa projection horizontale. Alors, les projections horizontales $h_{\Lambda_* H}$ de $\Lambda_* H$ et $h_{(\Lambda^{-1})_* H}$ de $(\Lambda^{-1})_* H$ sont respectivement données par :

$$h_{\Lambda_* H} = (\Lambda_* \circ h \circ (\Lambda^{-1})_*) : TP \to (\Lambda_* H)$$

$$h_{(\Lambda^{-1})_* H} = ((\Lambda^{-1})_* \circ h \circ \Lambda_*) : TP \to ((\Lambda^{-1})_* H)$$

Preuve : Tout comme $h(H) = H$, on a directement :

$$h_{\Lambda_* H}(\Lambda_* H) = (\Lambda_* \circ h \circ (\Lambda^{-1})_*)(\Lambda_* H) = \Lambda_* H$$

$$h_{(\Lambda^{-1})_* H}((\Lambda^{-1})_* H) = ((\Lambda^{-1})_* \circ h \circ \Lambda_*)((\Lambda^{-1})_* H) = (\Lambda^{-1})_* H$$

□

Proposition : Soit H une connexion d'Ehresmann et $h_H : TP \to H$ sa projection horizontale à laquelle correspond une application $h_H^* : \Omega^k(P) \to \Omega^k_{\mathrm{hor}(H)}(P)$ donnée par $h^*\alpha = \alpha(h_H \cdot, ..., h_H \cdot)$. Alors pour toute transformation de jauge $\Lambda \in \mathcal{G}$,

$$(h_{\Lambda_* H})^* = (\Lambda^{-1})^* h^* \Lambda^* : \Omega^k(P) \to \Omega^k_{\mathrm{hor}(\Lambda_* H)}(P)$$

$$(h_{(\Lambda^{-1})_* H})^* = \Lambda^* h^* (\Lambda^{-1})^* : \Omega^k(P) \to \Omega^k_{\mathrm{hor}((\Lambda^{-1})_* H)}(P)$$

Preuve : Soit α une k-forme quelconque. On calcule directement :

$$\begin{aligned}
(h_{\Lambda_* H})^*\alpha &= \alpha(h_{\Lambda_* H} \cdot, ..., h_{\Lambda_* H} \cdot) \\
&= \alpha(\Lambda_* h (\Lambda^{-1})_* \cdot, ..., \Lambda_* h (\Lambda^{-1})_* \cdot) \\
&= (\Lambda^*\alpha)(h(\Lambda^{-1})_* \cdot, ..., h(\Lambda^{-1})_* \cdot) \\
&= (h^*(\Lambda^*\alpha))((\Lambda^{-1})_* \cdot, ..., (\Lambda^{-1})_* \cdot) \\
&= ((\Lambda^{-1})^*(h^*(\Lambda^*\alpha)))(\cdot, ..., \cdot)
\end{aligned}$$

D'où $(h_{\Lambda_* H})^*\alpha = (\Lambda^{-1})^* h^* \Lambda^* \alpha$. Mais α était quelconque. D'où l'égalité souhaitée $(h_{\Lambda_* H})^* = (\Lambda^{-1})^* h^* \Lambda^*$. Enfin, l'égalité pour $(\Lambda^{-1})^* H$ découle directement en substituant Λ par Λ^{-1}. □

Remarque : Tout comme $h^* A = 0$ on a bien :

$$(h_{\Lambda_* H})^*((\Lambda^{-1})^* A) = (\Lambda^{-1})^* h^* \Lambda^* (\Lambda^{-1})^* A = (\Lambda^{-1})^* h^* A = 0$$

$$(h_{(\Lambda^{-1})_* H})^*(\Lambda^* A) = \Lambda^* h^* (\Lambda^{-1})^* \Lambda^* A = \Lambda^* h^* A = 0$$

14.4 Action de $\mathcal{G}$ sur les formes basiques :

Proposition : Soit $\sigma^\sharp \in C^\infty_\rho(P;V)$. Alors

$$\Lambda^*\sigma^\sharp = \rho(\lambda^\sharp)^{-1} \circ \sigma^\sharp \in C^\infty_\rho(P;V)$$

Preuve : Il y a deux choses à montrer. D'abord, l'égalité. Ensuite, que ça vit bien en $C^\infty_\rho(P;V)$. Montrons d'abord l'égalité :

$$\begin{aligned}(\Lambda^*\sigma^\sharp)(a) &= \sigma^\sharp(\Lambda(a)) \\ &= \sigma^\sharp(a\cdot\lambda^\sharp(a)) \\ &= \rho(\lambda^\sharp)^{-1}\circ\sigma^\sharp(a)\end{aligned}$$

D'où l'égalité recherchée $\Lambda^*\sigma^\sharp = \rho(\lambda^\sharp)^{-1} \circ \sigma^\sharp$. Montrons ensuite que ça vit bien en $C^\infty_\rho(P;V)$. Il suffit de montrer la ρ-équivariance de $\rho(\lambda^\sharp)^{-1} \circ \sigma^\sharp$. Soit $g \in G$ quelconque. On calcule directement :

$$\begin{aligned}(\Phi_g)^*(\rho(\lambda^\sharp)^{-1}\circ\sigma^\sharp) &= \rho((\Phi_g)^*\lambda^\sharp)^{-1}\circ((\Phi_g)^*\sigma^\sharp) \\ &= \rho(g^{-1}\lambda^\sharp g)^{-1}\circ(\rho(g)^{-1}\sigma^\sharp) \\ &= \rho(g^{-1})\rho(\lambda^\sharp)^{-1}\rho(g)\rho(g)^{-1}\circ\sigma^\sharp \\ &= \rho(g^{-1})(\rho(\lambda^\sharp)^{-1}\circ\sigma^\sharp)\end{aligned}$$

D'où la ρ-équivariance recherchée. □

Proposition : Le groupe de jauge laisse invariantes les k-formes basiques réelles. C'est-à-dire, pour tout $\alpha^\sharp \in \Omega^k_{\text{hor}}(P)$ on a

$$\Lambda^*\alpha^\sharp = \alpha^\sharp$$

Preuve : Il suffit de montrer que pour tout $\Upsilon \in \mathfrak{G}$, $\mathcal{L}_\Upsilon\alpha^\sharp = 0$. Comme $\alpha^\sharp$ est basique, $\mathrm{d}\alpha^\sharp$ est aussi basique. Donc $\alpha^\sharp$ et $\mathrm{d}\alpha^\sharp$ sont toutes deux horizontales. Puisque Υ est vertical, on trouve directement :

$$\mathcal{L}_\Upsilon\alpha^\sharp = \iota_\Upsilon\mathrm{d}\alpha^\sharp + \mathrm{d}\iota_\Upsilon\alpha^\sharp = 0 + 0 = 0$$

□

Remarque : Puisque les k-formes basiques réelles sur P sont $\mathcal{G}$-invariantes, on remarque, un fois de plus, que la propriété d'être horizontal est indépendant de la forme de connexion A.

Proposition : Soient $\Lambda \in \mathcal{G}$ et $\eta^\sharp \in \Omega^k_{\rho,\text{hor}}(P;V)$. Alors :

$$\Lambda^*\eta^\sharp = \rho(\lambda^\sharp)^{-1} \circ \eta^\sharp \in \Omega^k_{\rho,\text{hor}}(P;V)$$

Preuve : Montrons d'abord l'égalité. Sans pertes de généralités, on peut supposer que $\eta^\sharp = \sigma^\sharp \otimes \alpha^\sharp$ où $\sigma^\sharp \in C^\infty_\rho(P;V)$ et où $\alpha^\sharp \in \Omega^k_{\text{hor}}(P)$. On calcule alors directement :

$$\Lambda^*(\eta^\sharp) = \Lambda^*(\sigma^\sharp \otimes \alpha^\sharp) = (\Lambda^*\sigma^\sharp) \otimes (\Lambda^*\alpha^\sharp) = \rho(\lambda^\sharp)^{-1}\sigma^\sharp \otimes \alpha^\sharp = \rho(\lambda^\sharp)^{-1}\eta^\sharp$$

Montrons ensuite que $\rho(\lambda^\sharp)^{-1} \circ \eta^\sharp \in \Omega^k_{\rho,\text{hor}}(P;V)$. D'abord, puisque $\lambda^\sharp$ est horizontale (car est une 0-forme) et $\eta^\sharp$ est aussi horizontale, on a donc $\rho(\lambda^\sharp)^{-1} \circ \eta^\sharp$ qui est aussi horizontale. Il reste à montrer la ρ-équivariance. On sait que $(\Phi_g)^*\lambda^\sharp = g^{-1}\lambda^\sharp g$ et $(\Phi_g)^*\eta^\sharp = \rho(g)^{-1}\eta^\sharp$. Donc pour $g \in G$ quelconque on calcule directement :

$$\begin{aligned}
(\Phi_g)^*\left(\rho(\lambda^\sharp)^{-1} \circ \eta^\sharp\right) &= \rho((\Phi_g)^*\lambda^\sharp)^{-1} \circ (\Phi_g)^*\eta^\sharp \\
&= \rho(g^{-1}\lambda^\sharp g)^{-1} \circ (\rho(g)^{-1}\eta^\sharp) \\
&= \rho(g)^{-1}\rho(\lambda^\sharp)^{-1}\rho(g)\rho(g)^{-1}\eta^\sharp \\
&= \rho(g)^{-1}\left(\rho(\lambda^\sharp)^{-1} \circ \eta^\sharp\right)
\end{aligned}$$

$\square$

14.5 Action de $\mathcal{G}$ sur la dérivée covariante d^A et d_A :

Proposition : Soient $\Lambda \in \mathcal{G}$ et $\eta^\sharp \in \Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V)$. Alors :

$$\mathrm{d}^{\Lambda\cdot A}\eta^\sharp = \mathrm{d}^{(\Lambda^{-1})^*A}\eta^\sharp = \rho(\lambda^\sharp)\circ \mathrm{d}^A(\rho(\lambda^\sharp)^{-1}\circ\eta^\sharp)$$

$$\mathrm{d}^{A\cdot\Lambda}\eta^\sharp = \mathrm{d}^{\Lambda^*A}\eta^\sharp = \rho(\lambda^\sharp)^{-1}\circ \mathrm{d}^A(\rho(\lambda^\sharp)\circ\eta^\sharp)$$

Preuve : Il suffit de faire la preuve pour $(\Lambda^{-1})^*A$. À la forme de connexion $(\Lambda^{-1})^*A$ correspond la distribution horizontale Λ_*H à laquelle correspond la projection horizontale $h_{\Lambda_*H} = (\Lambda^{-1})^*h^*\Lambda^*$. Souvenons-nous aussi que $\Lambda^*\eta^\sharp = \rho(\lambda^\sharp)^{-1}\circ\eta^\sharp$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^{(\Lambda^{-1})^*A}\eta^\sharp &= (h^\Lambda)^*(\mathrm{d}\eta^\sharp)\\
&= ((\Lambda^{-1})^*h^*\Lambda^*)(\mathrm{d}\eta^\sharp)\\
&= (\Lambda^{-1})^*h^*\mathrm{d}(\Lambda^*\eta^\sharp)\\
&= (\Lambda^{-1})^*\mathrm{d}^A(\rho(\lambda^\sharp)^{-1}\circ\eta^\sharp)\\
&= \rho(\lambda^\sharp)\circ\mathrm{d}^A(\rho(\lambda^\sharp)^{-1}\circ\eta^\sharp)
\end{aligned}$$

□

Remarque : On a aussi les égalités intermédiaires

$$\mathrm{d}^{(\Lambda^{-1})^*A}\eta^\sharp = (\Lambda^{-1})^*\mathrm{d}^A(\Lambda^*\eta^\sharp)$$

$$\mathrm{d}^{\Lambda^*A}\eta^\sharp = \Lambda^*\mathrm{d}^A((\Lambda^{-1})^*\eta^\sharp)$$

Corollaire : On a :

$$\mathrm{d}_{\Lambda\cdot A}\eta = \rho(\lambda)\circ\mathrm{d}_A(\rho(\lambda)^{-1}\circ\eta)$$

$$\mathrm{d}_{A\cdot\Lambda}\eta = \rho(\lambda)^{-1}\circ\mathrm{d}_A(\rho(\lambda)\circ\eta)$$

Remarque : Dans le cas où $\rho = \mathrm{Ad}$, on trouve :

$$\mathrm{d}_{\Lambda\cdot A}\eta = \mathrm{Ad}_\lambda\mathrm{d}_A(\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\eta)$$

$$\mathrm{d}_{A\cdot\Lambda}\eta = \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\mathrm{d}_A(\mathrm{Ad}_\lambda\eta)$$

14.6 Action de $\mathcal{G}$ sur la courbure $F_A^\sharp$:

Proposition : Soient $A \in \mathcal{A}$ et $\Lambda \in \mathcal{G}$. Alors :

$$F^\sharp_{\Lambda \cdot A} = F^\sharp_{(\Lambda^{-1})^* A} = (\Lambda^{-1})^* F^\sharp_A = \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} F^\sharp_A$$

$$F^\sharp_{A \cdot \Lambda} = F^\sharp_{\Lambda^* A} = \Lambda^* F^\sharp_A = \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} F^\sharp_A$$

Preuve : Il suffit de vérifier pour $F^\sharp_{(\Lambda^{-1})^* A}$. On peut le faire de trois manières. Première manière :

$$\begin{aligned}
F^\sharp_{(\Lambda^{-1})^* A} &= (\mathrm{d}((\Lambda^{-1})^* A))_{\mathrm{hor}((\Lambda^{-1})^* A)} \\
&= h^*_{(\Lambda^{-1})^* A}((\Lambda^{-1})^*(\mathrm{d}A)) \\
&= h^*_{\Lambda_* H}((\Lambda^{-1})^*(\mathrm{d}A)) \\
&= (\Lambda^{-1})^* h^*_H(\mathrm{d}A) \\
&= (\Lambda^{-1})^* (\mathrm{d}A)_{\mathrm{hor}(A)} \\
&= (\Lambda^{-1})^* (\mathrm{d}^A A) \\
&= (\Lambda^{-1})^* F^\sharp_A
\end{aligned}$$

Seconde manière :

$$F^\sharp_{(\Lambda^{-1})^* A} = \mathrm{d}^{(\Lambda^{-1})^* A}((\Lambda^{-1})^* A) = (\Lambda^{-1})^* \mathrm{d}^A(\Lambda^* (\Lambda^{-1})^* A) = (\Lambda^{-1})^* F^\sharp_A = \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} F^\sharp_A$$

Troisième manière :

$$\begin{aligned}
F^\sharp_{(\Lambda^{-1})^* A} &= \mathrm{d}((\Lambda^{-1})^* A) + \frac{1}{2}[((\Lambda^{-1})^* A) \wedge ((\Lambda^{-1})^* A)] \\
&= (\Lambda^{-1})^*(\mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A \wedge A]) \\
&= (\Lambda^{-1})^* F^\sharp_A
\end{aligned}$$

□

Corollaire : On a :

$$F_{\Lambda \cdot A} = F_{(\Lambda^{-1})^* A} = \mathrm{Ad}_\lambda F_A$$

$$F_{A \cdot \Lambda} = F_{\Lambda^* A} = \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}} F_A$$

14.7 Formules explicites pour $(\Lambda^{-1})^*A$ et Λ^*A :

On a vu que le groupe de jauge $\mathcal{G}$ agit sur $\mathcal{A}$ par la gauche et par la droite respectivement comme :

$$\Lambda \cdot A = (\Lambda^{-1})^* A \qquad \text{et} \qquad A \cdot \Lambda = \Lambda^* A$$

La question se pose : existe-t-il une formule explicite exprimant $\Lambda \cdot A$ et $A \cdot \Lambda$ en termes de $\lambda^\sharp$? Oui.

Proposition : Soit $\Lambda \in \mathcal{G}$ une transformation de jauge à laquelle correspond $\lambda^\sharp$. Soit $A \in \mathcal{A}$. Supposons que le groupe structurel G est matriciel. Alors les actions à gauche $\Lambda \cdot A$ et à droite $A \cdot \Lambda$ de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ sont explicitement donnés par :

$$\begin{aligned}
\Lambda \cdot A &= (\Lambda^{-1})^* A \\
&= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} A + ((\lambda^\sharp)^{-1})^* \theta \\
&= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} A - (\mathrm{d}\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1} \\
&= A - (\mathrm{d}^A \lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \cdot \Lambda &= \Lambda^* A \\
&= \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} A + (\lambda^\sharp)^* \theta \\
&= \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} A + (\lambda^\sharp)^{-1}(\mathrm{d}\lambda^\sharp) \\
&= A + (\lambda^\sharp)^{-1}(\mathrm{d}^A \lambda^\sharp)
\end{aligned}$$

où $\theta \in \Omega^1(G;\mathfrak{g})$ est la 1-forme de Maurer-Cartan sur le groupe structurel G et où $\mathrm{d}^A\lambda^\sharp := (\mathrm{d}\lambda^\sharp)_{\mathrm{hor}}$ où $\mathrm{d}\lambda^\sharp := (\lambda^\sharp)_* : TP \to T_{\lambda^\sharp}G$.

Remarque : La preuve se fera en plusieurs étapes, i.e. plusieurs égalités à démontrer, dans les deux sections subséquentes.

Remarque : Ici je développe pour l'action à gauche $\Lambda \cdot A$ et l'action à droite $A \cdot \Lambda$

$$\Lambda \cdot A = (\Lambda^{-1})^* A = \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} A - (\mathrm{d}\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1}$$

$$A \cdot \Lambda = \Lambda^* A = \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} A + (\lambda^\sharp)^{-1}(\mathrm{d}\lambda^\sharp)$$

car dans la littérature les deux variantes sont utilisées. Wehrheim (2006, *Lagrangian boundary conditions...*), p.6, utilise la seconde version. Sikorav (1990, *Homologie associée à...*), p.117, utilise la seconde version. Donaldson-Kronheimer (*The geometry of four-manifolds*), p.34, utilise la première version. Floer (1988, *An instanton invariant...*), p.218, n'utilise ni une version ni l'autre (il semble utiliser la première mais avec une erreur de signe). Remarquons enfin que la seconde version (utilisée e.g. par Wehrheim) semble plus pertinente pour voir $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ comme $\mathcal{G}$-fibré principal à droite (car j'ai toujours travaillé avec des fibrés principaux à droite et non à gauche).

14.8 Preuve des deux premières égalités :

Proposition : Soit $\pi : P \to B$ un G-fibré principal. Soit $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ une section trivialisante locale. Il lui correspond une application G-équivariante $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to G$ définie par $\phi_\alpha \circ s_\alpha = e \in G$. Alors pour toute transformation de jauge $\Lambda \in \mathcal{G}$, on a :

$$(\Lambda^{-1})^*\phi_\alpha^{-1} = \lambda^\sharp \phi_\alpha^{-1} \qquad \text{et} \qquad (\Lambda^{-1})^*\phi_\alpha = \phi_\alpha(\lambda^\sharp)^{-1}$$

Preuve : Soit $a \in P$ quelconque. Montrons la première égalité :

$$\begin{aligned} ((\Lambda^{-1})^*\phi_\alpha^{-1})(a) &= (\phi_\alpha \circ (\Lambda^{-1})(a))^{-1} \\ &= (\phi_\alpha(a \cdot (\lambda^\sharp(a))^{-1}))^{-1} \\ &= (\phi_\alpha(a)(\lambda^\sharp(a))^{-1})^{-1} \\ &= \lambda^\sharp(a)\phi_\alpha(a)^{-1} \\ &= (\lambda^\sharp \phi_\alpha^{-1})(a) \end{aligned}$$

La seconde égalité découle en inversant la valeur de ϕ en G. □

Proposition : $(\phi_\alpha(\lambda^\sharp)^{-1})^*\theta = \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \circ \phi_\alpha^*\theta + ((\lambda^\sharp)^{-1})^*\theta$

Preuve : Souvenons-nous de l'égalité de la première section sur les rappels de la forme de Maurer-Cartan :

$$(fg)^*\theta = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} f^*\theta + g^*\theta$$

En prenant $f = \phi_\alpha$ et $g = (\lambda^\sharp)^{-1}$, l'égalité recherchée découle directement. □

Proposition : Pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $\Lambda \in \mathcal{G}$, on a :

$$(\Lambda^{-1})^*A = \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} A + ((\lambda^\sharp)^{-1})^*\theta$$

$$\Lambda^*A = \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} A + (\lambda^\sharp)^*\theta$$

Preuve : Il suffit de démontrer la première égalité. Soit $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ une section trivialisante locale quelconque. Souvenons-nous que :

$$A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \circ \pi^* A_\alpha + \phi_\alpha^*\theta$$

On calcule alors directement :

$$\begin{array}{rcl}(\Lambda^{-1})^*(A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}) & = & (\Lambda^{-1})^*(\mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \circ \pi^* A_\alpha + \phi_\alpha^* \theta) \\ & = & \mathrm{Ad}_{(\Lambda^{-1})^*\phi_\alpha^{-1}} \circ (\Lambda^{-1})^* \pi^* A_\alpha + (\Lambda^{-1})^* \phi_\alpha^* \theta \\ & = & \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp \phi_\alpha^{-1}} \circ (\pi \circ \Lambda^{-1})^* A_\alpha + (\phi_\alpha \circ \Lambda^{-1})^* \theta \\ & = & \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \circ \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \pi^* A_\alpha + (\phi_\alpha (\lambda^\sharp)^{-1})^* \theta \\ & = & \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \circ \mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \pi^* A_\alpha + \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \circ \phi_\alpha^* \theta + ((\lambda^\sharp)^{-1})^* \theta \\ & = & \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \circ (\mathrm{Ad}_{\phi_\alpha^{-1}} \pi^* A_\alpha + \phi_\alpha^* \theta) + ((\lambda^\sharp)^{-1})^* \theta \\ & = & \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \circ A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} + ((\lambda^\sharp)^{-1})^* \theta \end{array}$$

Puisque l'égalité $(\Lambda^{-1})^*(A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}) = \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \circ A|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} + ((\lambda^\sharp)^{-1})^*\theta$ est indépendante du choix de section trivialisante locale $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ sur U_α, il suit que l'égalité globale $(\Lambda^{-1})^*A = \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} A + ((\lambda^\sharp)^{-1})^*\theta$ est vraie. □

Corollaire : Si G est un groupe matriciel, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $\Lambda \in \mathcal{G}$ on a :

$$(\Lambda^{-1})^* A = \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} A - (\mathrm{d}\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1}$$

$$\Lambda^* A = \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} A + (\lambda^\sharp)^{-1}(\mathrm{d}\lambda^\sharp)$$

Preuve : Par la dernière proposition, il suffit d'utiliser les deux égalités suivantes :

$$((\lambda^\sharp)^{-1})^* \theta = -(\mathrm{d}\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1}$$

$$(\lambda^\sharp)^* \theta = (\lambda^\sharp)^{-1}(\mathrm{d}\lambda^\sharp)$$

□

14.9 Preuve de la troisième égalité :

Proposition : Soit $\Lambda \in \mathcal{G}$ et $A \in \mathcal{A}$. Posons $\mathrm{d}^A\lambda^\sharp := (\mathrm{d}\lambda^\sharp)_{\mathrm{hor}(A)} = (\mathrm{d}\lambda^\sharp) \circ h$. Alors :

$$(\Lambda^{-1})^* A = A - (\mathrm{d}^A\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1}$$

$$\Lambda^* A = A + (\lambda^\sharp)^{-1}(\mathrm{d}^A\lambda^\sharp)$$

Preuve : Il suffit de démontrer la première égalité. Pour cela, il suffit de démontrer que :

$$A - (\mathrm{d}^A\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1} = \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} A - (\mathrm{d}\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1}$$

Comme $\lambda^\sharp$ est basique, on peut utiliser l'égalité suivante :

$$\mathrm{d}^A\lambda^\sharp = \mathrm{d}\lambda^\sharp + (\iota_*|_e(A))\lambda^\sharp$$

Il suffit alors de se souvenir de l'égalité suivante démontrée dans la première section $(\iota_*|_e(\xi))_g = (R_g)_*\xi - (L_g)_*\xi$ pour tout $g \in G$ et $\xi \in \mathfrak{g}$. On calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}^A\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1} &= (R^{-1}_{\lambda^\sharp})_*\mathrm{d}^A\lambda^\sharp \\
&= (R^{-1}_{\lambda^\sharp})_*((\lambda^\sharp)_* + (\iota_*|_e(A))\lambda^\sharp) \\
&= (R^{-1}_{\lambda^\sharp})_*(\lambda^\sharp)_* + (R^{-1}_{\lambda^\sharp})_*(\iota_*|_e(A))|_{\lambda^\sharp} \\
&= (\lambda^\sharp)_*(\lambda^\sharp)^{-1} + (R^{-1}_{\lambda^\sharp})_*((R_{\lambda^\sharp})_*A - (L_{\lambda^\sharp})_*A) \\
&= (\lambda^\sharp)_*(\lambda^\sharp)^{-1} + A - (R^{-1}_{\Lambda^\sharp}L_{\lambda^\sharp})_*A \\
&= (\lambda^\sharp)_*(\lambda^\sharp)^{-1} + A - \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp}A \\
&= A - \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp}A + (\lambda^\sharp)_*(\lambda^\sharp)^{-1}
\end{aligned}$$

□

14.10 Dernière remarque sur $(\Lambda^{-1})^*A$ et Λ^*A :

Voici l'argument classique pour trouver la formule explicite

$$((\Lambda^{-1})^*A)_\alpha = \mathrm{Ad}_{\lambda_\alpha} A_\alpha - (\mathrm{d}\lambda_\alpha)\lambda_\alpha^{-1}$$

qui exprime $(\Lambda^{-1})^*A$ en fonction de $\lambda^\sharp$ qu'on retrouve dans la littérature. On prend $\lambda_\alpha = \Psi_{\alpha\beta}^{-1}$ et on pose $((\Lambda^{-1})^*A)_\alpha = A_\beta$ dans l'égalité suivante :

$$A_\beta = \mathrm{Ad}_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}} A_\alpha + \Psi_{\alpha\beta}^{-1}\mathrm{d}\Psi_{\alpha\beta}$$

Déjà, cet argument est louche au sens où :

Proposition : L'égalité $\Psi_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha^{-1}$ est mal définie.

Preuve : Fixons μ et supposons l'égalité $\lambda_\alpha = \Psi_{\alpha\mu}^{-1}$ vraie pour tout α. Alors, pour β on a aussi $\lambda_\beta = \Psi_{\beta\mu}^{-1}$. Par ι-équivariance de λ on trouve donc :

$$\Psi_{\beta\mu}^{-1} = \lambda_\beta = \iota_{\Psi_{\alpha\beta}^{-1}}\lambda_\alpha = \Psi_{\alpha\beta}^{-1}\Psi_{\alpha\mu}^{-1}\Psi_{\alpha\beta}$$

D'où :

$$e = \Psi_{\alpha\beta}^{-1}\Psi_{\alpha\mu}^{-1}\Psi_{\alpha\beta}\Psi_{\beta\mu} = \Psi_{\alpha\beta}^{-1}\Psi_{\alpha\mu}^{-1}\Psi_{\alpha\mu} = \Psi_{\alpha\beta}^{-1}$$

L'égalité $\lambda_\alpha = \Psi_{\alpha\mu}^{-1}$ n'est donc vraie que pour un changement de trivialisation locale trivial $\Psi_{\alpha\beta} = e$. □

14.11 Représentations adjointes et coadjointes de $\mathcal{G}$ sur $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{G}^*$:

Proposition : Soit $\Upsilon \in \mathfrak{G}$ et $\Lambda \in \mathcal{G}$. Soit $\mathrm{Ad} : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$ la représentation adjointe de $\mathcal{G}$ sur $\mathfrak{G}$. Alors :

$$\mathrm{Ad}_\Lambda \Upsilon = \Lambda_* \Upsilon \circ \Lambda^{-1}$$

Preuve : Υ est un champ vectoriel qui peut être vu comme $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Lambda_t$ où $\Lambda_t = \exp(t\Upsilon)$ (ici Λ_t n'a rien à voir avec Λ). Il suit que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_\Lambda \Upsilon &= (\iota_\Lambda)_*|_e \Upsilon \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\iota_\Lambda \Lambda_t) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\Lambda \circ \Lambda_t \circ \Lambda^{-1}\right) \\
&= \Lambda_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(\Lambda_t \circ \Lambda^{-1}\right) \\
&= \Lambda_* \Upsilon \circ \Lambda^{-1}
\end{aligned}$$

□

Proposition : L'élément de $C^\infty_{\mathrm{Ad}}(P; \mathfrak{g})$ correspondant à $\mathrm{Ad}_\Lambda \Upsilon$ est $\mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \upsilon^\sharp$.

Preuve : Soit $\upsilon^\sharp = A(\Upsilon)$ défini de manière indépendante du choix de connexion A. Soit $a \in P$ quelconque. Par la dernière proposition, l'élément correspondant à $\mathrm{Ad}_\Lambda \Upsilon$ en a est :

$$\begin{aligned}
A_a(\mathrm{Ad}_\Lambda \Upsilon) &= A_a(\Lambda_* \Upsilon \circ \Lambda^{-1}) \\
&= (\Lambda^* A)_{\Lambda^{-1}(a)}(\Upsilon \circ \Lambda^{-1})
\end{aligned}$$

Mais $\Upsilon \circ \Lambda^{-1}$ est vertical et donc son évaluation est égale sur les deux connexions A et $\Lambda^* A$. Il suit que :

$$\begin{aligned} A_a(\mathrm{Ad}_\Lambda \Upsilon) &= (\Lambda^* A)_{\Lambda^{-1}(a)}(\Upsilon \circ \Lambda^{-1}) \\ &= A_{\Lambda^{-1}(a)}(\Upsilon \circ \Lambda^{-1}) \\ &= (A(\Upsilon)) \circ \Lambda^{-1}(a) \\ &= \upsilon^\sharp \circ \Lambda^{-1}(a) \\ &= ((\Lambda^{-1})^* \upsilon^\sharp)(a) \\ &= (\mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \upsilon^\sharp)(a) \end{aligned}$$

D'où l'égalité recherchée $A(\mathrm{Ad}_\Lambda \Upsilon) = \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \upsilon^\sharp$. □

Corollaire : Si $\upsilon \in \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P)$ correspond à $\Upsilon \in \mathfrak{G}$, alors $\mathrm{Ad}_\lambda \upsilon \in \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P)$ correspond à $\mathrm{Ad}_\Lambda \Upsilon$.

Remarque : Puisque l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ peut être vue comme $\Omega^0(B; \mathrm{Ad}P)$, il suit que son espace dual $\mathfrak{G}^*$ peut être vu comme $\Omega^n(B; \mathrm{Ad}P)$, où $n := \dim B$, avec appariement de dualité donné par :

$$\begin{aligned} \langle \cdot , \cdot \rangle : \mathfrak{G}^* \times \mathfrak{G} &\to \mathbb{R} \\ (\eta, \upsilon) &\mapsto \int_B \eta \wedge^\kappa \upsilon \end{aligned}$$

où $\kappa := (\kappa^\sharp)_\sharp$ pour $\kappa^\sharp := -K$ où $K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ est la forme de Killing.

Proposition : L'action coadjointe $\mathrm{Ad}^* : \mathcal{G} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{G}^*)$ de $\Lambda \in \mathcal{G}$ sur $\eta \in \mathfrak{G}^*$ est explicitement donnée par :

$$\mathrm{Ad}^*_\Lambda \eta = \mathrm{Ad}_\lambda \eta$$

Preuve : Soit υ correspondant à $\Upsilon \in \mathfrak{G}$ quelconque. Par définition de l'action coadjointe, et par la dernière proposition, on a :

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Ad}^*_\Lambda \eta, \upsilon \rangle &= \langle \eta, \mathrm{Ad}_{\Lambda^{-1}} \upsilon \rangle \\ &= \langle \eta, \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}} \upsilon \rangle \\ &= \int_B \eta \wedge^\kappa (\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}} \upsilon) \\ &= \int_B (\mathrm{Ad}_\lambda \eta) \wedge^\kappa \upsilon \\ &= \langle \mathrm{Ad}_\lambda \eta, \upsilon \rangle \end{aligned}$$

où j'ai utilisé la Ad-invariance de κ. $\square$

15 Isotopies de jauges et connexions dépendantes du temps

15.1 Rappel sur la correspondance entre $\upsilon_t^\sharp$ et $\lambda_t^\sharp$

Faisons un résumé des deux dernières sections. Soit Λ_t une isotopie de jauge. Il lui correspond $\lambda_t^\sharp$ donné par :

$$\Lambda_t(a) = a \cdot \lambda_t^\sharp(a)$$

À Λ_t on peut associer un champ vectoriel dépendant du temps Υ_t de deux manières :

$$\text{première manière :} \quad \Upsilon_t = \dot{\Lambda}_t \circ \Lambda_t^{-1} \in \mathfrak{G} = T_{\mathrm{id}_P}\mathcal{G} < \mathfrak{X}(P)$$

$$\text{seconde manière :} \quad \Upsilon_t = (\Lambda_t^{-1})_* \dot{\Lambda}_t \in \mathfrak{G} = T_{\mathrm{id}_P}\mathcal{G} < \mathfrak{X}(P)$$

À Υ_t correspond $\upsilon_t^\sharp$ donné par :

$$\upsilon_t^\sharp = A(\Upsilon_t)$$

Cette égalité est indépendante du choix de connexion $A \in \mathcal{A}$. Plus haut on a montré que selon les deux définitions de Υ_t depuis Λ_t on a :

$$\text{première manière :} \quad \upsilon_t^\sharp = \dot{\lambda}_t^\sharp(\lambda_t^\sharp)^{-1}$$

$$\text{seconde manière :} \quad \upsilon_t^\sharp = (\lambda_t^\sharp)^{-1}\dot{\lambda}_t^\sharp$$

Dans le cas particulier où Λ_t est un groupe de transformations de jauges à 1-paramètre, on a vu que $\Lambda_t = \exp(t\Upsilon)$ devient

$$\lambda_t^\sharp = \exp(t\upsilon^\sharp)$$

et $\Upsilon = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \Lambda_t = t^{-1} \ln \Lambda_t$ devient :

$$\upsilon^\sharp = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \lambda_t^\sharp = t^{-1} \ln \lambda_t^\sharp$$

15.2 Champ vectoriel fondamental $\Upsilon_t^* \in \mathfrak{X}(\mathcal{A})$:

Soit Λ_t une isotopie de jauge. Comme $\mathcal{G}$ agit sur $\mathcal{A}$ (par la gauche ou par la droite), à une transformation infinitésimale dépendante du temps

$$\text{première manière :} \quad \Upsilon_t = \dot{\Lambda}_t \circ \Lambda_t^{-1} \in \mathfrak{G} < \mathfrak{X}(P)$$

$$\text{seconde manière :} \quad \Upsilon_t = \Lambda_t^{-1} \circ \dot{\Lambda}_t \in \mathfrak{G} < \mathfrak{X}(P)$$

correspond un champ vectoriel fondamental dépendant du temps $\Upsilon_t^* \in \mathfrak{X}(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{A}$. On peut déterminer la famille de champs vectoriels $\Upsilon_t^* \in \mathfrak{X}(\mathcal{A})$ en regardant l'évolution d'une connexion $A_t := (\Lambda_t^{-1})^* A$ (pour l'action à gauche) ou $A_t = \Lambda_t^* A$ (pour l'action à droite) en $\mathcal{A}$ sous le flot (à gauche ou à droite) de Λ_t sur $\mathcal{A}$. Le champ vectoriel Υ_t^* peut s'exprimer en termes de $v_t^\sharp$. Il y a quatre manières de voir les choses. Avec la première définition de Υ_t et l'action à gauche de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$, on a :

$$\Upsilon_t^*|_{A_t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Lambda_t \cdot A) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Lambda_t^{-1})^* A = -\mathcal{L}_{\Upsilon_t}(\Lambda_t^{-1})^* A = -\mathcal{L}_{\Upsilon_t} A_t$$

Avec la première définition de Υ_t et l'action à droite de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$, on a :

$$\Upsilon_t^*|_{A_t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A \cdot \Lambda_t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda_t^* A = \Lambda_t^* \mathcal{L}_{\Upsilon_t} A = \Lambda_t^* \mathcal{L}_{\Upsilon_t}(\Lambda_t^{-1})^* A_t$$

Avec la seconde définition de Υ_t et l'action à gauche de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$, on a :

$$\Upsilon_t^*|_{A_t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Lambda_t \cdot A) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Lambda_t^{-1})^* A = -(\Lambda_t^{-1})^* \mathcal{L}_{\Upsilon_t} A = -(\Lambda_t^{-1})^* \mathcal{L}_{\Upsilon_t} \Lambda_t^* A_t$$

Avec la seconde définition de Υ_t et l'action à droite de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$, on a :

$$\Upsilon_t^*|_{A_t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A \cdot \Lambda_t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda_t^* A = \mathcal{L}_{\Upsilon_t} \Lambda_t^* A = \mathcal{L}_{\Upsilon_t} A_t$$

Ces égalités découlent de la section sur les isotopies plus haut. Clairement, il est avantageux d'utiliser la première définition de Υ_t lorsque $\mathcal{G}$ agit par la gauche sur $\mathcal{A}$ et d'utiliser la seconde définition de Υ_t lorsque $\mathcal{G}$ agit par la droite sur $\mathcal{A}$. Je vais donc prendre cette convention :

$$\mathcal{G} \text{ agit par la gauche sur } \mathcal{A} \implies \text{première définition de } \Upsilon_t$$

$$\mathcal{G} \text{ agit par la droite sur } \mathcal{A} \implies \text{seconde définition de } \Upsilon_t$$

Proposition : Pour $\Upsilon \in \mathfrak{G}$ et $A \in \mathcal{A}$, on a :

$$\mathcal{L}_\Upsilon A = \mathrm{d}^A \upsilon^\sharp$$

Preuve : En utilisant le fait que Υ est vertical, que $F_A = \mathrm{d}A + [A, A]$ est horizontale et que $\upsilon^\sharp = A(\Upsilon)$, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\Upsilon A &= \iota_\Upsilon \mathrm{d}A + \mathrm{d}\iota_\Upsilon A \\
&= -\iota_\Upsilon [A, A] + \mathrm{d}\upsilon^\sharp \\
&= -[A(\Upsilon), A] + \mathrm{d}\upsilon^\sharp \\
&= -[\upsilon^\sharp, A] + d\upsilon^\sharp \\
&= \mathrm{d}\upsilon^\sharp + [A, \upsilon^\sharp] \\
&= \mathrm{d}^A \upsilon^\sharp
\end{aligned}$$

□

Proposition : Suivant la convention qui précède, la famille de champs vectoriels fondamentaux Υ_t^* est explicitement donnée en chaque $A \in \mathcal{A}$, pour les actions à gauche et à droite, par :

$$\begin{aligned}
\Upsilon_t^*|_{A_t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Lambda_t \cdot A) = -\mathrm{d}^{A_t} \upsilon_t^\sharp \\
\Upsilon_t^*|_{A_t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A \cdot \Lambda_t) = \mathrm{d}^{A_t} \upsilon_t^\sharp
\end{aligned}$$

Preuve : Pour l'action à gauche (et la première définition de Υ_t), on trouve :

$$\begin{aligned}
\Upsilon_t^*|_{A_t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Lambda_t \cdot A) \\
&= -\mathcal{L}_{\Upsilon_t} A_t \\
&= -\mathrm{d}^{A_t} \upsilon_t^\sharp
\end{aligned}$$

De même, pour l'action à droite (et la seconde définition de Υ_t) on trouve :

$$\begin{aligned}
\Upsilon_t^*|_{A_t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A \cdot \Lambda_t) \\
&= \mathcal{L}_{\Upsilon_t} \Lambda_t^* A \\
&= \mathcal{L}_{\Upsilon_t} A_t \\
&= \mathrm{d}^{A_t} \upsilon_t^\sharp
\end{aligned}$$

□

Remarque : Si Λ_t est un groupe de transformations de jauges à 1-paramètre, Υ est indépendant du temps, donc $\upsilon^\sharp$ aussi, et on a respectivement pour les actions à gauche et à droite :

$$\dot{A}_t = -\mathrm{d}^{A_t}\upsilon^\sharp$$

$$\dot{A}_t = \mathrm{d}^{A_t}\upsilon^\sharp$$

Remarque : Au temps $t = 0$ on trouve à gauche (resp. à droite) :

$$\Upsilon^*|_A = -\mathrm{d}^A\upsilon^\sharp$$

$$\Upsilon^*|_A = \mathrm{d}^A\upsilon^\sharp$$

15.3 Lemme de Moser en théorie de jauge :

Proposition : Soit A_t un chemin différentiable en $\mathcal{A}$ dont la vitesse $\dot{A}_t$ est d^{A_t}-exacte à chaque temps t. Plus précisément, supposons qu'il existe un chemin $\upsilon_t^\sharp$ en $\Omega^1_{\mathrm{Ad,hor}}(P;\mathfrak{g})$ tel que :

$$\dot{A}_t = -\mathrm{d}^{A_t}\upsilon_t^\sharp \qquad \text{(pour l'action à gauche)}$$

$$\dot{A}_t = \mathrm{d}^{A_t}\upsilon_t^\sharp \qquad \text{(pour l'action à droite)}$$

Alors, il existe une isotopie de jauge Λ_t telle que $A_t = (\Lambda_t^{-1})^*A_0$ (si action à gauche) ou telle que $A_t = \Lambda_t^*A_0$ (si action à droite).

Preuve : Il suffit de faire la preuve pour l'action à gauche de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$. Supposons qu'il existe $\upsilon_t^\sharp$ tel que $\dot{A}_t = -\mathrm{d}^{A_t}\upsilon_t^\sharp$. À $\upsilon_t^\sharp$ correspond un unique $\Upsilon_t \in \mathfrak{X}(P)$ vertical tel que $\upsilon_t^\sharp = A_t(\Upsilon_t)$. À ce dernier Υ_t correspond une unique isotopie de jauge Λ_t vérifiant $\Lambda_0 = \mathrm{id}_P$ et $\Upsilon_t = \dot{\Lambda}_t \circ \Lambda_t^{-1}$. Dans la dernière section il a été démontré que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Lambda_t^{-1})^*A_0 = -\mathrm{d}^{A_t}\upsilon_t^\sharp$$

On calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
A_t - A_0 &= \int_0^t \dot{A}_t\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^t \mathrm{d}^{A_t}\upsilon_t^\sharp\mathrm{d}t \\
&= \int_0^t \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=t}(\Lambda_s^{-1})^*A_0\right)\mathrm{d}t \\
&= (\Lambda_t^{-1})^*A_0 - (\Lambda_0^{-1})^*A_0 \\
&= (\Lambda_t^{-1})^*A_0 - A_0
\end{aligned}$$

D'où l'égalité recherchée $A_t = (\Lambda_t^{-1})^*A_0$. Pour la preuve avec l'action à droite de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ il faut prendre plutôt $\Upsilon_t = \Lambda_t^{-1}\circ\dot{\Lambda}_t$ suivant la convention plus haut. □

Remarque : Peut-on aller plus loin ? Le lemme de Moser en symplectique sert à se rendre à Darboux. Y a-t-il un équivalent de Darboux en théorie de jauge ?

Remarque : En fait, la preuve de la dernière proposition marche pour l'action à gauche mais est louche pour l'action à droite. La raison en est qu'à Υ_t donné oui on peut résoudre l'ÉDO et obtenir Λ_t tel que $\dot{\Lambda}_t = \Upsilon_t \circ \Lambda_t$, mais pour l'action à droite il faut résoudre une ÉDP $\dot{\Lambda}_t = (\Lambda_t)_*\Upsilon_t$. Le problème est que je n'ai aucun théorème qui me garantisse une isotopie de jauge Λ_t selon la dernière équation. Ça serait à faire dans la section sur les isotopies plus haut. TO DO ! ! !

15.4 Nouvelle preuve que $A_t = A'_t$:

Remarque : À partir d'ici, dans la présente section sur les isotopies de jauges sur $\mathcal{A}$, l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$ sera prise à gauche :

$$A^\Lambda := (\Lambda^{-1})^* A = \Lambda \cdot A$$

Je vais ici montrer une nouvelle preuve que $A' = A^\Lambda$ où $A' := \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} A + \theta_\Lambda$ pour $\theta_\Lambda := ((\lambda^\sharp)^{-1})^* \theta$ où $\theta \in \Omega^1(G; \mathfrak{g})$ est la 1-forme de Maurer-Cartan. Pour cela, il suffit de montrer que $A'_t = A_t$. On sait que

$$A'_t = \mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp} A + \theta_{\Lambda_t}$$

$$\dot{A}_t = -\mathrm{d}^{A_t} \upsilon_t^\sharp$$

Supposons $\Lambda \in \mathcal{G}_0$ la composante identité de $\mathcal{G}$. Alors il existe $\Upsilon \in \mathfrak{G}$ tel que $\Lambda_1 = \Lambda$ où $\Lambda_t = \exp(t\Upsilon)$. Puisque $A'_0 = A_0$ et que le système d'équations différentielles $\dot{A}_t = -\mathrm{d}^{A_t} \upsilon_t^\sharp$ est d'ordre 1, il suffit de montrer que $\dot{A}'_t = \dot{A}_t$ pour avoir l'égalité $A' = A^\Lambda$.

On a vu plus haut que pour $\xi : P \to \mathfrak{g}$, et donc $\exp(\xi) : P \to G$, on a l'égalité suivante :

$$\exp(\xi)^* \theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathrm{ad}_\xi^k}{(k+1)!} \mathrm{d}\xi$$

Considérons un groupe de transformations de jauges à 1-paramètre $\Lambda_t = \exp(t\Upsilon)$. Il lui correspond $\lambda_t^\sharp = \exp(t\upsilon^\sharp)$. Prenons $\xi = -t\upsilon^\sharp$ et donc $\exp(\xi) = \exp(-t\upsilon^\sharp) = (\lambda_t^\sharp)^{-1}$.

Proposition : Pour $\Lambda_t = \exp(t\Upsilon)$, un groupe transformations de jauges à 1-paramètres, on a l'égalité suivante :

$$\theta_{\Lambda_t} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1} \mathrm{ad}_{\upsilon^\sharp}^k}{(k+1)!} \mathrm{d}\upsilon^\sharp$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\theta_{\Lambda_t} &= ((\lambda_t^\sharp)^{-1})^*\theta \\
&= (\exp(-t\upsilon^\sharp))^*\theta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\mathrm{ad}^k_{(-t\upsilon^\sharp)}}{(k+1)!}\mathrm{d}(-t\upsilon^\sharp) \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1}\mathrm{ad}^k_{\upsilon^\sharp}}{(k+1)!}\mathrm{d}\upsilon^\sharp
\end{aligned}$$

□

Proposition : Pour $\Lambda_t = \exp(t\Upsilon)$ on a l'égalité suivante :

$$\dot{\theta}_{\Lambda_t} = -\mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp}\mathrm{d}\upsilon^\sharp$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_{\Lambda_t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta_{\Lambda_t} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1}\mathrm{ad}^k_{\upsilon^\sharp}}{(k+1)!}\mathrm{d}\upsilon^\sharp \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k}\mathrm{ad}^k_{\upsilon^\sharp}}{k!}\mathrm{d}\upsilon^\sharp \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{ad}^k_{t\upsilon^\sharp}}{k!}\mathrm{d}\upsilon^\sharp \\
&= -\mathrm{Ad}_{\exp(t\upsilon^\sharp)}\mathrm{d}\upsilon^\sharp \\
&= -\mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp}\mathrm{d}\upsilon^\sharp
\end{aligned}$$

□

Proposition : Pour $\Lambda_t = \exp(t\Upsilon)$, i.e. $\upsilon_t^\sharp = \upsilon^\sharp$ constant, on a l'égalité

$$\dot{A}'_t = \dot{A}_t$$

Preuve : On sait que :

$$A'_t = \mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp}A + \theta_{\Lambda_t}$$

$$\dot{A}_t = -\mathrm{d}^{A_t}\upsilon$$

On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\dot{A}'_t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp}A + \theta_{\Lambda_t}) \\
&= \mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp}\mathrm{ad}_{\upsilon^\sharp}A + \dot{\theta_{\Lambda_t}} \\
&= -\mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp}[A, \upsilon^\sharp] - \mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp}\mathrm{d}\upsilon^\sharp \\
&= -\mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp}(\mathrm{d}\upsilon^\sharp + [A, \upsilon^\sharp]) \\
&= -\mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp}\mathrm{d}^A\upsilon^\sharp \\
&= -\mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp}\mathrm{d}^A(\mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp}^{-1}\upsilon^\sharp) \\
&= -\mathrm{d}^{A_t}\upsilon^\sharp
\end{aligned}$$

□

15.5 Dérivées d'ordre supérieur de A_t pour $\Lambda_t = \exp(t\Upsilon)$:

On a vu que pour toute isotopie de jauge Λ_t :

$$A_t = A + (\theta_{\Lambda_t})_{\mathrm{hor}(A)}$$

où $\theta_{\Lambda_t} = ((\lambda_t^\sharp)^{-1})^*\theta$. Lorsque $\Lambda_t = \exp(t\Upsilon)$ est un groupe de transformations de jauges à 1-paramètre, on a :

$$\theta_{\Lambda_t} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}\mathrm{ad}_{\upsilon^\sharp}^k}{(k+1)!}\mathrm{d}\upsilon^\sharp$$

On remarque alors que :

$$(\theta_{\Lambda_t})_{\mathrm{hor}(A)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}\mathrm{ad}_{\upsilon^\sharp}^k}{(k+1)!}\mathrm{d}^A\upsilon^\sharp$$

Ainsi, on obtient l'égalité suivante :

$$A_t = A - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}\mathrm{ad}_{\upsilon^\sharp}^k}{(k+1)!}\mathrm{d}^A\upsilon^\sharp$$

où il saute aux yeux que $\dot{A}_t = -\mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp}\mathrm{d}^A\upsilon^\sharp = -\mathrm{d}^{A_t}\upsilon^\sharp$.

La question se pose : quelles sont les dérivées d'ordre supérieur ?

Proposition : Pour tout $k \geq 0$ on a l'égalité suivante :

$$A_t^{(k+1)} := \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}t^{k+1}}A_t = -\mathrm{ad}_{\upsilon^\sharp}^k\mathrm{d}^{A_t}\upsilon^\sharp$$

Preuve : On sait déjà que le cas $k = 0$ est vrai. Supposons que l'égalité est vrai pour k. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{k+2}}{\mathrm{d}t^{k+2}}A_t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}t^{k+1}}A_t\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\mathrm{ad}_{\upsilon^\sharp}^k\mathrm{d}^{A_t}\upsilon^\sharp\right) \\
&= -\mathrm{ad}_{\upsilon^\sharp}^k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp}\mathrm{d}^A\upsilon^\sharp \\
&= -\mathrm{ad}_{\upsilon^\sharp}^{k+1}\mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp}\mathrm{d}^A\upsilon^\sharp \\
&= -\mathrm{ad}_{\upsilon^\sharp}^{k+1}\mathrm{d}^{A_t}\upsilon^\sharp
\end{aligned}$$

Donc c'est aussi vrai pour $k+1$. $\square$

Corollaire : $\left(A_t^{(k+1)}\right)_{t=0} = -\mathrm{ad}^k_{\upsilon^\sharp}\mathrm{d}^A\upsilon^\sharp$

Remarque : On peut maintenant exprimer A_t comme série de Taylor autour de $t=0$:

$$\begin{aligned} A_t &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(A_t^{(k)})|_{t=0} \\ &= A+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(A_t^{(k)})|_{t=0} \\ &= A+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}(A_t^{(k+1)})|_{t=0} \\ &= A-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1}\mathrm{ad}^k_{\upsilon^\sharp}}{(k+1)!}\mathrm{d}^A\upsilon^\sharp \end{aligned}$$

On retrouve donc la formule de départ

$$A_t = A-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1}\mathrm{ad}^k_{\upsilon^\sharp}}{(k+1)!}\mathrm{d}^A\upsilon^\sharp$$

Génial.

Remarque : $\ddot{A}_t = -\mathrm{ad}_{\upsilon^\sharp}\mathrm{d}^{A_t}\upsilon^\sharp$. C'est-à-dire :

$$\ddot{A}_t = -[\upsilon^\sharp, \mathrm{d}^{A_t}\upsilon^\sharp]$$

Ce terme d'accélération correspond exactement avec l'équation de YMH

$$\delta_A F_A = -[\varphi, \mathrm{d}_A\varphi]$$

pour $\varphi=\upsilon$. L'équation de YMH devient alors :

$$\delta_{A_t}F_{A_t} = (\ddot{A}_t)_\sharp$$

Dans le cas G abélien c'est l'équation d'onde. Dans le cas non abélien c'est plus compliqué.

Aussi : le "courant de matière" $J=-[\varphi,\mathrm{d}_A\varphi]$ représente alors intuitivement l'accélération de la connexion...

15.6 Accélération d'une connexion :

On a vu que pour un groupe de transformations de jauges à 1-paramètre $\Lambda_t = \exp(t\Upsilon)$ les premières dérivées de A_t sont données par :

$$\dot{A} = -\mathrm{d}^{A_t}\upsilon^\sharp$$

$$\ddot{A} = -[\upsilon^\sharp, \mathrm{d}^{A_t}\upsilon^\sharp]$$

Considérons maintenant une isotopie de jauge Λ_t. La dérivée première de A_t est donnée, tel que plus haut, par :

$$\dot{A}_t = -\mathrm{d}^{A_t}\upsilon_t^\sharp$$

Mais alors, à quoi ressemble la dérivée seconde ?

Proposition : $\ddot{A}_t = -\mathrm{d}^{A_t}\dot{\upsilon}_t^\sharp - [\upsilon_t^\sharp, \mathrm{d}^{A_t}\upsilon_t^\sharp]$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned} \ddot{A} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{A}_t \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\mathrm{d}^{A_t}\upsilon_t^\sharp) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\mathrm{d}\upsilon_t^\sharp + [\upsilon_t^\sharp, A_t]) \\ &= -\mathrm{d}\dot{\upsilon}_t^\sharp + [\dot{\upsilon}_t^\sharp, A_t] + [\upsilon_t^\sharp, \dot{A}_t] \\ &= -\mathrm{d}^{A_t}\dot{\upsilon}_t^\sharp - [\upsilon_t^\sharp, \mathrm{d}^{A_t}\upsilon_t^\sharp] \end{aligned}$$

□

Remarque : Le terme $[\upsilon_t^\sharp, \mathrm{d}^{A_t}\upsilon_t^\sharp]$ apparaît dans l'équation de YMH. La question se pose alors : pourrions-nous construire une théorie de YMH dépendante du temps impliquant le terme $-\mathrm{d}^{A_t}\dot{\upsilon}_t^\sharp$?

15.7 Dérivées d'ordre supérieur de A_t pour une isotopie de jauge A_t :

Proposition : Soit Λ_t une isotopie de jauge. Alors les dérivées d'ordre supérieur de A_t sont données pour tout $k \geq 0$ par :

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}t^{k+1}} A_t = -\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \upsilon_t^\sharp\right) + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left[\frac{\mathrm{d}^{k-j}}{\mathrm{d}t^{k-j}} \upsilon_t^\sharp, \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} A_t\right]$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}t^{k+1}} A_t &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \dot{A}_t \\
&= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} (-\mathrm{d}\upsilon_t^\sharp + [\upsilon_t^\sharp, A_t]) \\
&= -\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \upsilon_t^\sharp\right) + \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left[\frac{\mathrm{d}^{k-j}}{\mathrm{d}t^{k-j}} \upsilon_t^\sharp, \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} A_t\right] \\
&= -\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \upsilon_t^\sharp\right) + \left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \upsilon_t^\sharp, A_t\right] + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \left[\frac{\mathrm{d}^{k-j}}{\mathrm{d}t^{k-j}} \upsilon_t^\sharp, \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} A_t\right] \\
&= -\mathrm{d}^{A_t}\left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \upsilon_t^\sharp\right) + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \left[\frac{\mathrm{d}^{k-j}}{\mathrm{d}t^{k-j}} \upsilon_t^\sharp, \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} A_t\right]
\end{aligned}$$

□

Remarque : On voir alors que $A_t^{(k+1)}$ contient plein de termes de dérivées d'ordre inférieur. Éventuellement écrire une formule explicite par substitution pour avoir $A_t^{(k+1)}$ indépendamment des dérivées d'ordre inférieur.

15.8 Une autre identité :

On a vu que $A^\Lambda = A + (\theta_\Lambda)_{\mathrm{hor}(A)}$ (toujours avec l'action à gauche de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$). Puisque $A \circ h^A = 0$, on trouve alors :

$$(A^\Lambda)_{\mathrm{hor}(A)} = (\theta_\Lambda)_{\mathrm{hor}(A)}$$

De manière générale, pour deux connexions A et $\tilde{A}$, que vaut $(\tilde{A})_{\mathrm{hor}(A)}$?

Proposition : $\tilde{A} \circ h^A = \tilde{A} - A$

Preuve : Pour $X_a \in T_aP$, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
(\tilde{A} \circ h^A)(X_a) &= \tilde{A}(X_a - v^A X_a) \\
&= \tilde{A}(X_a) - \tilde{A}(v^A X_a) \\
&= \tilde{A}(X_a) - \tilde{A}((\Phi_*|_e)(A(X_a))) \\
&= \tilde{A}(X_a) - A(X_a) \\
&= (\tilde{A} - A)X_a
\end{aligned}$$

□

Remarque : La forme basique $\tau^\sharp = \tilde{A} - A$ qui relie deux connexions $\tilde{A} - A$ est donc la composante horizontale de $\tilde{A}$ par rapport à la distribution horizontale de A.

16 Connexions réductibles et irréductibles :

16.1 Introduction :

Le but de cette section est de formaliser certains résultats portant sur ce qu'on appelle des connexions *réductibles* et *irréductibles*. Une telle étude est nécessaire avant de passer aux espaces de modules de connexions (qu'elles soient ASD, plates, etc.)

16.2 Trois définitions :

Il existe trois définitions non équivalentes de connexions irréductibles. Il n'y en a qu'une seule qui m'importera pour la suite, la troisième. Avant de poser les trois définitions, soient :

- V un espace vectoriel et $G < \mathrm{GL}(V)$ un groupe de Lie matriciel agissant sur V de manière irréductible, i.e. ne laissant aucun sous-espace invariant en V.
- $\pi : P \to B$ un G-fibré principal sur une variété connexe B.
- $x_0 \in B$, $p_0 \in P_{x_0} := \pi^{-1}(x_0)$.
- $A \in \mathcal{A}$.
- $\Omega(B, x_0) := \{\gamma : [0,1] \to B | \gamma(0) = \gamma(1) = x_0, \gamma \text{ différentiable par morceaux}\}$.

Posons ensuite :

- $Q := \{p \in P | \exists\tilde{\gamma} : [0,1] \to P, \text{ vérifiant (1), (2), (3) et (4)}\}$ où :
  (1) $\tilde{\gamma}(0) = p_0$
  (2) $\tilde{\gamma}(1) = p$
  (3) $\tilde{\gamma}$ différentiable par morceaux
  (4) $\tilde{\gamma}$ horizontale pour A.
- $\mathrm{Aut}(P_{x_0}) \cong G$ le groupe d'automorphismes de la fibre P_{x_0}.
- $\mathrm{Hol}_{A,x_0} : \Omega(B, x_0) \to \mathrm{Aut}(P_{x_0})$ défini en un lacet $\gamma \in \Omega(B, x_0)$ par l'holonomie de γ pour A, i.e. par l'unique élément $\varphi \in \mathrm{Aut}(P_{x_0})$ pour lequel $\varphi(\tilde{\gamma}(0)) = \tilde{\gamma}(1)$ où $\tilde{\gamma}$ est un relevé horizontal de γ.
- $H := \mathrm{Hol}_{A,x_0}(\Omega(B, x_0)) < \mathrm{Aut}(P_{x_0})$ le groupe d'holonomie basé en x_0, ce

qui peut être vu comme sous-groupe de G.

Remarque : $Q \to B$ est généralement un H-fibré principal qui est une réduction structurelle de $P \to B$ pourvu que Q ne soit pas dense en P (car une sous-variété dense n'est pas une sous-variété).

Définition : (version 1, [DK] p.131-132) : A est dit *réductible* si H repose dans un sous-groupe propre de G.

Définition : (version 2, [KN-I] p.83-84)) : A est dit *réductible* à Q si la distribution horizontale $\ker(A)$ repose en TQ.

Définition : (version 3) : A est dit *réductible* si si $H < G < \mathrm{GL}(V)$ agit de manière réductible sur V, i.e. s'il laisse un sous-espace $W < V$ invariant.

Remarque : Ici, [DK] est « Donaldson-Kronheimer, The geometry of Four-manifolds », [KN-I] est « Kobayashi-Nomizu, vol. I ».

16.3 Discussion sur la première définition :

La première définition m'est inutile. En effet, si A est plat, alors H est l'image du $\pi_1(B, x_0)$ en G. Mais $\pi_1(B, x_0)$ est dénombrable, donc H est dénombrable. Pour $G = \mathrm{SU}(2)$, qui n'est pas dénombrable, on a alors H qui est un sous-groupe propre de G. Comme H est inclus dans lui-même, il suit que A est réductible. Puisque A était une connexion plate quelconque, il suit que toute connexion plate est réductible. Ce qui n'est pas pertinent en théorie de jauge (où il est question de connexions plates irréductibles).

16.4 Discussion sur la seconde définition :

La seconde définition m'est inutile. En effet, d'une part, $\ker(A)$ repose toujours en TQ. D'autre part, Q est supposé être une sous-variété de P (pour être une $H < G$ réduction structurelle du G-fibré $P \to M$). Mais si H est dense en G, alors Q est une sous-variété dense en P. Puisqu'une sous-variété dense n'est pas une sous-variété, il suit que Q n'est pas une réduction structurelle de P (à moins qu'on élargisse la définition de réduction structurelle). Bref, dans cette définition, on a pour A plat :

- Si $H = G$, alors A est irréductible.
- Si H est dense et propre en G, alors A est irréductible.
- Si H est fermé en G, alors A est réductible.

En effet, il est possible d'avoir H propre et dense en G. Par exemple, si $G = \mathrm{SU}(2)$ et $B = \Sigma$ une surface fermée de genre 2 t.q. $\pi_1(\Sigma) = \langle a, b, a', b' | [a, b] \cdot [a', b'] = 1 \rangle$, alors je peux envoyer a, a' à $1 \in \mathrm{SU}(2)$ et b, b' à deux générateurs qui engendrent un sous-groupe propre et dense en $\mathrm{SU}(2)$. Bref, ce n'est pas encore la définition qu'il me faut.

Aussi, avoir H fermé en G implique ici A réductible, ce que je ne veux pas forcément. Par exemple, si A est plate sur la 3-sphère d'homologie entière de Poincaré Y (sur laquelle repose un $\mathrm{SU}(2)$-fibré forcément trivial), dont le $\pi_1(Y) = 2I$ le groupe binaire icosaédral, je peux prendre $H = 2I$. Ici, $H = 2I$ est un groupe fermé en $G = \mathrm{SU}(2)$, mais A devrait être irréductible.

16.5 Discussion sur la troisième définition :

Soit A plat. Alors H est un sous-groupe propre et dénombrable en G. On aura A irréductible si et seulement si H agit de manière irréductible sur V. C'est la définition qu'il me faut. À partir d'ici, lorsque je parlerai de connexions irréductibles ou irréductibles, il sera alors question de la troisième définition.

Notation : $\mathcal{A}^* := \{A \in \mathcal{A} | A \text{ est irréductible}\}$.

Remarque : À partir d'ici je ne développerai que pour $G = \mathrm{SU}(2)$. Les preuves seront à généraliser éventuellement à d'autres groupes de Lie gentils (compact, connexe, semi-simple, etc.).

16.6 Propriétés des connexions irréductibles et réductibles :

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}$ et $H < G = \mathrm{SU}(2)$ son groupe d'holonomie. Alors A est réductible si et seulement si H repose dans un tore maximal $T = \mathrm{U}(1)$ en $\mathrm{SU}(2)$.

Preuve : A est réductible ssi H agit de manière réductible sur $\mathbb{C}^2$ ssi H laisse invariant au moins une droite complexe $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}^2$ ssi H est inclus dans un tore $U(1)$ en $\mathrm{SU}(2)$. □

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}$ et $H < G = \mathrm{SU}(2)$ son groupe d'holonomie. Alors A est irréductible si et seulement si $C_G(H) = Z(G)$ (ici $C_G(H)$ est le centralisateur de H en G et $Z(G)$ est le centre de G).

Preuve : A est irréductible ssi H n'est pas inclus dans un tore maximal (par la dernière proposition) ssi $C_G(H) = \{-1, 1\} = Z(G)$. □

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}$ et $H < G = \mathrm{SU}(2)$ son groupe d'holonomie. Soit $\mathcal{G}_A$ le stabilisateur de A en $\mathcal{G}$ (soit pour l'action à gauche soit pour l'action à droite). Alors :

$$\mathcal{G}_A = C_G(H)$$

où la correspondance est donnée explicitement par :

$$\Lambda \mapsto \lambda^\sharp(p_p)$$

pour $p_0 \in P_{x_0}$ quelconque fixé.

Preuve : (C'est le lemme 4.2.8 à p.132 de [DK], mais la preuve n'y est pas, faisons-la). Il suffit de faire la preuve pour l'action à gauche $A^\Lambda := \Lambda \cdot A = (\Lambda^{-1})^* A$ de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$.

($\Rightarrow$) : Soit $\Lambda \in \mathcal{G}_A$. À Λ correspond $\lambda^\sharp \in C^\infty_\iota(P; G)$. On sait que :

$$A^\Lambda = A - (\mathrm{d}^A \lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1}$$

Puisque $\Lambda \in \mathcal{G}_A$, alors $A^\Lambda = A$. Ceci implique $(\mathrm{d}^A \lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1} = 0$. Ceci implique $\mathrm{d}^A \lambda^\sharp = 0$. Ceci implique que λ est covariante constante. Ainsi, si je prend un chemin horizontal en P qui va de $p_0 \in P_{x_0}$ à $p \in P_{x_0}$, il suit que :

$$\lambda^\sharp(p_0) = \lambda^\sharp(p)$$

Mais ce lacet horizontal de p_0 à $p \in P_{x_0}$ correspond à un élément $h \in H$ le groupe d'holonomie basé en x_0. Donc :

$$\lambda^\sharp(p_0) = \lambda^\sharp(p_0 \cdot h)$$

Mais par ι-équivariance de $\lambda^\sharp$ le long de la fibre P_{x_0}, on trouve alors que :

$$\lambda^\sharp(p_0) = \lambda^\sharp(p_0 \cdot h) = \iota_{h^{-1}}\lambda^\sharp(p_0)$$

i.e. :

$$\lambda^\sharp(p_0) = h^{-1}\lambda^\sharp(p_0)h$$

i.e. :

$$h\lambda^\sharp(p_0) = \lambda^\sharp(p_0)h$$

Mais h est un élément quelconque du groupe d'holonomie H. Donc $\lambda^\sharp(p_0)$ repose en $C_G(H)$. Maintenant, $\lambda^\sharp(p_0)$ est déterminé de manière unique, par ι-équivariance, le long de la fibre P_{x_0}. Ensuite, il est déterminé de manière unique sur tout P car la dérivée de $\lambda^\sharp$ est nulle dans toute direction horizontale. D'où : à $\Lambda \in \mathcal{G}_A$ correspond un unique élément en $C_G(H)$ donné par $\lambda^\sharp(p_0)$.

($\Leftarrow$) : Posons $\lambda^\sharp(p_0) \in C_G(H)$ pour p_0 un point quelconque de P_{x_0}. Alors $\lambda^\sharp$ est déterminé de manière unique le long de la fibre P_{x_0} par ι-équivariance. Fixons $A \in \mathcal{A}$. Prenons λ déterminé globalement sur P de telle sorte que $\lambda^\sharp$ soit covariante constante, i.e. $\mathrm{d}^A\lambda^\sharp = 0$. Alors la formule

$$A^\Lambda = (\Lambda^{-1})^*A = A - (\mathrm{d}^A\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1}$$

implique directement que $A^\Lambda = A$ (ici Λ correspond à $\lambda^\sharp$). D'où $\Lambda \in \mathcal{G}_A$. $\square$

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}$ et $H < G = \mathrm{SU}(2)$ son groupe d'holonomie. Alors A est irréductible si et seulement si $\mathcal{G}_A = \{-1, 1\}$.

Preuve : A est irréductible ssi $C_G(H) = Z(G)$ (par la proposition plus haut) ssi $\mathcal{G}_A = Z(G)$ (par la proposition plus haut). Mais $Z(G) = Z(\mathrm{SU}(2)) = \{-1, 1\}$. $\square$

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}$ et $H < G = \mathrm{SU}(2)$ son groupe d'holonomie. Alors A est irréductible si et seulement si :

$$\ker\Big(\mathrm{d}_A : \Omega^0(M;\mathrm{Ad}P) \to \Omega^1(M;\mathrm{Ad}P)\Big) = \{0\}$$

Preuve : $(\Rightarrow)$: Supposons A irréductible. Soit $\upsilon \in \Omega^0(M;\mathrm{Ad}P)$ quelconque tel que $\mathrm{d}_A\upsilon = 0$. Je veux montrer que υ est forcément nul. À υ correspond $\Upsilon \in \mathfrak{G} = \mathrm{Lie}(\mathcal{G})$. Il vérifie (pour l'action à gauche de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$) :

$$\Upsilon^*|_A = -\mathrm{d}^A\upsilon^\sharp$$

Mais $\mathrm{d}_A\upsilon = 0$ implique donc :

$$\Upsilon^*|_A = 0$$

Puisque $\Upsilon^*|_A$ est nul, ceci implique que Υ est dans l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_A)$ du stabilisateur $\mathcal{G}_A$ de A en $\mathcal{G}$, i.e. :

$$\Upsilon \in \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_A)$$

Mais A est irréductible implique $\mathcal{G}_A = \{-1, 1\}$. Ceci implique $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_A) = \{0\}$. Ceci implique $\Upsilon = 0$. Ceci implique $\upsilon = 0$. Ce que l'on voulait démontrer.

$(\Leftarrow)$: Supposons

$$\mathrm{d}_A : \Omega^0(M;\mathrm{Ad}P) - > \Omega^1(M;\mathrm{Ad}P)$$

injective. On veut montrer que A est irréductible. Il suffit de montrer que $\mathcal{G}_A = \{-1, 1\}$. Puisque $\mathcal{G}_A = C_G(H)$, et qu'en $\mathrm{SU}(2)$ les seuls $C_G(H)$ possibles sont $\{-1, 1\}, \mathrm{U}(1), \mathrm{SU}(2)$, il suit que les seules possibilités pour $\mathcal{G}_A$ sont aussi $\{-1, 1\}$, $\mathrm{U}(1)$ ou $\mathrm{SU}(2)$. Pour montrer que $\mathcal{G}_A = \{-1, 1\}$, il suffit donc de montrer que $\mathcal{G}_A$ n'est ni $\mathrm{U}(1)$, ni $\mathrm{SU}(2)$. Si $\mathcal{G}_A$ est $\mathrm{U}(1)$ ou $\mathrm{SU}(2)$, alors il existe un $\Upsilon \in \mathfrak{G}$ non nul tel que

$$A^{\exp(t\Upsilon)} = A$$

pour $t \in]-1, 1[$. La version infinitésimale de ceci revient à dire qu'il existe un υ non nul tel que

$$\mathrm{d}_A\upsilon = 0$$

Ceci contredit le fait que d_A est injective sur $\Omega^0(M;\mathrm{Ad}P)$. D'où A irréductible. □

Remarque : Plus bas il sera question de la codifférentielle covariante extérieure $\delta_A : \Omega^k \to \Omega^{k-1}$ construite à partir de l'opérateur de Hodge $\star : \Omega^k \to \Omega^{n-k}$, un isomorphisme. À signe près on aura $\delta_A = \pm \star \mathrm{d}_A \star$. Puisque $\star$ est un isomorphisme, il suit que si A est une connexion irréductible, alors $\delta_A : \Omega^n(M;\mathrm{Ad}P) \to \Omega^{n-1}(M;\mathrm{Ad}P)$ est injective, du moins pour $G = \mathrm{SU}(2)$.

16.7 Groupe de jauge restreint :

On a vu que pour A une connexion $\mathrm{SU}(2)$ irréductible, le stabilisateur de A en $\mathcal{G}$ est $\mathcal{G}_A = \{-1, 1\}$. Donc, $\mathcal{G}$ n'agit pas exactement librement sur $\mathcal{A}^*$ mais presque. Il y a une manière d'avoir une action libre sur $\mathcal{A}^*$. C'est de se restreindre à l'action du groupe de jauge restreint sur $\mathcal{A}^*$.

Définition : Fixons $x_0 \in B$. Alors le *groupe de jauge restreint* est par définition :

$$\mathcal{G}_{x_0} := \{\Lambda \in \mathcal{G} | \lambda(x_0) = 1 \in \mathrm{SU}(2)\}$$

Remarque : Puisque B est supposée connexe, l'élément $-1 \in \mathrm{SU}(2)$ est exclus de $\mathcal{G}_{x_0}$. Ainsi, $\mathcal{G}_{x_0}$ agit de manière libre sur $\mathcal{A}^*$.

Remarque : Le groupe de jauge restreint est aussi nommé *groupe de jauge pointé*.

Définition : L'*espace de module étendu de connexions irréductibles* est par définition :

$$\mathcal{M}^*_{x_0} := \mathcal{A}^*/\mathcal{G}_{x_0}$$

Remarque : Puisque $\mathcal{G}/\mathcal{G}_{x_0} \cong G$, il suit qu'on a une G-fibration :

$$G \hookrightarrow \mathcal{M}^*_{x_0} \to \mathcal{M}^*$$

où $\mathcal{M}^* := \mathcal{A}^*/\mathcal{G}$ est l'espace de module de connexions irréductibles usuel.

17 Fibré des repères :

17.1 Introduction :

Le but de cette section est d'établir les résultats principaux concernant les *fibrés des repères*. Ici, par *fibré des repères* on entend le *fibré des repères linéaires tangents* sur une variété lisse M.

17.2 Le fibré des repères :

Soit M une variété lisse réelle de dimension n. La variété M possède un fibré canonique, le fibré tangent TM. Elle vient aussi avec un autre fibré canonique, le fibré des repères linéaires tangents $\mathrm{Fr}(M)$.

Définition : Le *fibré des repères* linéaires tangents :

$$\pi : \mathrm{Fr}(M) \to M$$

est défini point par point par :

$$\mathrm{Fr}(M)|_x = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n; T_xM)$$

Par simplicité, écrivons $\mathrm{Fr}(M)$. C'est un $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$-fibré principal par la droite. Plus précisément, l'action de groupe :

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) & \to & \mathrm{Diff}(\mathrm{Fr}(M)) \\ g & \mapsto & \Phi_g \end{array}$$

est définie en tout $f \in \mathrm{Fr}(M)$ par :

$$\Phi_g(f) = f \circ g$$

Remarque : La représentation canonique $\rho_0 : \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ est $\rho_0(g)(v) = gv$. La représentation canonique duale $\rho_0^* : \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}((\mathbb{R}^n)^*)$ est $\rho_0(g)(\alpha) = \alpha \circ g^{-1}$ Le fibré tangent TM est un fibré associé au fibré des repères linéaires tangents :

$$TM = \mathrm{Fr}(M) \times_{\rho_0} \mathbb{R}^n$$

Le fibré cotangent T^*M est aussi un fibré associé au fibré des repères linéaires tangents :

$$T^*M = \mathrm{Fr}(M) \times_{\rho_0^*} (\mathbb{R}^n)^*$$

Proposition : La relation entre $v \in T_xM$ et $v^\sharp : \mathrm{Fr}_x(M) \to \mathbb{R}^n$ est :

$$v^\sharp|_f = f^{-1}(v)$$

De même, la relation entre $\alpha \in T_x^*M$ et $\alpha^\sharp : \mathrm{Fr}_x(M) \to (\mathbb{R}^n)^*$ est :

$$\alpha^\sharp|_f = \alpha \circ f$$

Preuve : On regarde l'équivariance pour $g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} (\Phi_g^* v^\sharp)|_f & = & v^\sharp|_{\Phi_g(f)} \\ & = & v^\sharp|_{f\circ g} \\ & = & (f \circ g)^{-1}(v) \\ & = & g^{-1} \circ f^{-1}(v) \\ & = & \rho_0(g)^{-1} \circ v^\sharp|_f \end{array}$$

C'est la même chose pour α. □

Remarque : Si on fixe $f \in \mathrm{Fr}_x(M) = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n; T_xM)$, tout élément $g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ induit un automorphisme de T_xM par :

$$f \circ g \circ f^{-1} \in \mathrm{Aut}(T_xM)$$

Mais cette $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$-action de groupe sur T_xM dépend du choix de f. En effet, pour $f_1, f_2 \in \mathrm{Fr}_x(M)$ tels que $f_2 = f_1 \circ g_2$, $g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, on a :

$$f_2 \circ g_1 \circ f_2^{-1} = f_1 \circ (\iota_{g_2} g_1) f_1^{-1}$$

où $\iota_{g_2} g_1 = g_2 g_1 g_2^{-1}$.

Remarque : Si on fixe $f \in \mathrm{Fr}_x(M) = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n; T_xM)$, tout élément $\xi \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}) = \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ induit un endomorphisme de T_xM par :

$$f \circ \xi \circ f^{-1} \in \mathrm{Aut}(T_xM)$$

Mais cette $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$-action sur T_xM dépend du choix de f. En effet, pour $f_1, f_2 \in \mathrm{Fr}_x(M)$ tels que $f_2 = f_1 \circ g$, $g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, on a :

$$f_2 \circ \xi \circ f_2^{-1} = f_1 \circ (\mathrm{Ad}_g \xi) f_1^{-1}$$

où $\mathrm{Ad}_g \xi = g \xi g^{-1}$.

17.3 Forme de soudure :

Définition : La *1-forme de soudure* $\vartheta^\sharp \in \Omega^1(\mathrm{Fr}(M);\mathbb{R}^n)$ sur $\mathrm{Fr}(M)$ est définie en tout point $f \in \mathrm{Fr}(M)$ par :

$$\vartheta^\sharp|_f := f^{-1} \circ \pi_* : T\mathrm{Fr}(M) \to \mathbb{R}^n$$

Remarque : Il ne faut pas confondre la forme de soudure $\vartheta^\sharp$ et la 1-forme de Maurer-Cartan θ sur G.

Proposition : La 1-forme de soudure $\vartheta^\sharp$ est basique et descend donc à une 1-forme sur M à valeurs en TM :

$$\vartheta \in \Omega^1(M;TM)$$

Preuve : La 1-forme $\vartheta^\sharp$ est horizontale car π_* tue les vecteurs verticaux sur $\mathrm{Fr}(M)$. La 1-forme $\vartheta^\sharp$ est ρ_0-équivariante car pour tout $g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ on a :

$$\begin{aligned}
((\Phi_g)^*\vartheta^\sharp)|_f &= \vartheta^\sharp|_{\Phi_g(f)} \circ (\Phi_g)_* \\
&= \vartheta^\sharp|_{f\circ g} \circ (\Phi_g)_* \\
&= (f\circ g)^{-1} \circ \pi_* \circ (\Phi_g)_* \\
&= (f\circ g)^{-1} \circ (\pi \circ \Phi_g)_* \\
&= g^{-1} \circ f^{-1} \circ \pi_* \\
&= g^{-1} \circ \vartheta|_f \\
&= \rho_0(g)^{-1} \circ \vartheta|_f
\end{aligned}$$

Ainsi $\vartheta^\sharp$ est horizontale et ρ_0-équivariante. Elle est donc basique et descend à $\vartheta \in \Omega^1(M;TM)$. □

Remarque : Pour une section trivialisante locale $f_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$, on a :

$$\begin{aligned}
v_\alpha &= f_\alpha^* v^\sharp \\
&= v^\sharp \circ f_\alpha \\
&= f_\alpha^{-1}(v)
\end{aligned}$$

C'est-à-dire, $v_\alpha = f_\alpha^{-1}(v)$. En particulier, $v = f_\alpha(v_\alpha)$. C'est ainsi que f_α relie $\mathbb{R}^n$ et TM.

Proposition : La 1-forme de soudure $\vartheta \in \Omega^1(M;TM)$ est égale à l'identité id_{TM}.

Preuve : (preuve 1) : Pour montrer que $\vartheta \in \Omega^1(M;TM)$ est l'identité, il suffit de montrer que c'est vrai en trivialisation locale. On considère une section locale $f_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$. On calcule d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \vartheta_\alpha & = & f_\alpha^* \vartheta^\sharp \\ & = & \vartheta^\sharp|_{f_\alpha} \circ (f_\alpha)_* \\ & = & f_\alpha^{-1} \circ \pi_* \circ (f_\alpha)_* \\ & = & f_\alpha^{-1} \circ (\pi \circ f_\alpha)_* \\ & = & f_\alpha^{-1} \circ (\mathrm{id}_M)_* \\ & = & f_\alpha^{-1} \end{array}$$

On a alors $\vartheta_\alpha = f_\alpha^{-1} : TM \to \mathbb{R}^n$. Ensuite, tout comme $v = f_\alpha(v_\alpha)$, on a $\theta = f_\alpha(\theta_\alpha)$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \theta & = & f_\alpha(\theta_\alpha) \\ & = & f_\alpha \circ f_\alpha^{-1} \\ & = & \mathrm{id}_{TM} \end{array}$$

□

Preuve : (preuve 2) : Voici une preuve plus rapide en une seule étape. On considère une section trivialisante locale $f_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \vartheta & = & f_\alpha(\vartheta_\alpha) \\ & = & f_\alpha(f_\alpha^* \vartheta^\sharp) \\ & = & f_\alpha(\vartheta^\sharp|_{f_\alpha} \circ (f_\alpha)_*) \\ & = & f_\alpha(f_\alpha^{-1} \circ \pi_* \circ (f_\alpha)_*) \\ & = & (\pi \circ f_\alpha)_* \\ & = & (\mathrm{id}_M)_* \\ & = & \mathrm{id}_{TM} \end{array}$$

□

Remarque : À tout fibré vectoriel $E \to M$ sur M on peut associer un fibré des repères $\mathrm{Fr}(E)$. Si E a des fibres type $\mathbb{R}^m$ on a $\mathrm{Fr}(E)|_x = \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^m; E_x)$.

Ainsi, $\mathrm{Fr}(E)$ est un $\mathrm{GL}(m;\mathbb{R})$-fibré principal. Ça généralise $\mathrm{Fr}(M) = \mathrm{Fr}(TM)$. Sur chaque fibré des repères $\mathrm{Fr}(E)$ repose une forme de soudure ϑ. La construction est la même. Elle est donnée par $\vartheta^\sharp|_f := f^{-1} \circ \pi_* : T\mathrm{Fr}(E) \to \mathbb{R}^m$ qui est basique et descend à $\vartheta \in \Omega^1(M;E)$.

17.4 Connexion de Cartan :

Donnons-nous un fibré $E \to M$ de fibre type $\mathbb{R}^m$. Il lui correspond un fibré des repères $\mathrm{Fr}(E) \to M$. Sur $\mathrm{Fr}(E)$ repose une forme de soudure $\vartheta^\sharp \in \Omega^1(\mathrm{Fr}(E);\mathbb{R}^m)$. Donnons à $\mathrm{Fr}(E)$ une 1-forme de connexion $\omega \in \Omega^1(\mathrm{Fr}(E);\mathfrak{gl}(m;\mathbb{R}))$. Alors la paire (ω,ϑ) peut être vue comme étant :

$$\omega \oplus \vartheta : T\mathrm{Fr}(E) \to \mathfrak{gl}(m;\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^m$$

Maintenant, on pose le produit semi-direct :

$$G := \mathrm{GL}(m;\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^m$$

Ainsi, $\mathrm{GL}(m;\mathbb{R})$ est un sous-groupe de G qui agit, en tant que sous-groupe, sur G. On pose ce G-fibré principal :

$$P := \mathrm{Fr}(E) \times_H G$$

Alors la paire (ω,ϑ) sur $\mathrm{Fr}(E)$ induit une 1-forme de connexion α sur P. On dit que α est une *connexion de Cartan*.

Il y a plusieurs manières de définir une connexion de Cartan. Voir wiki. L'idée est que c'est un mélange entre une connexion et une forme de soudure. Et c'est utile pour les réductions structurelles, et donc pour les théories d'unifications entre la théorie de jauge et la gravitation.

17.5 Fibré adjoint du fibré des repères :

L'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ est $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}) = \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Soit $\rho_0 : \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$ la représentation canonique de $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ donnée par $\rho_0(g)(v) = g \circ v$.

$$\rho_0(g)(v) = gv \qquad \forall g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}),\ \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Soit $\rho_0^* : \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}((\mathbb{R}^n)^*)$ la représentation canonique duale de $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ sur $(\mathbb{R}^n)^*$ donnée par :

$$\rho_0^*(g)(\alpha) = \alpha \circ g^{-1} \qquad \forall g \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{R}^n)$$

Les deux représentations ρ_0 et ρ_0^* se tensorisent à :

$$\rho_0 \otimes \rho_0^* : \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*) = \mathrm{Aut}(\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}))$$

En particulier, il est aisé de voir que cette dernière représentation n'est rien d'autre que la représentation adjointe :

$$\mathrm{Ad} = \rho_0 \otimes \rho_0^* : \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}))$$

Considérons M une variété lisse réelle de dimension n et $\mathrm{Fr}(M)$ son fibré des repères. Alors on pose le fibré adjoint :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{AdFr}(M) & := & \mathrm{Fr}(M) \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R}) \\ & = & \mathrm{Fr}(M) \times_{\rho_0 \otimes \rho_0^*} (\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*) \\ & = & (\mathrm{Fr}(M) \times_{\rho_0} \mathbb{R}^n) \otimes (\mathrm{Fr}(M) \times_{\rho_0^*} (\mathbb{R}^n)^*) \\ & = & TM \otimes T^*M \end{array}$$

On remarque alors qu'il y a un appariement naturel :

$$\mathrm{AdFr}(M) \times TM \to TM$$

défini fibre par fibre par l'évaluation. En particulier, en fixant un vecteur $v \in T_xM$, on obtient une application linéaire canonique :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{AdFr}_x(M) & \to & T_xM \\ \xi & \mapsto & \xi(v) \end{array}$$

Exemple : On se donne une 5-variété M^4 et une réduction structurelle $\mathrm{Fr}^{\mathrm{O}(1,4)}(M)$ ainsi qu'un champ vectoriel partout non nul $v \in \mathfrak{X}(M)$. Le champ vectoriel v détermine un fibré "vertical" $V = \mathbb{R}\langle v \rangle$ et un fibré "horizontal" $H = V^\perp$ de sorte que :

$$TM = V \oplus H$$

On a :

$$\mathrm{AdFr}^{\mathrm{O}(1,4)}(M) = \mathrm{Fr}^{\mathrm{O}(1,4)}(M) \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{so}(1,4) \subset TM \otimes T^*M$$

Le champ vectoriel v détermine alors une application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{AdFr}^{\mathrm{O}(1,4)}(M) & \to & TM \\ \xi & \mapsto & \xi(v) \end{array}$$

Point par point, le noyau de l'application est $\mathfrak{so}(1,3) < \mathfrak{so}(1,4)$ et l'image est isomorphe à $\mathbb{R}^4 = \mathfrak{so}(1,4)/\mathfrak{so}(1,3)$. En particulier, puisque le split :

$$\mathfrak{so}(1,4) = \mathfrak{so}(1,3) \oplus \mathbb{R}^4$$

est Ad-invariant, on a un split de fibré :

$$\mathrm{AdFr}^{\mathrm{O}(1,4)}(M) = E_1 \oplus E_2$$

où E_1 est un $\mathfrak{so}(1,3)$-fibré et où E_2 est un $(\mathbb{R}^4 = \mathfrak{so}(1,4)/\mathfrak{so}(1,3))$-fibré. Comme le noyau de l'application $\mathrm{AdFr}^{\mathrm{O}(1,4)}(M) \to TM$ est E_1 et que l'image est $H < TM$, on a un isomorphisme :

$$E_2 \to H$$

Bref, le champ vectoriel $v \in \mathfrak{X}(M)$ détermine l'isomorphisme. Cet isomorphisme semble être relié aux histoires de "coframe" dont parle (D. K. Wise, 2007) dans sa thèse. Ensuite avec $\Phi : (\mathbb{R}, +) \to \mathrm{Diff}(M)$ le flot de v et $\tilde{M}^4 = M/\mathbb{R}$ on a $v = \partial_\lambda^* \in \mathfrak{X}(M)$ qui est un champ vectoriel fondamental. Une section "locale" $s_\alpha : \tilde{M} \to M$ détermine un isomorphisme $T\tilde{M} \cong H$. C'est ainsi qu'on a un isomorphisme $E_2 \cong T\tilde{M}$.

17.6 Réduction structurelle du fibré des repères :

Une réduction structurelle du fibré des repères est un G-fibré principal :

$$\mathrm{Fr}^G(M) \subset \mathrm{Fr}(M)$$

où $G < GL(n;\mathbb{R})$. Ainsi de suite, on peut considérer plusieurs réductions :

$$\mathrm{Fr}^H(M) \subset \mathrm{Fr}^G(M)$$

pour $H < G$. En un point $x \in M$ donné, il y a autant de manières d'injecter $\mathrm{Fr}_x^H(M)$ en $\mathrm{Fr}_x^G(M)$ qu'il y a de monomorphismes de H à G. Ce faisant, en un point x donné, il y a G/H manières de réduire de G à H. En particulier, $\mathrm{Fr}^G(M)/H$ est un (G/H)-fibré sur M dont les sections correspondent aux réductions possibles.

17.7 Connexion de Cartan et réduction structurelle :

Écrivons Fr^G et Fr^H au lieu de $\mathrm{Fr}^G(M)$ et $\mathrm{Fr}^H(M)$. Supposons qu'on ait un split $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ qui est $\mathrm{Ad}(H)$-invariant. Donnons à Fr^G une connexion A. Donnons-nous une réduction structurelle $\mathrm{Fr}^H \subset \mathrm{Fr}^G$. La connexion :

$$A : T\mathrm{Fr}^G \to \mathfrak{g}$$

se décompose en somme $A = A_1 + A_2$ où :

$$A_1 : T\mathrm{Fr}^G \to \mathfrak{h}$$

$$A_2 : T\mathrm{Fr}^G \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

On peut restreindre $A = A_1 + A_2$ au tangent de $\mathrm{Fr}^H \subset \mathrm{Fr}^G$ et ça donne $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ où :

$$\alpha : \mathrm{Fr}^H \to \mathfrak{g}$$

$$\alpha_1 : \mathrm{Fr}^H \to \mathfrak{h}$$

$$\alpha_2 : \mathrm{Fr}^H \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

Proposition : α_1 est une forme de connexion sur Fr^H et α_2 est basique sur Fr^H.

Preuve : Le fait que α_1 soit Ad-équivariant découle du fait que A est Ad-équivariant. Le fait que $\alpha_1(\xi^*) = \xi$, $\forall \xi \in \mathfrak{h}$, découle du fait que $A(\xi^*) = \xi$, $\forall \xi \in \mathfrak{g}$. D'où α_1 est une forme de connexion. Ensuite, α_2 est Ad-équivariant car A est Ad-équivariant. Enfin, α_2 est horizontale car pour tout $\xi \in \mathfrak{h}$ on a :

$$\begin{aligned}
& \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \\
\implies \quad & \alpha(\xi^*) = \alpha_1(\xi^*) + \alpha_2(\xi^*) \\
\implies \quad & \xi = \xi + \alpha_2(\xi^*) \\
\implies \quad & 0 = \alpha_2(\xi^*)
\end{aligned}$$

D'où le fait que α_2 est horizontale, donc basique. □

Nommons α la "connexion de Cartan" sur Fr^H. Posons la "courbure de Cartan" $F_\alpha^\sharp := d\alpha + (1/2)[\alpha \wedge \alpha]$. Alors $F_\alpha^\sharp$ est $\mathrm{Ad}(H)$-équivariant et descend donc à $F_\alpha \in \Omega^2(M; \mathrm{Ad}^{\mathfrak{g}}\mathrm{Fr}^H(M))$

Proposition : $F_A = F_\alpha$.

Preuve : Soit $U_\mu \subset M$. Considérons une section locale quelconque $s_\mu : U_\mu \to \pi^{-1}(U_\mu)$ où $\pi^{-1}(U_\mu) \subset \mathrm{Fr}^H \subset \mathrm{Fr}^G$. Il suffit de montrer que $s_\mu^* F_A^\sharp = s_\mu^* F_\alpha^\sharp$. Soit $x \in U_\mu$ quelconque. Soient $v_1, v_2 \in T_x U_\mu$ quelconques (qui peuvent être vus comme champ vectoriels autour de x). Posons $u_1, u_2 \in T\mathrm{Fr}^H$ où $u_1 := (s_\mu)_*(v_1)$ et $u_2 := (s_\mu)_*(v_2)$ Alors :

$$\begin{aligned}
(s_\mu^* F_A^\sharp)(v_1, v_2) &= F_A^\sharp|_{s_\mu}((s_\mu)_* v_1, (s_\mu)_* v_2) \\
&= (dA + [A, A])(u_1, u_2) \\
&= (dA)(u_1, u_2) + [A(u_1), A(u_2)] \\
&= u_1 A(u_2) - u_2 A(u_1) - A([u_1, u_2]) + [A(u_1), A(u_2)] \\
&= u_1 \alpha(u_2) - u_2 \alpha(u_1) - \alpha([u_1, u_2]) + [\alpha(u_1), \alpha(u_2)] \\
&= (d\alpha)(u_1, u_2) + [\alpha, \alpha](u_1, u_2) \\
&= (d\alpha + [\alpha, \alpha])(u_1, u_2) \\
&= (F_\alpha^\sharp)(u_1, u_2) \\
&= F_\alpha^\sharp|_{s_\mu}((s_\mu)_* v_1, (s_\mu)_* v_2) \\
&= (s_\mu^* F_\alpha^\sharp)(v_1, v_2)
\end{aligned}$$

□

Proposition : $F_\alpha = F_{\alpha_1 + \alpha_2} = F_{\alpha_1} + \mathrm{d}_{\alpha_1} \alpha_2 + \frac{1}{2}[\alpha_2 \wedge \alpha_2]$.

Preuve : Calcul direct. □

Remarque : C'est un peu l'analogue de $F_{A+\tau^\sharp} = F_A + \mathrm{d}_A \tau + \frac{1}{2}[\tau \wedge \tau]$.

Deuxième partie

Théorie de Hodge

18 Théorie de Hodge :

18.1 Introduction :

Le but de cette section est de bien poser la théorie de Hodge sur une n-variété lisse orientable pseudo-riemannienne (X^n, g). C'est-à-dire, y définir l'opérateur de Hodge $\star$, le produit scalaire $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_g$ sur les k-formes différentielles et aussi y définir la codifférentielle δ. La théorie de Hodge sera utile pour définir les théories de Maxwell, Maxwell-Klein-Gordon, Yang-Mills, Yang-Mills-Higgs, Chern-Simons, etc..

Je développerai ensuite la théorie de Hodge pour une décomposition simple $X^n = X^{n-1}\times\mathbb{R}$ puis pour une décomposition double $X^n = X^{n-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Ces décompositions me serviront à relier la théorie de Yang-Mills à celle de Yang-Mills-Higgs en dimension inférieure, formalisant ainsi l'adage *les tranches d'instantons sont des monopôles magnétiques*.

18.2 Le lieu :

Soit (X^n, g) une n-variété pseudo-riemannienne lisse orientable. Donnons-nous un système de coordonnées locales $\{x^1, ..., x^n\}$ sur un ouvert $U \subset X$. Il induit une base $\{\mathrm{d}x^1, ..., \mathrm{d}x^n\}$ de T_U^*X. Sa base duale $\{\partial_1, ..., \partial_n\}$, où $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, est une base de $T_U X$. Elle est définie implicitement par $\mathrm{d}x^i(\partial_j) = \delta^i_j$ où δ^i_j est le delta Kronecker. En utilisant la notation d'Einstein, toute 1-forme $\alpha \in T_U^*X$ peut s'écrire $\alpha = \alpha_i \mathrm{d}x^i$ et tout vecteur $v \in T_U X$ peut s'écrire $v = v^i\partial_i$. En particulier, la métrique g peut localement s'écrire comme

$$g|_U = g_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

où $g_{ij} := g(\partial_i, \partial_j)$ est symétrique et inversible. On dénote par g^{ij} les coefficients de la matrice inverse $[g_{ij}]^{-1}$, i.e. $g_{ij}g^{jk} = \delta^k_i$. La matrice g^{ij} est aussi symétrique. Remarquons que $g_{ij}g^{ij} = \delta^i_i = n$. Comme $[g_{ij}]$ et $[g^{ij}]$ sont inverses l'une de l'autre, leur déterminant est l'inverse l'un de l'autre.

18.3 Musicalités riemanniennes bémol et dièse :

Définition : La *musicalité bémol-(pseudo-)riemannienne* est définie par

$$\begin{array}{rcl} {}^\flat : TX & \to & T^*X \\ v & \mapsto & v^\flat(\,\cdot\,) := g(v,\,\cdot\,) \end{array}$$

Définition : La *musicalité dièse-(pseudo-)riemannienne*

$$\begin{array}{rcl} {}^g : T^*X & \to & TX \\ \alpha & \mapsto & \alpha^g \end{array}$$

est définie implicitement par

$$g(\alpha^g,\,\cdot\,) = \alpha(\,\cdot\,)$$

Remarque : Je dirai simplement *musicalité riemannienne* au lieu de *musicalité pseudo-riemannienne*. La musicalité dièse-riemannienne est le plus souvent dénotée par un dièse, i.e. par $\alpha^\sharp$ au lieu de α^g. J'utiliserai α^g au lieu de $\alpha^\sharp$ car le dièse dénotera la forme basique correspondante sur un fibré principal.

Proposition : Soient $x \in X$, $v \in T_xX$, $\alpha \in T_x^*X$. Alors $v^\flat(\alpha^g) = \alpha(v)$.

Preuve : $v^\flat(\alpha^g) = g(v, \alpha^g) = g(\alpha^g, v) = \alpha(v)$. □

Proposition : Les musicalités riemanniennes s'expriment localement comme

$$(\partial_i)^\flat = g_{ij}\mathrm{d}x^j \quad \text{et} \quad (\mathrm{d}x^i)^g = g^{ij}\partial_j$$

Preuve : D'une part,

$$\begin{array}{rcl} (\partial_k)^\flat\,(\,\cdot\,) & = & g(\partial_k,\,\cdot\,) \\ & = & (g_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j)(\partial_k,\,\cdot\,) \\ & = & g_{ij}\mathrm{d}x^i(\partial_k) \otimes \mathrm{d}x^j(\,\cdot\,) \\ & = & g_{ij}\delta^i_k\mathrm{d}x^j(\,\cdot\,) \\ & = & g_{kj}\mathrm{d}x^j(\,\cdot\,) \end{array}$$

D'autre part, il existe des $a_{k,l}$ tels que

$$(\mathrm{d}x^k)^g = a^{kl}\partial_l$$

Par définition de la musicalité dièse-riemannienne,

$$\begin{aligned}
\delta^k_m &= \mathrm{d}x^k(\partial_m) \\
&= g((\mathrm{d}x^k)^g, \partial_m) \\
&= (g_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j)(a^{kl}\partial_l, \partial_m) \\
&= g_{ij}\mathrm{d}x^i(a^{kl}\partial_l) \otimes \mathrm{d}x^j(\partial_m) \\
&= g_{ij}\delta^i_l a^{kl}\delta^j_m \\
&= g_{im}a^{ki}
\end{aligned}$$

C'est-à-dire, les matrices $[a^{ki}]$ et $[g_{im}]$ sont inverses l'une de l'autre. Comme g_{ij} est symétrique, a^{ij} est donc aussi symétrique. On pose $g^{ij} := a^{ij}$. D'où :

$$(\mathrm{d}x^i)^g = g^{ij}\partial_j$$

□

18.4 Produit scalaire sur les 1-formes :

Notation : Soient $\alpha, \beta \in T^*_x X$ deux 1-formes basées en $x \in X$. La métrique pseudo-riemannienne g induit une forme bilinéaire non dégénérée sur les 1-formes :

$$\begin{aligned}
\langle \cdot, \cdot \rangle_g|_x : T^*_x X \times T^*_x X &\to \mathbb{R} \\
(\alpha, \beta) &\mapsto \langle \alpha, \beta \rangle_g := \alpha(\beta^g)
\end{aligned}$$

Remarque : Lorsque g est riemannienne, $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ est un produit scalaire. Toutefois, si g est pseudo-riemannienne, $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ n'est pas forcément définie positive (ni semi définie positive). Par exemple, pour $g = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x - \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y$ sur $\mathbb{R}^2$, on a $\langle \mathrm{d}x, \mathrm{d}x \rangle_g = \mathrm{d}x(\partial_x) = 1$ et $\langle \mathrm{d}y, \mathrm{d}y \rangle_g = \mathrm{d}y(-\partial_y) = -1$. Plus généralement, $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ est définie positive si et seulement si g est définie positive. Par abus de langage (un abus potentiellement fatal), je parlerai de $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ comme étant un "produit scalaire" même quand la signature de g peut être lorentzienne. Il en sera de même pour la généralisation de $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ aux k-formes. Il en sera aussi de même pour l'éventuel "produit scalaire" $(\cdot, \cdot)_g$ sur les k-formes différentielles. Bref, il me faudra éventuellement faire attention à cette subtilité, e.g. dans le théorème plus bas $\Delta\alpha = 0 \iff \mathrm{d}\alpha = \delta\alpha = 0$ où l'implication vers la droite n'est vrai que dans le cas défini positif.

Question : En fait, est-ce qu'il y a un nom concis pour *forme bilinéaire symétrique non dégénérée* ? Quand j'en aurai trouvé un, changer "produit scalaire" plus bas par ce nom. TO DO ! ! !

18.5 Produit scalaire sur les k-formes :

Le dernier produit scalaire sur les 1-formes en induit un sur les k-formes. Soient $\alpha, \beta \in \wedge^k T_x^* X$ deux k-formes basées en $x \in X$. On peut décomposer α et β en produits extérieurs de k 1-formes :

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k \quad \text{et} \quad \beta = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k$$

Le produit scalaire sur les k-formes est alors défini par :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_g|_x : \wedge^k T_x^* X \times \wedge^k T_x^* X &\to \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \det[\langle \alpha_i, \beta_j \rangle_g] \end{aligned}$$

Si $k = 1$, le produit scalaire sur les k-formes concorde avec celui sur les 1-formes. Si $k = 0$, le produit scalaire est simplement le produit de scalaires $\langle f, g \rangle_g = fg$.

Proposition : $\langle \mathrm{d}x^i, \mathrm{d}x^j \rangle_g = g^{ij}$.

Preuve : $\langle \mathrm{d}x^i, \mathrm{d}x^j \rangle_g = \mathrm{d}x^i((\mathrm{d}x^j)^g) = \mathrm{d}x^i(g^{jk}\partial_k) = \delta^i_k g^{jk} = g^{ji} = g^{ij}$. □

Proposition : Le produit scalaire sur les k-formes est symétrique.

Preuve : Découle du fait que g^{ij} est symétrique et que le déterminant est invariant sous la transposition de matrice. □

Proposition : Soient $\alpha = \alpha_i \mathrm{d}x^i$ et $\beta = \beta_i \mathrm{d}x^i$ deux 1-formes où α_i et β_i sont des coefficients réels pour $i = 1, \ldots, n$. Alors :

$$\langle \alpha, \beta \rangle_g = g^{ij} \alpha_i \beta_j$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \beta \rangle_g &= \langle \alpha_i \mathrm{d}x^i, \beta_j \mathrm{d}x^j \rangle_g \\
&= \alpha_i \mathrm{d}x^i (\beta_j \mathrm{d}x^j)^g \\
&= \alpha_i \mathrm{d}x^i (\beta_j g^{jk} \partial_k) \\
&= \alpha_i \delta^i_k \beta_j g^{jk} \\
&= \alpha_i g^{ji} \beta_j \\
&= g^{ij} \alpha_i \beta_j
\end{aligned}$$

□

Proposition : Soient $\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$ et $\beta = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_k$ deux k-formes. Alors

$$\langle \alpha, \beta \rangle_g = \iota_{\beta_k^g} \ldots \iota_{\beta_1^g} \alpha$$

Preuve : (Par induction)

Étape de base : Pour $k = 1$, l'égalité recherchée est évidente.

Étape d'induction : Supposons l'égalité vraie pour les $(k-1)$-formes. Décomposons α et β comme

$$\alpha = \tilde{\alpha} \wedge \alpha_k$$

$$\beta = \tilde{\beta} \wedge \beta_k$$

où $\tilde{\alpha} = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{k-1}$ et où $\tilde{\beta} = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_{k-1}$. Par hypothèse,

$$\langle \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle = \iota_{\beta_{k-1}^g} \ldots \iota_{\beta_1^g} \tilde{\alpha}$$

Souvenons-nous que $\iota_X(\mu \wedge \nu) = \iota_X \mu \wedge \nu + (-1)^p \mu \wedge \iota_X \nu$ pour μ une p-forme et ν une q-forme. Considérons la matrice $[A_{ij}]$ définie par $A_{ij} := \langle \alpha_i, \beta_j \rangle_g$. Elle est carrée et de taille $k \times k$. Posons $[A_{i,j}^{(s,t)}]$ la matrice de taille $(k-1) \times (k-1)$

obtenue en enlevant la ligne s et la colonne t de la matrice $[A_{i,j}]$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\iota_{\beta_k^g}...\iota_{\beta_1^g}\alpha &= \iota_{\beta_k^g}...\iota_{\beta_1^g}(\tilde{\alpha}\wedge\alpha_k)\\
&= \iota_{\beta_k^g}...\iota_{\beta_2^g}(\iota_{\beta_1^g}\tilde{\alpha}\wedge\alpha_k+(-1)^{k-1}\tilde{\alpha}\wedge\iota_{\beta_1^g}\alpha_k)\\
&= \iota_{\beta_k^g}...\iota_{\beta_2^g}(\iota_{\beta_1^g}\tilde{\alpha}\wedge\alpha_k+(-1)^{k-1}\langle\alpha_k,\beta_1\rangle_g\tilde{\alpha})\\
&= \iota_{\beta_k^g}...\iota_{\beta_2^g}(\iota_{\beta_1^g}\tilde{\alpha}\wedge\alpha_k+(-1)^{k-1}A_{k,1}\tilde{\alpha})\\
&= \iota_{\beta_k^g}...\iota_{\beta_3^g}(\iota_{\beta_2^g}\iota_{\beta_1^g}\tilde{\alpha}\wedge\alpha_k+(-1)^{k-2}\iota_{\beta_1^g}\tilde{\alpha}\wedge\iota_{\beta_2^g}\alpha_k)\\
&\quad +(-1)^{k-1}A_{k,1}\iota_{\beta_k^g}...\iota_{\beta_2^g}\tilde{\alpha}\\
&= \iota_{\beta_k^g}...\iota_{\beta_3^g}(\iota_{\beta_2^g}\iota_{\beta_1^g}\tilde{\alpha}\wedge\alpha_k+(-1)^{k-2}A_{k,2}\iota_{\beta_1^g}\tilde{\alpha})\\
&\quad +(-1)^{k-1}A_{k,1}\det[A_{i,j}^{(k,1)}]\\
&= \iota_{\beta_k^g}...\iota_{\beta_3^g}(\iota_{\beta_2^g}\iota_{\beta_1^g}\tilde{\alpha}\wedge\alpha_k)+(-1)^{k-2}A_{k,2}\iota_{\beta_k^g}...\iota_{\beta_3^g}\iota_{\beta_1^g}\tilde{\alpha}\\
&\quad +(-1)^{k-1}A_{k,1}\det[A_{i,j}^{(k,1)}]\\
&= \iota_{\beta_k^g}...\iota_{\beta_3^g}(\iota_{\beta_2^g}\iota_{\beta_1^g}\tilde{\alpha}\wedge\alpha_k)+(-1)^{k-2}A_{k,2}\det[A_{i,j}^{(k,2)}]\\
&\quad +(-1)^{k-1}A_{k,1}\det[A_{i,j}^{(k,1)}]\\
&= \iota_{\beta_k^g}...\iota_{\beta_3^g}(\iota_{\beta_2^g}\iota_{\beta_1^g}\tilde{\alpha}\wedge\alpha_k)+\sum_{l=1}^{2}(-1)^{k-l}A_{k,l}\det[A_{i,j}^{(k,l)}]\\
&= ...
\end{aligned}$$

En continuant ainsi de suite on arrive éventuellement à :

$$\begin{aligned}
& \iota_{\beta_k^g}(\iota_{\beta_{k-1}^g}...\iota_{\beta_3^g}\iota_{\beta_2^g}\iota_{\beta_1^g}\tilde{\alpha}\wedge\alpha_k)+\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{k-l}A_{k,l}\det[A_{i,j}^{(k,l)}] \\
= \ & \iota_{\beta_k^g}(\langle\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\rangle_g\alpha_k)+\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{k-l}A_{k,l}\det[A_{i,j}^{(k,l)}] \\
= \ & \det[A_{i,j}^{(k,k)}]\iota_{\beta_k^g}\alpha_k+\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{k-l}A_{k,l}\det[A_{i,j}^{(k,l)}] \\
= \ & \det[A_{i,j}^{(k,k)}]\langle\alpha_k,\beta_k\rangle_g+\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{k-l}A_{k,l}\det[A_{i,j}^{(k,l)}] \\
= \ & (-1)^{k-k}A_{k,k}\det[A_{i,j}^{(k,k)}]+\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{k-l}A_{k,l}\det[A_{i,j}^{(k,l)}] \\
= \ & \sum_{l=1}^{k}(-1)^{k-l}A_{k,l}\det[A_{i,j}^{(k,l)}] \\
= \ & \det[A_{i,j}] \\
= \ & \det[\langle\alpha_i,\beta_j\rangle_g] \\
= \ & \langle\alpha,\beta\rangle_g
\end{aligned}$$

□

Preuve : (autre preuve plus rapide) : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\iota_{\beta_k^g}...\iota_{\beta_1^g}\alpha &= \alpha(\beta_1^g,...,\beta_k^g) \\
&= (\alpha_1\wedge...\wedge\alpha_k)(\beta_1^g,...,\beta_k^g) \\
&= \det[\alpha_i(\beta_j^g)] \\
&= \langle\alpha,\beta\rangle_g
\end{aligned}$$

□

Corollaire : Le produit scalaire sur les k-formes est linéaire à gauche et à droite.

Preuve : Par symétrie de $\langle\cdot,\cdot\rangle_g$, il suffit de montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle_g$ est linéaire à gauche. Soient α,β,γ trois k-formes. Par la dernière proposition on calcule directement :

$$\begin{aligned} \langle \alpha + \beta, \gamma \rangle_g &= \iota_{\gamma_k^g} \ldots \iota_{\gamma_1^g} (\alpha + \beta) \\ &= \iota_{\gamma_k^g} \ldots \iota_{\gamma_1^g} \alpha + \iota_{\gamma_k^g} \ldots \iota_{\gamma_1^g} \beta \\ &= \langle \alpha, \gamma \rangle_g + \langle \beta, \gamma \rangle_g \end{aligned}$$

□

Remarque : Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_g : \wedge^k T^* X \times \wedge^k T^* X \to \mathbb{R}$ sur les k-formes induit une application $\langle \cdot, \cdot \rangle_g : \Omega^k(X) \times \Omega^k(X) \to C^\infty(X)$ sur les k-formes différentielles définie point par point.

18.6 La signature s_g de g :

Définition : La *signature* d'une métrique pseudo-riemannienne g est par définition

$$s_g := \mathrm{sign}(\det[g_{ij}]) \in \{-1, +1\}$$

Remarque : La signature s_g de g est indépendante du choix de coordonnée locale.

Remarque : La signature s_g peut aussi être définie de manière équivalente par $s_g = (-1)^t$ où t est le nombre de dimensions du sous-espace vectoriel maximal d'une fibre tangente $T_x X$ sur laquelle $g|_x$ est définie négative. Par exemple, si g est de type $(+, -, -, -)$ on a $t = 3$ et donc $s_g = -1$.

Remarque : La signature d'une métrique riemannienne est $s_g = 1$. Mais l'inverse n'est pas toujours vrai. En effet, une métrique pseudo-riemannienne g de type $(+, -, -)$ a une signature $s_g = 1$, mais g n'est pas riemannienne. Plus bas il se peut que j'ai fait l'erreur de dire « $s_g = 1$ implique g riemannienne », ce qui est faux. Revérifier ça. TO DO ! ! !

18.7 La forme volume unitaire :

Définition : La *forme volume unitaire* $\Omega_g \in \Omega^n(X)$ est définie localement en coordonnées locales $(x^1, ..., x^n)$ sur $U \subset X$ par

$$\begin{aligned} \Omega_g|_U &:= \sqrt{|\det[g_{ij}]|}\mathrm{d}x^1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^n \\ &= \sqrt{s_g \det[g_{ij}]}\mathrm{d}x^1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^n \end{aligned}$$

Remarque : La définition de $\Omega_g|_U$ est moins "canonique" qu'elle n'en a l'air : elle dépend de l'ordre dans lequel on prend les coordonnées $(x^1, ..., x^n)$, i.e. dépend d'un choix d'orientation locale.

Remarque : Lorsque X est orientable, il est possible de définir globalement Ω_g. Si X n'est pas orientable, on ne peut définir Ω_g que localement. Ceci dit, la plupart des théorèmes importants, e.g. le théorème de Stokes, le théorème de décomposition de Hodge, etc., demandent aussi d'avoir X orientable donc ce n'est pas une nouvelle condition dérangeante.

Remarque : Pour g riemannienne on a $s_g = 1$ et donc :

$$\Omega_g|_U = \sqrt{\det[g_{ij}]}\mathrm{d}x^1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^n$$

Proposition : $\langle \Omega_g, \Omega_g \rangle_g = s_g$.

Preuve : Calcul direct :

$$\begin{aligned} \langle \Omega_g, \Omega_g \rangle_g &= \langle \sqrt{|\det[g_{ij}]|}\mathrm{d}x^1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^n, \sqrt{|\det[g_{ij}]|}\mathrm{d}x^1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^n \rangle_g \\ &= |\det[g_{ij}]| \langle \mathrm{d}x^1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^n, \mathrm{d}x^1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^n \rangle_g \\ &= |\det[g_{ij}]| \det[\langle \mathrm{d}x^k, \mathrm{d}x^l \rangle_g] \\ &= |\det[g_{ij}]| \det[g^{kl}] \\ &= |\det[g_{ij}]| \det[g_{kl}]^{-1} \\ &= |\det[g_{ij}]| / (s_g |\det[g_{kl}]|) \\ &= s_g^{-1} \\ &= s_g \end{aligned}$$

□

Remarque : Ω_g est « *unitaire* » au sens où $|\langle \Omega_g, \Omega_g \rangle_g| = |s_g| = |\pm 1| = 1$.

18.8 Opérateur $\star$ de dualité de Hodge :

Définition : L'*opérateur de dualité de Hodge*

$$\star : \wedge^k T^* X \to \wedge^{n-k} T^* X$$

est défini implicitement sur tout $\beta \in \wedge^k T_x^* X$ par

$$\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle_g \Omega_g, \qquad \forall \alpha, \beta \in \wedge^k T_x^* X$$

Remarque : J'écrirai parfois $\star_g$ pour spécifier de quelle métrique g il s'agit.

Remarque : Si X est orientable, Ω_g est défini globalement. Dans ce cas, l'opérateur de dualité de Hodge sur les k-formes $\star : \wedge^k T^* X \to \wedge^{n-1} T^* X$ en induit un sur les k-formes différentielles $\star : \Omega^k(X) \to \Omega^{n-k}(X)$ défini point par point :

$$(\star\alpha)_x := \star(\alpha_x), \qquad \forall x \in X,\ \alpha \in \Omega^k(X)$$

Proposition : $\star 1 = \Omega_g$ et $\star\Omega_g = s_g$.

Preuve : D'une part, $\Omega_g \wedge \star\Omega_g = \langle \Omega_g, \Omega_g \rangle \Omega_g = s_g \Omega_g$. Comme $\star\Omega_g$ est une fonction, on a donc $(\star\Omega_g)\Omega_g = \Omega_g \wedge \star\Omega_g = s_g \Omega$. D'où $\star\Omega_g = s_g$. Aussi, $\star 1 = \Omega_g$ puisque $\star 1 = 1 \wedge \star 1 = \langle 1, 1 \rangle_g \Omega_g = 1\Omega_g = \Omega_g$. □

Proposition : $\alpha \wedge \star\beta = (-1)^{k(n-k)} \star \alpha \wedge \beta, \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^k(X)$.

Preuve : Soient $\alpha, \beta \in \Omega^k(X)$. Alors $\star\alpha, \star\beta \in \Omega^{n-k}(X)$. En utilisant le fait que $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ est symétrique, on calcule directement :

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \star\beta &= \langle \alpha, \beta \rangle_g \Omega_g \\ &= \langle \beta, \alpha \rangle_g \Omega_g \\ &= \beta \wedge \star\alpha \\ &= (-1)^{k(n-k)} \star \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

□

Proposition : L'opérateur $\star$ est linéaire, i.e.

$$\star(a\alpha + b\beta) = a \star \alpha + b \star \beta, \qquad \forall a, b \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \in \Omega^k(X)$$

Preuve : Il suffit de remarquer que le produit scalaire sur les k-formes est linéaire à gauche et à droite.

Proposition : $\star : \wedge^k T^*X \to \wedge^{n-k} T^*X$ est un isomorphisme.

Preuve : On vient de voir que $\star$ est linéaire. Il suffit de montrer qu'il est bijectif. Puisque son domaine est de même dimension que son image :

$$\dim_{\mathbb{R}}\left(\wedge^k T^*X\right) = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \dim_{\mathbb{R}}\left(\wedge^{n-k} T^*X\right)$$

il suffit de montrer qu'il est injectif. Soit $\alpha \in \wedge^k T^*X$ quelconque non nul. Alors $\langle \cdot, \alpha\rangle_g \neq 0$ car $\langle \cdot, \cdot\rangle_g$ est non dégénéré. Donc $\langle \cdot, \alpha\rangle_g \Omega_g \neq 0$. Donc $\cdot \wedge \star\alpha \neq 0$. Donc $\star\alpha \neq 0$. □

18.9 Le carré de l'opérateur de Hodge :

Remarque : Puisque $\star 1 = \Omega_g$ et $\star\Omega_g = s_g$, le carré de $\star$ est donné sur 1 et Ω_g par :

$$\star\star 1 = s_g \quad \text{et} \quad \star\star\Omega_g = s_g\Omega_g$$

Le cas général est donné par la proposition suivante.

Proposition : Le carré de $\star$ sur les k-formes vérifie

$$\star^2 := \star\circ\star = (-1)^{k(n-k)} s_g$$

Preuve : Preuve horrible où il faut utiliser une base $\{\mathrm{d}x^1, ..., \mathrm{d}x^n\}$ de T_x^*X. On peut supposer $g|_x = g_{i,j}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ avec $g_{i,j}$ minkowskienne (i.e. diagonale à coefficients ± 1). TO DO ! ! ! (ça se trouve un peu partout). □

Corollaire : $\star^2 = (-1)^{nk+k} s_g = (-1)^{(n+1)k} s_g$.

Preuve : $\star^2 = (-1)^{k(n-k)} s_g = (-1)^{nk-k^2} s_g = (-1)^{nk+k^2} s_g = (-1)^{nk+k} s_g$ car k est pair si et seulement si k^2 est pair. □

Corollaire : $\star^{-1} = (-1)^{k(n-k)} s_g \star$.

Preuve : $(-1)^{nk+k} s_g = \star^2$ implique $\star^{-1} = (-1)^{nk+k} s_g \star$. □

18.10 Quelques propriétés de l'opérateur de Hodge :

Proposition : $\langle \star \alpha, \star\beta\rangle_g = s_g\langle\alpha,\beta\rangle_g$.

Preuve : Soient α,β deux k-formes. Ainsi, $\star\alpha$ et $\star\beta$ sont des $n-k$-formes. En sachant que $\star^2 = (-1)^{k(n-k)}s_g$ et que $\langle\cdot,\cdot\rangle_g$ est symétrique, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\langle \star \alpha, \star\beta\rangle_g\Omega_g &= (\star\alpha)\wedge\star(\star\beta)\\
&= (\star\alpha)\wedge\star^2\beta\\
&= (-1)^{k(n-k)}s_g(\star\alpha)\wedge\beta\\
&= (-1)^{k(n-k)}s_g(-1)^{k(n-k)}\beta\wedge\star\alpha\\
&= s_g\langle\beta,\alpha\rangle_g\Omega_g\\
&= s_g\langle\alpha,\beta\rangle_g\Omega_g
\end{aligned}$$

□

Proposition : Soit α une $n-k$-forme et β une k-forme. Alors :

$$\langle \star \alpha, \beta\rangle_g = (-1)^{k(n-k)}\langle\alpha,\star\beta\rangle_g$$

Preuve : Par la dernière proposition, on calcule :

$$\begin{aligned}
\langle \star \alpha, \beta\rangle_g &= s_g\langle\star(\star\alpha),\star\beta\rangle_g\\
&= s_g\langle\star^2\alpha,\star\beta\rangle_g\\
&= s_g\langle(-1)^{(n-k)(n-(n-k))}s\alpha,\star\beta\rangle_g\\
&= (-1)^{k(n-k)}\langle\alpha,\star\beta\rangle_g
\end{aligned}$$

□

18.11 Dualité de Hodge - formule explicite :

Proposition : Soit (X,g) riemannienne. Soit $x\in X$. Soit $\alpha\in\wedge^k T_x^*X$. L'opérateur de dualité de Hodge est donné explicitement par :

$$\star\alpha = \iota_{\alpha^g}\Omega_g$$

i.e.

$$\star(\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^k) = \iota_{(\alpha^k)^g} \ldots \iota_{(\alpha^1)^g} \Omega_g$$

Preuve : (Preuve par induction). L'opérateur de dualité de Hodge est défini implicitement par $\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle_g \Omega_g$. Pour montrer l'égalité désirée

$$\star\beta = \iota_{(\beta^k)^g} \ldots \iota_{(\beta^1)^g} \Omega_g$$

il suffit donc de démontrer l'égalité

$$\alpha \wedge (\iota_{(\beta^k)^g} \ldots \iota_{(\beta^1)^g} \Omega_g) = \langle \alpha, \beta \rangle_g \Omega_g$$

J'utiliserai la formule la formule $\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (\iota_X \beta)$ pour une k-forme α.

Étape de base : Fixons $k = 1$. Soient α et β deux 1-formes. On veut montrer que

$$\alpha \wedge (\iota_{\beta^g} \Omega_g) = \langle \alpha, \beta \rangle_g \Omega_g$$

Utilisons le fait que $\alpha \wedge \Omega_g = 0$ (car c'est une $(n+1)$-forme). On trouve alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \iota_{\beta^g}(\alpha \wedge \Omega_g) \\ &= (\iota_{\beta^g} \alpha) \Omega_g + (-1)^1 \alpha \wedge \iota_{\beta^g} \Omega_g \\ &= \langle \alpha, \beta \rangle_g \Omega_g - \alpha \wedge (\iota_{\beta^g} \Omega_g) \end{aligned}$$

D'où l'égalité recherchée $\alpha \wedge (\iota_{\beta^g} \Omega_g) = \langle \alpha, \beta \rangle_g \Omega_g$.

Étape d'induction : Fixons $k \geq 1$. Supposons maintenant que

$$\star\beta = \iota_{\beta^g} \Omega_g$$

est vrai pour toute k-forme β. Je veux montrer que l'égalité est alors aussi vraie pour $k+1$. Considérons $\tilde{\alpha} = \alpha \wedge \alpha^{k+1}$ et $\tilde{\beta} = \beta \wedge \beta^{k+1}$ deux $(k+1)$-formes où α et β sont des k-formes et où α^{k+1} et β^{k+1} sont deux 1-formes. Écrivons aussi $\alpha = \alpha^1 \wedge \ldots \alpha^k$ où $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ sont des 1-formes. Je veux montrer que :

$$\tilde{\alpha} \wedge (\iota_{\tilde{\beta}^g} \Omega_g) = \langle \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle_g \Omega_g$$

On sait que

$$\tilde{\alpha} \wedge (\iota_{\beta^g} \Omega_g) = 0$$

car c'est une $((k+1)+(n-k)) = (k+1+n-k) = (n+1)$-forme. On trouve alors :

$$\begin{aligned}
0 &= \iota_{(\beta^{k+1})^g}(\tilde{\alpha} \wedge (\iota_{\beta^g}\Omega_g)) \\
&= (\iota_{(\beta^{k+1})^g}\tilde{\alpha}) \wedge (\iota_{\beta^g}\Omega_g) + (-1)^{k+1}\tilde{\alpha} \wedge \iota_{(\beta^{k+1})^g}\iota_{\beta^g}\Omega_g \\
&= (\iota_{(\beta^{k+1})^g}(\alpha \wedge \alpha^{k+1})) \wedge \star\beta + (-1)^{k+1}\tilde{\alpha} \wedge \iota_{\tilde{\beta}^g}\Omega_g \\
&= ((\iota_{(\beta^{k+1})^g}\alpha) \wedge \alpha^{k+1} + (-1)^k\alpha \wedge (\iota_{(\beta^{k+1})^g}\alpha^{k+1})) \wedge \star\beta + (-1)^{k+1}\tilde{\alpha} \wedge \iota_{\tilde{\beta}^g}\Omega_g \\
&= ((\iota_{(\beta^{k+1})^g}\alpha) \wedge \alpha^{k+1} + (-1)^k\alpha \wedge \langle\alpha^{k+1}, \beta^{k+1}\rangle_g) \wedge \star\beta + (-1)^{k+1}\tilde{\alpha} \wedge \iota_{\tilde{\beta}^g}\Omega_g \\
&= ((\iota_{(\beta^{k+1})^g}\alpha) \wedge \alpha^{k+1} + (-1)^k\langle\alpha^{k+1}, \beta^{k+1}\rangle_g\alpha) \wedge \star\beta + (-1)^{k+1}\tilde{\alpha} \wedge \iota_{\tilde{\beta}^g}\Omega_g \\
&= (\iota_{(\beta^{k+1})^g}\alpha) \wedge \alpha^{k+1} \wedge \star\beta + (-1)^k\langle\alpha^{k+1}, \beta^{k+1}\rangle_g\alpha \wedge \star\beta + (-1)^{k+1}\tilde{\alpha} \wedge \iota_{\tilde{\beta}^g}\Omega_g \\
&= (\iota_{(\beta^{k+1})^g}\alpha) \wedge \alpha^{k+1} \wedge \star\beta + (-1)^k\langle\alpha^{k+1}, \beta^{k+1}\rangle_g\langle\alpha, \beta\rangle_g\Omega_g + (-1)^{k+1}\tilde{\alpha} \wedge \iota_{\tilde{\beta}^g}\Omega_g
\end{aligned}$$

D'où :

$$\tilde{\alpha} \wedge \iota_{\tilde{\beta}^g}\Omega_g = (-1)^k(\iota_{(\beta^{k+1})^g}\alpha) \wedge \alpha^{k+1} \wedge \star\beta + \langle\alpha^{k+1}, \beta^{k+1}\rangle_g\langle\alpha, \beta\rangle_g\Omega_g$$

Je veux montrer que :

$$\tilde{\alpha} \wedge (\iota_{\tilde{\beta}^g}\Omega_g) = \langle\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\rangle_g\Omega_g$$

C'est-à-dire, je veux montrer que :

$$\langle\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\rangle_g\Omega_g = (-1)^k(\iota_{(\beta^{k+1})^g}\alpha) \wedge \alpha^{k+1} \wedge \star\beta + \langle\alpha^{k+1}, \beta^{k+1}\rangle_g\langle\alpha, \beta\rangle_g\Omega_g$$

Soit $\tilde{A} = [\langle\alpha^i, \beta^j\rangle]$ pour $i, j \in \{1, ..., k+1\}$, une matrice $(k+1) \times (k+1)$. Soit $\tilde{A}^{(i,j)}$ la matrice $\tilde{A}$ privée de la ligne i et de la colonne j. Soit $A = [\langle\alpha^i, \beta^j\rangle]$ pour $i, j \in \{1, ..., k\}$, une matrice $k \times k$. Naturellement, $\tilde{A}^{(k+1,k+1)} = A$. Un peu d'algèbre linéaire montre que :

$$\begin{aligned}
\det\tilde{A} &= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+k+1}\tilde{A}_{i,k+1}\det[\tilde{A}^{(i,k+1)}] \\
&= A_{k+1,k+1}\det[A] + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k+1}\tilde{A}_{i,k+1}\det[\tilde{A}^{(i,k+1)}]
\end{aligned}$$

D'où :

$$\langle\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}\rangle_g = \langle\alpha^{k+1}, \beta^{k+1}\rangle_g\langle\alpha, \beta\rangle_g + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k+1}\langle\alpha^i, \beta^{k+1}\rangle_g\det\left([\langle\alpha^l, \beta^j\rangle_g]^{(i,k+1)}\right)$$

D'où

$$\langle\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\rangle_g\Omega_g = \langle\alpha^{k+1},\beta^{k+1}\rangle_g\langle\alpha,\beta\rangle_g\Omega_g+\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k+1}\langle\alpha^i,\beta^{k+1}\rangle_g\det\left([\langle\alpha^l,\beta^j\rangle_g]^{(i,k+1)}\right)\Omega_g$$

Je veux montrer que :

$$\langle\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\rangle_g\Omega_g = (-1)^k(\iota_{(\beta^{k+1})^g}\alpha)\wedge\alpha^{k+1}\wedge\star\beta + \langle\alpha^{k+1},\beta^{k+1}\rangle_g\langle\alpha,\beta\rangle_g\Omega_g$$

C'est-à-dire, je veux montrer que :

$$(-1)^k(\iota_{(\beta^{k+1})^g}\alpha)\wedge\alpha^{k+1}\wedge\star\beta = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k+1}\langle\alpha^i,\beta^{k+1}\rangle_g\det\left([\langle\alpha^l,\beta^j\rangle_g]^{(i,k+1)}\right)\Omega_g$$

Posons $\alpha^{(i)} := \alpha^1\wedge\ldots\wedge\overline{\alpha}^i\wedge\ldots\wedge\alpha^k$, i.e. privé de α^i. Posons aussi $\tilde{\alpha}^{(i)} := \alpha^1\wedge\ldots\wedge\overline{\alpha}^i\wedge\ldots\wedge\alpha^{k+1}$, i.e. privé de α^i. Il vérifie $\tilde{\alpha}^{(i)} = \alpha^{(i)}\wedge\alpha^{k+1}$. Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\iota_{(\beta^{k+1})^g}\alpha &= \iota_{(\beta^{k+1})^g}(\alpha^1\wedge\ldots\alpha^k)\\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\alpha_1\wedge\ldots\wedge\iota_{(\beta^{k+1})^g}\alpha^i\wedge\ldots\wedge\alpha^k\\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\langle\alpha^i,\beta^{k+1}\rangle_g\alpha^1\wedge\ldots\wedge\overline{\alpha}^i\wedge\ldots\wedge\alpha^k\\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\langle\alpha^i,\beta^{k+1}\rangle_g\alpha^{(i)}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&(-1)^k(\iota_{(\beta^{k+1})^g}\alpha)\wedge\alpha^{k+1}\wedge\star\beta\\
=\ &\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k+1}\langle\alpha^i,\beta^{k+1}\rangle_g\alpha^{(i)}\wedge\alpha^{k+1}\wedge\star\beta\\
=\ &\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k+1}\langle\alpha^i,\beta^{k+1}\rangle_g\tilde{\alpha}^{(i)}\wedge\star\beta\\
=\ &\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k+1}\langle\alpha^i,\beta^{k+1}\rangle_g\langle\tilde{\alpha}^{(i)},\beta\rangle_g\Omega_g\\
=\ &\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k+1}\langle\alpha^i,\beta^{k+1}\rangle_g\det\left([\langle\alpha^l,\beta^j\rangle_g]_{l,j}^{(i,k+1)}\right)\Omega_g
\end{aligned}$$

□

Remarque : Cette dernière proposition fort utile est parfois utilisée comme définition de l'opérateur de dualité de Hodge. Voir Wikipédia anglais "Exterior algebra", section sur la dualité de Hodge. Ça utilise la formule $\star_g \alpha = \iota_{\alpha^g}\Omega_g$ comme définition de l'opérateur de dualité de Hodge. Ce qui est fort logique, bien plus que la formule implicite $\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta\rangle_g \Omega_g$.

18.12 Dualité de Hodge de 1-formes en coordonnées locales :

Soit (X, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n. Soient $\{x^1, ..., x^n\}$ des coordonnées locales sur un ouvert $U \subset X$. Soit $\{\partial_i := \partial/\partial x^i\}$ la base de $T_U X$ correspondante et $\{\mathrm{d}x^i\}$ sa base duale de $T^*_U X$. En coordonnées locales la métrique s'écrit $g|_U = \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$. Pour alléger la notation, posons la fonction $G := \det[g_{ij}] \in C^\infty(U; \mathbb{R}\backslash\{0\})$, de sorte que la forme volume unitaire s'écrive plus simplement :

$$\Omega_g = \sqrt{s_g \det[g_{k,l}]}\mathrm{d}x^1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^n = \sqrt{s_g G}\mathrm{d}x^1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^n$$

Proposition : Sous les hypothèses qui précèdent, on a :

$$\star \mathrm{d}x^i = \sum_j (-1)^{j+1} g^{ij} \sqrt{s_g G}\mathrm{d}x^1 \wedge ... \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^n$$

Preuve : On utilise la formule explicite de l'opérateur de Hodge qu'on vient de démontrer :

$$\star\alpha = \iota_{\alpha^g}\Omega_g$$

On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\star \mathrm{d}x^i &= \iota_{(\mathrm{d}x^i)^g}\Omega_g \\
&= \iota_{\sum_j g^{ij}\partial_j}\Omega_g \\
&= \sum_j g^{ij}\iota_{\partial_j}\Omega_g \\
&= \sum_j g^{ij}\iota_{\partial_j}\sqrt{s_g G}\mathrm{d}x^1\wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \sum_j g^{ij}\sqrt{s_g G}\iota_{\partial_j}\left(\mathrm{d}x^1\wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n\right) \\
&= \sum_j (-1)^{j+1}g^{ij}\sqrt{s_g G}\mathrm{d}x^1\wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j}\wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n
\end{aligned}$$

où le $\widehat{\mathrm{d}x^j}$ veut dire que $\mathrm{d}x^j$ n'y est pas. □

Corollaire : Considérons une 1-forme différentielle $\alpha \in \Omega^1(X)$. En coordonnées locales elle s'écrit $\alpha = \sum_i \alpha_i \mathrm{d}x^i$. Alors, sous les hypothèses qui précèdent, on a :

$$\star\alpha|_U = \sum_{i,j}\alpha_i(-1)^{j+1}g^{ij}\sqrt{s_g G}\mathrm{d}x^1\wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j}\wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$$

Preuve : Découle directement de la dernière proposition :

$$\begin{aligned}
\star\alpha|_U &= \star(\sum_i \alpha_i \mathrm{d}x^i) \\
&= \sum_i \alpha_i \star \mathrm{d}x^i \\
&= \sum_i \alpha_i \sum_j (-1)^{j+1}g^{ij}\sqrt{s_g G}\mathrm{d}x^1\wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j}\wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \sum_{i,j}\alpha_i(-1)^{j+1}g^{ij}\sqrt{s_g G}\mathrm{d}x^1\wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j}\wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n
\end{aligned}$$

□

18.13 Dualité de Hodge d'un wedge (formules pour) :

Proposition : Soit (X, g) pseudo-riemannienne de dimension n. Soit $x \in X$. Soient :

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p \in \wedge^p T^* X$$

$$\beta = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q \in \wedge^q T^* X$$

où les α_i et β_i sont des 1-formes. Alors

$$\star_g (\alpha \wedge \beta) = \iota_{\beta_q^g} \ldots \iota_{\beta_1^g} \star_g \alpha$$

Preuve : En utilisant la formule de la dernière section, on calcule directement :

$$\begin{aligned}\star_g (\alpha \wedge \beta) &= \iota_{\beta_q^g} \ldots \iota_{\beta_1^g} \iota_{\alpha_p^g} \ldots \iota_{\alpha_1^g} \Omega_g \\ &= \iota_{\beta_q^g} \ldots \iota_{\beta_1^g} \star_g \alpha\end{aligned}$$

□

Corollaire : $\star_g (\alpha \wedge \beta) = (-1)^{pq} \iota_{\alpha_p^g} \ldots \iota_{\alpha_1^g} \star_g \beta$.

Preuve : Découle du fait que $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$. □

Corollaire : $\star_g (\alpha \wedge \star_g \beta) = (-1)^{pn-qp+nq+q} s_g \iota_{\alpha_p^g} \ldots \iota_{\alpha_1^g} \beta$.

Preuve : Il suffit de mettre $\star_g \beta$ au lieu de β dans le dernier corollaire et de se souvenir que $\star_g^2 = (-1)^{nk+k} s_g$. □

18.14 Formes auto-duales et anti-auto-duales :

Définition : Une $(n/2)$-forme α est dite *auto-duale* (self-dual) si :

$$\star \alpha = \alpha$$

et est dite *anti-auto-duale* (anti-self-dual) si :

$$\star \alpha = -\alpha$$

Remarque : Pour avoir $\star\alpha = \pm\alpha$ sur certaines formes, il faut $\star^2\alpha = \alpha$. Puisque $\star^2 = (-1)^{nk+k} s_g$, le contexte (i.e. les valeurs numériques k, n et s_g) peut déterminer, via la contrainte $(-1)^{nk+k} s_g = 1$, si des formes (anti-)auto-duales peuvent exister ou non. Par exemple, il existe des formes (anti-)auto-duales si $k = 2$, $n = 4$, $s_g = 1$ mais non si $k = 2$, $n = 4$, $s_g = -1$. C'est, entre-autres, la raison pour laquelle la théorie de Yang-Mills se déroule sur une variété riemannienne $(+, +, +, +)$ et non pseudo-riemannienne $(+, -, -, -)$.

18.15 Produit scalaire L^2 sur les k-formes différentielles :

Soit (X, g) une variété pseudo-riemannienne orientable sur laquelle on s'est donné $\langle\cdot,\cdot\rangle_g, \Omega_g$ et $\star$ comme plus haut. Alors, on a aussi une forme bilinéaire sur l'espace des formes différentielles :

$$\begin{aligned} (\cdot,\cdot)_g : \Omega^k(X) \times \Omega^k(X) &\to \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\alpha, \beta)_g := \int_X \langle\alpha, \beta\rangle_g \Omega_g = \int_X \alpha \wedge \star\beta \end{aligned}$$

Remarque : Lorsque la métrique g est riemannienne, la forme bilinéaire symétrique $(\cdot,\cdot)_g$ est définie positive, i.e. est un produit scalaire L^2 sur $\Omega^k(X)$. Dans ce cas, étant un produit scalaire, $(\cdot,\cdot)_g$ est faiblement non dégénérée. i.e. la musicalité bémol correspondante :

$$\begin{aligned} \Omega^k(X) &\to (\Omega^k(X))^* \\ \alpha &\mapsto (\alpha, \cdot)_g \end{aligned}$$

est injective. Ici $(\Omega^k(X))^*$ dénote le dual algébrique de $\Omega^k(X)$. Pour une étude plus poussée de l'analyse fonctionnelle de l'espace $\Omega^k(X)$ des k-formes différentielles, voir le livre de Georges de Rham, *Variétés différentiables* (1960), portant sur les courants de de Rham.

Remarque : Plus bas de parlerai de $(\cdot,\cdot)_g$ comme étant un "produit scalaire" même lorsque g est pseudo-riemannienne. Bref, faire attention à cet abus de langage grossier. Corriger ça un jour. TO DO ! ! !

Remarque : Plus bas je serai plutôt sloppy sur les questions touchant l'analyse fonctionnelle (dérivées faibles etc.). Un jour je devrai revenir là-dessus, une fois que les "engrenages géométriques" seront établis. TO DO ! ! !

18.16 Codifférentielle δ :

Définition : Soit (X, g) pseudo-riemannienne orientable. La *codifférentielle*

$$\delta : \Omega^k(X) \to \Omega^{k-1}(X)$$

est définie par

$$\delta := (-1)^k \star^{-1} \mathrm{d}\star$$

Remarque : La codifférentielle δ est aussi connue sous le nom d'*opérateur de Beltrami*.

Remarque : Ici X doit être défini globalement pour avoir Ω_g global et donc $\star$ global. Bref, dès qu'il est question de δ, la variété X est supposée orientable.

Remarque : Tout comme $\star$ dépend de g, la codifférentielle δ dépend aussi de g. J'écrirai donc parfois δ_g pour spécifier de quel g il s'agit.

Proposition : Sur $\Omega^k(X)$, on a les égalités suivantes :

$$\delta = (-1)^{nk+n+1} s_g \star \mathrm{d}\star$$

$$\delta = (-1)^{n+k+1} \star \mathrm{d}\star^{-1}$$

Preuve : Montrons la première égalité. Soit $\alpha \in \Omega^k(X)$. Alors $\star\alpha \in \Omega^{k+1}(X)$. Alors $\mathrm{d}\star\alpha \in \Omega^{n-(k+1)}(X)$. Posons $k' := n - (k+1) = n - k - 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
\delta\alpha &= (-1)^k \star^{-1} (\mathrm{d}\star\alpha) \\
&= (-1)^k (-1)^{nk'+k'} s_g \star (\mathrm{d}\star\alpha) \\
&= (-1)^k (-1)^{n(n-k-1)+(n-k-1)} s_g \star \mathrm{d}\star\alpha \\
&= (-1)^{n^2-nk-n+n-k-1+k} s_g \star \mathrm{d}\star\alpha \\
&= (-1)^{n^2-nk-1} s_g \star \mathrm{d}\star\alpha \\
&= (-1)^{n+nk+1} s_g \star \mathrm{d}\star\alpha \\
&= (-1)^{nk+n+1} s_g \star \mathrm{d}\star\alpha
\end{aligned}$$

Montrons la seconde égalité. En se souvenant que $\star = (-1)^{nk+k} s_g \star^{-1}$, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\delta\alpha &= (-1)^{nk+n+1} s_g \star \mathrm{d} \star \\
&= (-1)^{nk+n+1} s_g \star \mathrm{d} (-1)^{nk+k} s_g \star^{-1} \\
&= (-1)^{n+k+1} \star \mathrm{d} \star^{-1}
\end{aligned}$$

□

Proposition : Sur $\Omega^k(X)$, on a les égalités suivantes :

$$\star\delta = (-1)^k \mathrm{d}\star$$

$$\delta\star = (-1)^{n+k+1} \star \mathrm{d}$$

$$\star\mathrm{d} = (-1)^{n+k+1} \delta\star$$

$$\mathrm{d}\star = (-1)^k \star \delta$$

Preuve : Découle directement des deux égalités

$$\delta = (-1)^k \star^{-1} \mathrm{d}\star$$

$$\delta = (-1)^{n+k+1} \star \mathrm{d}\star^{-1}$$

□

Proposition : $\delta^2 = 0$.

Preuve : $\delta^2 = \delta \circ \delta = \pm(\star^{-1}\mathrm{d}\star) \circ (\star^{-1}\mathrm{d}\star) = \pm \star^{-1} \mathrm{d}^2\star = 0$ car $\mathrm{d}^2 = 0$. □

18.17 Codifférentielle δ et opérateur adjoint d' :

Définition : L'opérateur adjoint d' de la différentielle extérieure d est défini implicitement par

$$(\mathrm{d}'\alpha, \beta)_g = (\alpha, \mathrm{d}\beta)_g, \qquad \forall \alpha \in \Omega^{k+1}(X),\ \beta \in \Omega^k(X)$$

De manière équivalente :

$$(\alpha, \mathrm{d}'\beta)_g = (\mathrm{d}\alpha, \beta)_g, \qquad \forall \alpha \in \Omega^k(X),\ \beta \in \Omega^{k+1}(X)$$

Proposition : Soit (X, g) une variété pseudo-riemannienne orientable. Soient $\alpha \in \Omega_c^k(X)$ et $\beta \in \Omega_c^{k+1}(X)$ deux formes différentielles à support compact. Alors :

$$(\mathrm{d}\alpha, \beta)_g - (\alpha, \delta\beta)_g = \int_{\partial X} \alpha \wedge \star\beta$$

Preuve : Puisque X est orientable et α et β sont à supports compacts, on peut utiliser le théorème de Stokes. On calcule directement :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\alpha, \beta)_g - (\alpha, \delta\beta)_g &= \int_X (\mathrm{d}\alpha \wedge \star\beta - \alpha \wedge \star\delta\beta) \\
&= \int_X \Big(\mathrm{d}\alpha \wedge \star\beta - \alpha \wedge \star \Big((-1)^{k+1} \star^{-1} \mathrm{d} \star \beta\Big)\Big) \\
&= \int_X \Big(\mathrm{d}\alpha \wedge \star\beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d} \star \beta\Big) \\
&= \int_X \mathrm{d}(\alpha \wedge \star\beta) \\
&= \int_{\partial X} \alpha \wedge \star\beta
\end{aligned}$$

□

Remarque : Ici $\star$ est $\star_g$ sur X et non sur ∂X. Donc le terme $\int_{\partial X} \alpha \wedge \star\beta$ ne s'écrit pas simplement $(\alpha, \beta)_g$ sur ∂X. Pour écrire ça comme intégrale sur X il faut décomposer la métrique g dans un voisinage de ∂X, etc.

Remarque : J'aimerais bien avoir une égalité similaire à celle de la dernière proposition pour

$$(\delta\alpha, \beta)_g - (\alpha, \mathrm{d}\beta)$$

en termes de $\int_{\partial X} \alpha \wedge \star\beta$. J'en trouve une en termes de $\int_{\partial X} \beta \wedge \star\alpha$. Une idée pour aller de $\beta \wedge \star\alpha$ à $\alpha \wedge \star\beta$ serait d'utiliser la symétrie de $\langle \alpha, \beta \rangle_g$ et $\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle_g \Omega_g$. Le problème est que cette dernière égalité n'est vraie que pour α et β deux k-formes, et non une k-forme et une $(k \pm 1)$-forme. Néanmoins, il me semble que si la métrique est localement du type $g = \tilde{g} + \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t$ avec $\tilde{g}$ sans $\mathrm{d}t$ (i.e. $\tilde{g}(\partial_t, \cdot) = 0$) au voisinage de ∂X, il y a moyen de relier $\star_g$ sur X et $\star_{\tilde{g}}$ sur le bord ∂X, etc.

Remarque : Dans la preuve j'ai utilisé le théorème de Stokes. Tel que mentionné au tout début du présent document, le théorème de Stokes présuppose M orientable et aussi que la forme différentielle soit à support compact. Si on ne suppose pas à support compact, on se retrouve avec des pathologies de ce type :

$$0 = \int_{\emptyset} x = \int_{\partial]0,1[} x \text{ ” = ” } \int_{]0,1[} \mathrm{d}x = \int_{[0,1]} \mathrm{d}x = \int_{\partial[0,1]} x = \int_{\{0,1\}} x = x|_0^1 = 1-0 = 1$$

Ici, le problème avec l'égalité ” = ” est que x n'est pas à support compact sur $]0,1[$. La théorie de Hodge repose lourdement sur le théorème de Stokes. Il faut alors faire doublement attention à ce que la forme différentielle en question soit à support compact. Comme je n'ai pas fait trop attention ajouter cette condition dans les proposition, il faudra que je fasse ça éventuellement. Mais ça ne sera pas trop compliqué car il suffira de changer Ω^k par Ω^k_c où le c dénote *à support compact*. TO DO ! ! !

Proposition : Soit (X,g) pseudo-riemannienne orientable sans bord (i.e. $\partial X = \emptyset$). Alors, sur l'espace des formes différentielles à support compact, la codifférentielle δ est égale à l'opérateur $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_g$-adjoint d' de la différentielle extérieure d, i.e. :

$$(\mathrm{d}\alpha,\beta)_g = (\alpha,\delta\beta)_g, \qquad \forall \alpha \in \Omega^k_c(X),\ \beta \in \Omega^{k+1}_c(X)$$

Preuve : Découle directement de la dernière proposition. □

Proposition : Soit (X,g) pseudo-riemannienne orientable avec un bord. Supposons $\alpha|_{\partial X} = 0$. Alors $\delta = \mathrm{d}'$.

Preuve : Découle de $(\mathrm{d}\alpha,\beta)_g - (\alpha,\delta\beta)_g = \int_{\partial X} \alpha \wedge \star\beta$. □

Remarque : Est-ce aussi vrai si $\beta|_{\partial X} = 0$? La subtilité apparaît ici dû au $\star$ sur X. Il faut alors distinguer deux restrictions : celle où $\beta|_{\partial X} = 0$ est de dire que β en ∂X s'annule dans la direction $T_{\partial X}(\partial X)$ et celle où $\beta|_{\partial X} = 0$ est de dire que $\beta|_{\partial X}$ s'annule dans toutes les directions de $T_{\partial X}X$. Si elle s'annule dans toutes les directions de X, alors $\star\beta$ sera nulle sur $T_{\partial X}X$ et donc sur $T_{\partial X}\partial X \subset T_{\partial X}X$. Dans ce dernier cas, on aura aussi $\delta = \mathrm{d}'$.

18.18 Codifférentielle δ en coordonnées locales sur $\Omega^1(X)$:

Proposition : Soit (X,g) une variété pseudo-riemannienne. Soit $\alpha \in \Omega^1(X)$, une 1-forme différentielle sur X. Considérons une carte locale $(x^1,...,x^n)$ sur un ouvert U en (X, g). Localement, $\alpha|_U = \alpha_j dx^j$ pour certaines fonctions réelles $\alpha_j \in C^\infty(X; \mathbb{R})$. Posons $G := \det[g_{ij}] \in C^\infty(U; \mathbb{R}\backslash\{0\})$. Soit $s_g := \text{sign}(G)$ la signature de g, i.e. le signe de G, de sorte que $|G| = s_g G$. Alors, la codifférentielle de α s'écrit localement explicitement comme :

$$\delta_g \alpha|_U = -\frac{1}{\sqrt{|G|}} \partial_i \left(g^{ij} \sqrt{|G|} \alpha_j \right)$$

Preuve : Je sais que $\delta = (-1)^{nk+n+1} s_g \star \mathrm{d} \star$. Plus haut, j'ai démontré qu'en coordonnées locales l'opérateur de Hodge agit sur les 1-formes différentielles comme :

$$\star\alpha|_U = \sum_{i,j} \alpha_i (-1)^{j+1} g^{ij} \sqrt{s_g G} \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$$

On calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
\delta\alpha|_U &= (-1)^{nk+n+1} s_g \star \mathrm{d} \star (\alpha_i \mathrm{d}x^i) \\
&= -s_g \star \mathrm{d} \star (\alpha_i \mathrm{d}x^i) \\
&= -s_g \star \mathrm{d} \sum_{i,j} \alpha_i (-1)^{j+1} g^{ij} \sqrt{s_g G} \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= s_g \star \mathrm{d} \sum_{i,j} \alpha_i (-1)^{j} g^{ij} \sqrt{s_g G} \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= s_g \star \sum_{i,j} (-1)^j \left(\partial_j \left(g^{ij} \sqrt{s_g G} \alpha_i\right)\right) \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= s_g \star \sum_{i,j} (-1)^j \left(\partial_j \left(g^{ij} \sqrt{s_g G} \alpha_i\right)\right) (-1)^{j+1} \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= -s_g \star \sum_{i,j} \left(\sqrt{s_g G}\right)^{-1} \left(\partial_j \left(g^{ij} \sqrt{s_g G} \alpha_i\right)\right) \sqrt{s_g G} \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= -s_g \star \sum_{i,j} \left(\sqrt{s_g G}\right)^{-1} \left(\partial_j \left(g^{ij} \sqrt{s_g G} \alpha_i\right)\right) \Omega_g \\
&= -s_g \sum_{i,j} \left(\sqrt{s_g G}\right)^{-1} \left(\partial_j \left(g^{ij} \sqrt{s_g G} \alpha_i\right)\right) \star \Omega_g \\
&= -s_g \sum_{i,j} \left(\sqrt{s_g G}\right)^{-1} \left(\partial_j \left(g^{ij} \sqrt{s_g G} \alpha_i\right)\right) s_g \\
&= -\sum_{i,j} \left(\sqrt{s_g G}\right)^{-1} \partial_j \left(g^{ij} \sqrt{s_g G} \alpha_i\right) \\
&= -\sum_{i,j} \left(\sqrt{|G|}\right)^{-1} \partial_i \left(g^{ij} \sqrt{|G|} \alpha_j\right)
\end{aligned}$$

□

Proposition : Sous les mêmes hypothèses que la dernière proposition, on a :

$$\delta_g \alpha|_U = -g^{ij} \left(\partial_i \alpha_j - \Gamma_{ij}^k \alpha_k\right)$$

Preuve : Plus haut, j'ai montré que :

$$g^{ij} \Gamma_{ij}^k = \frac{-1}{\sqrt{|G|}} \partial_i \left(\sqrt{|G|} g^{ik}\right)$$

Ainsi, par la dernière proposition, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\delta_g\alpha|_U &= -\frac{1}{\sqrt{|G|}}\partial_i\left(g^{ik}\sqrt{|G|}\alpha_k\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{|G|}}\partial_i\left(g^{ik}\sqrt{|G|}\right)\alpha_k - \frac{1}{\sqrt{|G|}}\left(\partial_i\alpha_k\right)g^{ik}\sqrt{|G|} \\
&= g^{ij}\Gamma^k_{ij}\alpha_k - g^{ik}\partial_i\alpha_k \\
&= g^{ij}\Gamma^k_{ij}\alpha_k - g^{ij}\partial_i\alpha_j \\
&= -g^{ij}\left(\partial_i\alpha_j - \Gamma^k_{ij}\alpha_k\right)
\end{aligned}$$

□

18.19 Codifférentielle δ en coordonnées locales sur $\Omega^n(X)$:

Proposition : Soit (X, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n. Soit $\alpha \in \Omega^n(X)$, une n-forme différentielle réelle sur X. La n-forme α peut s'écrire comme $\alpha = f \cdot \Omega_g$ pour une certaine fonction $f \in C^\infty(\Sigma; \mathbb{R})$. La codifférentielle de α s'écrit :

$$\delta_g\alpha = - \star \mathrm{d}f$$

Preuve : Souvenons-nous que $\delta_g = (-1)^{nk+n+1}s_g \star \mathrm{d}\star$ et que $\star_g\Omega_g = s_g$. Ici, $k = n$. On calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
\delta_g\alpha &= (-1)^{nk+n+1}s_g \star \mathrm{d} \star (f\Omega_g) \\
&= (-1)^{n^2+n+1}s_g \star \mathrm{d}(f \star \Omega_g) \\
&= (-1)^{n+n+1}s_g \star \mathrm{d}(f s_g) \\
&= - \star \mathrm{d}f
\end{aligned}$$

□

Proposition : Soit (Σ^2, g) une surface pseudo-riemannienne. Soit $\alpha \in \Omega^2(\Sigma)$, une 2-forme différentielle sur Σ. Considérons une carte locale $(x^1, x^2) = (x, y)$ sur un ouvert U en (Σ, g). Posons $G := \det[g_{ij}] \in C^\infty(U; \mathbb{R}\backslash\{0\})$. Soit $s_g := \mathrm{sign}(G)$ la signature de g, i.e. le signe de G, de sorte que $|G| = s_g G$. Localement, $\alpha|_U =$

$f\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ pour une certaine fonction réelle $f \in C^\infty(X;\mathbb{R})$. Alors, la codifférentielle de α s'écrit localement explicitement comme :

$$\delta_g \alpha|_U = -\star\,\mathrm{d}(f|G|^{-1/2})$$

Preuve : Localement on a :

$$\begin{aligned} \alpha|_U &= f\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= f|G|^{-1/2}|G|^{1/2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= f|G|^{-1/2}\Omega_g \\ &= \tilde{f}\Omega_g \end{aligned}$$

où $\tilde{f} = f|G|^{-1/2}$. Par la dernière proposition, on a $\delta_g(\tilde{f} \cdot \Omega_g) = -\star \mathrm{d}\tilde{f}$. On a donc :

$$\delta_g \alpha|_U = -\star\,\mathrm{d}\tilde{f} = -\star\,\mathrm{d}(f|G|^{-1/2})$$

□

Proposition : Soit (Σ^2, g) une surface pseudo-riemannienne. Soit $\alpha \in \Omega^2(\Sigma)$, une 2-forme différentielle sur Σ. Considérons une carte locale $(x^1, x^2) = (x, y)$ sur un ouvert U en (Σ, g). Posons $G := \det[g_{ij}] \in C^\infty(U;\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Soit $s_g := \mathrm{sign}(G)$ la signature de g, i.e. le signe de G, de sorte que $|G| = s_g G$. Localement, $\alpha|_U = f\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ pour une certaine fonction réelle $f \in C^\infty(X;\mathbb{R})$. Alors, la codifférentielle de α s'écrit localement explicitement comme :

$$\begin{aligned} \delta_g \alpha|_U = \; & |G|^{1/2}\partial_1(f|G|^{-1/2})(g^{12}\mathrm{d}x - g^{11}\mathrm{d}y) \\ & + |G|^{1/2}\partial_2(f|G|^{-1/2})(g^{22}\mathrm{d}x - g^{21}\mathrm{d}y) \end{aligned}$$

Preuve : D'abord, on a :

$$\begin{aligned} \star_g \mathrm{d}x &= \iota_{(\mathrm{d}x)^g}\Omega_g \\ &= \iota_{g^{11}\partial_1 + g^{12}\partial_2}|G|^{1/2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= g^{11}\iota_{\partial_1}|G|^{1/2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + g^{12}\iota_{\partial_2}|G|^{1/2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= g^{11}|G|^{1/2}\mathrm{d}y - g^{12}|G|^{1/2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \star_g \mathrm{d}y &= \iota_{(\mathrm{d}y)^g}\Omega_g \\ &= \iota_{g^{21}\partial_1 + g^{22}\partial_2}|G|^{1/2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= g^{21}\iota_{\partial_1}|G|^{1/2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + g^{22}\iota_{\partial_2}|G|^{1/2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= g^{21}|G|^{1/2}\mathrm{d}y - g^{22}|G|^{1/2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On calcule alors directement :

$$
\begin{aligned}
\delta\alpha|_U &= (-1)^{2\cdot 2+2+1} s_g \star \mathrm{d} \star (f dx \wedge dy) \\
&= -s_g \star \mathrm{d}(f \star (|G|^{-1/2}|G|^{1/2} dx \wedge dy)) \\
&= -s_g \star \mathrm{d}(f|G|^{-1/2} \star (\Omega_g)) \\
&= -s_g \star \mathrm{d}(f|G|^{-1/2} s_g) \\
&= - \star \mathrm{d}(f|G|^{-1/2}) \\
&= - \star \left(\partial_1(f|G|^{-1/2})\mathrm{d}x^1 + \partial_2(f|G|^{-1/2})\mathrm{d}x^2\right) \\
&= -\partial_1(f|G|^{-1/2}) \star \mathrm{d}x^1 - \partial_2(f|G|^{-1/2}) \star \mathrm{d}x^2 \\
&= -\partial_1(f|G|^{-1/2})(g^{11}|G|^{1/2}\mathrm{d}y - g^{12}|G|^{1/2}\mathrm{d}x) \\
&\quad -\partial_2(f|G|^{-1/2})(g^{21}|G|^{1/2}\mathrm{d}y - g^{22}|G|^{1/2}\mathrm{d}x) \\
&= |G|^{1/2}\partial_1(f|G|^{-1/2})(g^{12}\mathrm{d}x - g^{11}\mathrm{d}y) \\
&\quad +|G|^{1/2}\partial_2(f|G|^{-1/2})(g^{22}\mathrm{d}x - g^{21}\mathrm{d}y)
\end{aligned}
$$

□

Proposition : Sous les mêmes hypothèses que la dernière proposition, on a :

$$
\begin{aligned}
\delta_g\alpha|_U &= \left(\partial_1 f - \frac{1}{2} f g^{ij}\partial_1 g_{ij}\right)(g^{12}\mathrm{d}x - g^{11}\mathrm{d}y) \\
&\quad + \left(\partial_2 f - \frac{1}{2} f g^{ij}\partial_2 g_{ij}\right)(g^{22}\mathrm{d}x - g^{21}\mathrm{d}y)
\end{aligned}
$$

Preuve : Plus haut j'ai montré que :

$$|G|^{-1/2}\partial_k|G|^{1/2} = \frac{1}{2} g^{ij}\partial_k g_{ij}$$

$$|G|^{1/2}\partial_k|G|^{-1/2} = -\frac{1}{2} g^{ij}\partial_k g_{ij}$$

Par la dernière proposition, on calcule directement :

$$\begin{aligned}\delta_g\alpha|_U &= |G|^{1/2}\partial_1(f|G|^{-1/2})(g^{12}\mathrm{d}x - g^{11}\mathrm{d}y)\\ &\quad +|G|^{1/2}\partial_2(f|G|^{-1/2})(g^{22}\mathrm{d}x - g^{21}\mathrm{d}y)\\ &= |G|^{1/2}((\partial_1 f)|G|^{-1/2} + f\partial_1|G|^{-1/2})(g^{12}\mathrm{d}x - g^{11}\mathrm{d}y)\\ &\quad +|G|^{1/2}((\partial_2 f)|G|^{-1/2} + f\partial_2|G|^{-1/2})(g^{22}\mathrm{d}x - g^{21}\mathrm{d}y)\\ &= \left(\partial_1 f - \frac{1}{2}fg^{ij}\partial_1 g_{ij}\right)(g^{12}\mathrm{d}x - g^{11}\mathrm{d}y)\\ &\quad + \left(\partial_2 f - \frac{1}{2}fg^{ij}\partial_2 g_{ij}\right)(g^{22}\mathrm{d}x - g^{21}\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

□

18.20 Règle de Leibniz sur δ :

Proposition : Soit X sans bord et $\eta_1 \in \Omega^p(X)$, $\eta_2 \in \Omega^q(X)$. Alors :

$$\delta(\eta_1 \wedge \eta_2) = \ldots$$

Preuve : ... TO DO ! ! ! □

Remarque : En fait il semble bien qu'il n'existe aucune règle de Leibniz sur la codifférentielle δ. Du moins, il n'en existe pas de jolie. J'ai essayé bien des choses mais c'est toujours horrible. Le problème est que $\star_g$ ne passe pas bien à travers le wedge. Voir feuilles de je ne sais plus quelle date.

18.21 Divergence d'un champ vectoriel :

Définition : La *divergence* $\mathrm{div}(v) \in C^\infty(X;\mathbb{R})$ d'un champ vectoriel $v \in \mathfrak{X}(X)$ est définie par :

$$\mathrm{div}(v)\cdot\Omega_g = \mathcal{L}_v\Omega_g$$

Proposition : La divergence peut s'écrire de manière équivalente comme :

$$\mathrm{div}(v)\cdot\Omega_g = \mathrm{d}\iota_v\Omega_g$$

Preuve : $\mathcal{L}_v\Omega_g = \mathrm{d}\iota_v\Omega_g + \iota_v\mathrm{d}\Omega_g = \mathrm{d}\iota_v\Omega_g$. □

Proposition : Soit $v \in \mathfrak{X}(X)$ un champ vectoriel. Soit $\alpha = v^\flat$ sa musicalité g-bémol, i.e. $g(v,\cdot) = \alpha$, i.e. $v = \alpha^\sharp$. Alors :

$$\mathrm{div}(v) = -\delta_g(v^\flat)$$

Preuve : On commence avec la définition de la divergence $(\mathrm{div}(v))\,\Omega_g = \mathrm{d}\iota_v\Omega_g$. On y substitue $\alpha^\sharp = v$:

$$(\mathrm{div}(v))\,\Omega_g = \mathrm{d}\iota_{\alpha^\sharp}\Omega_g$$

Mais $\iota_{\alpha^\sharp}\Omega_g = \star_g\alpha$. D'où :

$$(\mathrm{div}(v))\,\Omega_g = \mathrm{d}\star\alpha$$

On y applique $\star_g$ des deux côtés :

$$(\mathrm{div}(v))\star_g\Omega_g = \star_g\mathrm{d}\star_g\alpha$$

En se souvenant que $\star_g\Omega_g = s_g$ et que $\delta_g\alpha = (-1)^{nk+n+1}s_g\star_g\mathrm{d}\star_g$ on trouve alors :

$$(\mathrm{div}(v))\,s_g = (-1)^{nk+n+1}s_g\delta_g\alpha$$

Mais $k = 1$. Donc :

$$\mathrm{div}(v) = -\delta_g\alpha$$

D'où :

$$\mathrm{div}(v) = -\delta_g(v^\flat)$$

□

Proposition : En coordonnées locales $\{x^i\}$ sur U, la divergence covariante de $v = v^i\partial_i$ est explicitement :

$$\mathrm{div}(v)|_U = |G|^{-1/2}\partial_i\left(|G|^{1/2}v^i\right)$$

Preuve : On a $\mathrm{div}(v) = -\delta_g(v^\flat)$. Soit $\alpha = v^\flat$. Localement, $\alpha|_U = \alpha_i\mathrm{d}x^i$ où $\alpha_i = g_{ij}v^j$. Plus haut j'ai montré que localement :

$$\delta_g\alpha|_U = -|G|^{-1/2}\partial_i\left(g^{ij}|G|^{1/2}\alpha_j\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v)|_U &= -\delta_g(v^\flat)|_U \\ &= -\delta_g \alpha|_U \\ &= |G|^{-1/2}\partial_i\left(g^{ij}|G|^{1/2}\alpha_j\right) \\ &= |G|^{-1/2}\partial_i\left(|G|^{1/2}v^i\right) \end{aligned}$$

□

Proposition : En coordonnées locales $\{x^i\}$ sur U, la divergence covariante de $v = v^i\partial_i$ s'écrit explicitement de toutes les manières suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v)|_U &= |G|^{-1/2}\partial_i\left(|G|^{1/2}v^i\right) \\ &= \partial_i v^i + v^i|G|^{-1/2}\partial_i|G|^{1/2} \\ &= \partial_i v^i + \frac{1}{2}v^i|G|^{-1}\partial_i|G| \\ &= \partial_i v^i + \frac{1}{2}v^i\partial_i \ln|G| \\ &= \partial_i v^i + v^i\partial_i \ln|G|^{1/2} \\ &= \partial_i v^i + v^i\Gamma^k_{ik} \\ &= \partial_i v^i + \frac{1}{2}v^i g^{kl}\partial_i g_{kl} \end{aligned}$$

Preuve : Calcul direct en utilisant la dernière proposition ainsi que la suite d'égalités dans la section sur la géométrie riemannienne :

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{ik} &= |G|^{-1/2}\partial_i|G|^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}g^{kl}\partial_i g_{kl} \\ &= |G|^{-1/2}\partial_i|G|^{1/2} \end{aligned}$$

□

Remarque : En écrivant $\partial^i f = g^{ij}\partial_j f$, on a aussi :

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \partial_i\partial^i f + (\partial^i f)\Gamma^k_{ik}$$

18.22 Opérateur de Hodge-de Rham $\mathrm{D} = \mathrm{d} + \delta$:

Notation : Posons :

$$\Omega^\bullet(X) := \oplus_{k=0}^n \Omega^k(X)$$
$$\Omega_c^\bullet(X) := \oplus_{k=0}^n \Omega_c^k(X)$$

Remarque : Soit (X, g) pseudo-riemannienne orientable. La forme bilinéaire $(\cdot\,,\,\cdot)_g$ sur chaque $\Omega^k(X)$ s'étend naturellement à une forme bilinéaire sur $\Omega^\bullet(X)$:

$$(\cdot\,,\,\cdot)_g : \Omega^\bullet(X) \times \Omega^\bullet(X) \to \mathbb{R}$$

Cette dernière forme bilinéaire est définie de telle sorte que deux sous-espaces $\Omega^p(X)$ et $\Omega^q(X)$ de $\Omega^\bullet(X)$ soient $(\cdot\,,\,\cdot)_g$-orthogonaux lorsque $p \neq q$.

Remarque : Si g est riemannienne, cette dernière forme bilinéaire $(\cdot\,,\,\cdot)_g$ est un produit scalaire.

Définition : Soit (X, g) pseudo-riemannienne orientable. L'*opérateur de Hodge-de Rham*

$$\mathrm{D} : \Omega^\bullet(X) \to \Omega^\bullet(X)$$

est par définition

$$\mathrm{D} := \mathrm{d} + \delta \in \mathrm{End}(\Omega^\bullet(X))$$

Remarque : Tout comme la codifférentielle δ dépend de la métrique g, l'opérateur de Hodge-de Rham D dépend aussi de g. Pour cette raison, j'écrirai parfois D_g pour spécifier de quel g il s'agit.

Proposition : Soit (X, g) pseudo-riemannienne orientable sans bord. Alors, sur l'espace des formes différentielles à support compact, l'opérateur de Hodge-de Rham D est $(\cdot\,,\,\cdot)_g$-adjoint, i.e. :

$$(\mathrm{D}\alpha, \beta)_g = (\alpha, \mathrm{D}\beta)_g, \qquad \forall \alpha, \beta \in \Omega_c^\bullet(X)$$

Preuve : Compte tenu des hypothèses, $\delta = d'$. Donc $\mathrm{d} + \delta = 2\mathrm{sym}(\mathrm{d})$. Mais $\mathrm{sym}(\mathrm{d})$ est toujours auto-adjoint. Explicitement :

$$((\mathrm{d}+\delta)\alpha, \beta)_g = (\mathrm{d}\alpha, \beta)_g + (\delta\alpha, \beta)_g = (\alpha, \delta\beta)_g + (\alpha, \mathrm{d}\beta)_g = (\alpha, (\mathrm{d}+\delta)\beta)_g$$

□

18.23 Opérateur de Laplace-de Rham Δ :

Définition : Soit (X, g) pseudo-riemannienne orientable. L'*opérateur de Laplace-de Rham* $\Delta \in \mathrm{End}(\Omega^k(X))$ sur l'espace des k-formes différentielles est défini par

$$\Delta := \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d} = (\mathrm{d} + \delta)^2 = \mathrm{D}^2$$

Remarque : L'opérateur de Laplace-de Rham Δ est aussi nommé *laplacien de Hodge*, ou encore *laplacien de Hodge-de Rham*. Tel que discuté plus haut dans la section sur la géométrie riemannienne, l'opérateur de Hodge-de Rham Δ_{LdR} est à ne pas confondre avec l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_{LB}. Sur les fonctions, on a $\Delta_{\mathrm{LdR}} f = -\Delta_{\mathrm{LB}} f$. Plus bas, il sera toujours question de l'opérateur de Laplace-de Rham Δ_{LdR}.

Remarque : Puisque Δ dépend de la métrique g, j'écrirai parfois Δ_g.

Proposition : Soit (X, g) pseudo-riemannienne orientable sans bord. Alors Δ est $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_g$-auto-adjoint sur l'espace des k-formes différentielles à support compact, i.e.

$$(\Delta\alpha, \beta)_g = (\alpha, \Delta\beta)_g, \qquad \forall \alpha, \beta \in \Omega^k_c(X)$$

Preuve : Découle du fait que $\Delta = \mathrm{D}^2 = (\mathrm{d} + \delta)^2$ et du fait que $\mathrm{D} = \mathrm{d} + \delta$ est auto-adjoint lorsque $\partial X = \emptyset$. □

Proposition : Si $\partial X \neq \emptyset$, Δ n'est pas auto-adjoint. Néanmoins, il est auto-adjoint lorsqu'on se restreint aux k-formes différentielles $\alpha \in \Omega^k(X)$ telles que $\alpha|_{\partial X} = 0$ (i.e. conditions de Dirichlet sur les k-formes différentielles ?).

Preuve : TO DO ! ! ! Il faut aussi distinguer ce qu'on veut dire par $\alpha|_{\partial X} = 0$. Est-ce α nul sur $T_{\partial X} X$ ou seulement sur $T_{\partial X} \partial X$? FAIRE LES DÉTAILS ! ! ! □

Preuve : Montrons que si X est à bord Δ n'est pas auto-adjoint. Considérons le contre-exemple suivant :

$$X = [0, 1] \ , \quad g = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x \ , \quad (f_1, f_2)_g = \int_{[0,1]} f_1(x) f_2(x) \mathrm{d}x$$

Dans ce cas, $\Delta f(x) = \partial_x^2 f$. Par intégration par partie, on calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
(\Delta f_1, f_2)_g &= \int_{[0,1]} (\partial_x^2 f_1(x)) f_2(x) \mathrm{d}x \\
&= ((\partial_x f_1(x)) f_2(x))|_0^1 - \int_{[0,1]} (\partial_x f_1(x))(\partial_x f_2(x)) \mathrm{d}x \\
&= ((\partial_x f_1(x)) f_2(x))|_0^1 - (f_1(x)(\partial_x f_2(x)))|_0^1 + \int_{[0,1]} f_1(x)(\partial_x^2 f_2(x)) \mathrm{d}x \\
&= ((\partial_x f_1(x)) f_2(x) - f_1(x)(\partial_x f_2(x)))|_0^1 + (f_1, \Delta f_2)_g
\end{aligned}$$

L'opérateur Δ est ici non auto-adjoint puisque le terme

$$((\partial_x f_1(x)) f_2(x) - f_1(x)(\partial_x f_2(x)))|_0^1$$

est non nul pour $f_1(x) = x^2/2$ et $f_2(x) = 1$. □

Proposition : Soit (X, g) pseudo-riemannienne orientable. Alors $\star\Delta = \Delta\star$.

Preuve : Souvenons-nous que sur $\Omega^k(X)$ on a $\delta = (-1)^{nk+n+1} s_g \star \mathrm{d}\star$ et $\star^2 = (-1)^{nk+k} s_g$. Posons $\alpha \in \Omega^k(X)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\star\Delta\alpha &= \star\delta\mathrm{d}\alpha + \star\mathrm{d}\delta\alpha \\
&= \star(-1)^{n(k+1)+n+1} s_g \star \mathrm{d} \star \mathrm{d}\alpha + \star\mathrm{d}(-1)^{nk+n+1} s_g \star \mathrm{d} \star \alpha \\
&= (-1)^{nk+n+n+1} s_g \star^2 \mathrm{d} \star \mathrm{d}(-1)^{nk+k} s_g \star^2 \alpha + \star\mathrm{d}(-1)^{nk+n+1} s_g \star \mathrm{d}(\star\alpha) \\
&= (-1)^{k+1} \star^2 \mathrm{d} \star \mathrm{d} \star^2 \alpha + \star\mathrm{d}(-1)^{nk+n+1} s_g \star \mathrm{d}(\star\alpha) \\
&= (-1)^{k+1}(-1)^{n(n-k)+n-k} s_g \mathrm{d} \star \mathrm{d} \star^2 \alpha + \star\mathrm{d}(-1)^{nk+n+1} s_g \star \mathrm{d}(\star\alpha) \\
&= \mathrm{d}(-1)^{nk+1} s_g \star \mathrm{d} \star (\star\alpha) + (-1)^{nk+n+1} s_g \star \mathrm{d} \star \mathrm{d}(\star\alpha) \\
&= \mathrm{d}(-1)^{n(n-k)+n+1} s_g \star \mathrm{d} \star (\star\alpha) + (-1)^{n(n-k+1)+n+1} s_g \star \mathrm{d} \star \mathrm{d}(\star\alpha) \\
&= \mathrm{d}\delta(\star\alpha) + \delta\mathrm{d}(\star\alpha) \\
&= \Delta \star \alpha
\end{aligned}$$

□

Définition : Soit (X, g) pseudo-riemannienne orientable. Une k-forme différentielle $\alpha \in \Omega^k(X)$ est dite *harmonique* si $\Delta\alpha = 0$.

Proposition : Soit (X, g) pseudo-riemannienne orientable. Alors l'opérateur de dualité de Hodge envoie des formes différentielles harmoniques à des formes différentielles harmoniques.

Preuve : Soit α harmonique quelconque. Alors $\Delta(\star\alpha) = \star\Delta\alpha = \star 0 = 0$. $\square$

Proposition : Soit (X, g) riemannienne orientable et sans bord. Soit $\alpha \in \Omega_c^k(X)$ une k-forme différentielle à support compact sur X. Alors :

$$\Delta\alpha = 0 \iff \mathrm{d}\alpha = \delta\alpha = 0$$

Preuve : L'implication vers la gauche est directe :

$$\Delta\alpha = \delta\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\delta\alpha = \delta 0 + \mathrm{d}0 = 0$$

Montrons l'implication vers la droite. Supposons $\Delta\alpha = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} 0 &= (0, \alpha)_g \\ &= (\Delta\alpha, \alpha)_g \\ &= ((\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d})\alpha, \alpha)_g \\ &= (\mathrm{d}\delta\alpha, \alpha)_g + (\delta\mathrm{d}\alpha, \alpha)_g \\ &= (\delta\alpha, \delta\alpha)_g + (\mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\alpha)_g \\ &= \|\delta\alpha\|_g^2 + \|\mathrm{d}\alpha\|_g^2 \end{aligned}$$

Puisque la métrique g est riemannienne, $(\cdot\,,\,\cdot)_g$ est défini positif. Donc $\|\delta\alpha\|_g^2 \geq 0$ et $\|\mathrm{d}\alpha\|_g^2 \geq 0$. Donc $\|\delta\alpha\|_g^2 = 0$ et $\|\mathrm{d}\alpha\|_g^2 = 0$. Donc $\delta\alpha = 0$ et $\mathrm{d}\alpha = 0$. $\square$

Remarque : Dans la dernière proposition, il est important d'avoir X sans bord, sinon δ n'est pas l'opérateur adjoint de d. Il est aussi important d'avoir g riemannienne sinon on a pas forcément $(\cdot\,,\,\cdot)_g$ défini positif. Enfin, il est aussi important d'avoir X orientable et α à support compact sinon les hypothèses du théorème de Stokes ne sont pas vérifiées.

Proposition : Soit (X, g) riemannienne orientable et sans bord. Alors l'opérateur de Laplace-de Rham Δ est non négatif sur $\Omega_c^k(M)$, i.e. :

$$(\Delta\alpha, \alpha)_g \geq 0, \qquad \forall \alpha \in \Omega_c^k(X)$$

Preuve : Pareil comme la preuve de la dernière proposition :

$$(\Delta\alpha, \alpha)_g = (\delta\alpha, \delta\alpha)_g + (\mathrm{d}\alpha, \mathrm{d}\alpha)_g = \|\delta\alpha\|_g^2 + \|\mathrm{d}\alpha\|_g^2 \geq 0$$

$\square$

Remarque : Je devrais ajouter de la théorie sur les opérateurs ici. Si g est riemannien, Δ est elliptique. Si g est pseudo-riemannien, Δ est hyperbolique. À faire (dans la section sur l'analyse fonctionnelle, en coordonnées locales). TO DO ! ! !

18.24 Opérateur Δ en coordonnées locales sur $C^\infty(X;\mathbb{R})$:

Proposition : Soit (X,g) une variété pseudo-riemannienne. Soit $f \in C^\infty(X;\mathbb{R})$ une fonction lisse réelle sur X. Considérons une carte locale $(x^1,...,x^n)$ sur un ouvert U en (X,g). Posons $G := \det[g_{ij}] \in C^\infty(U;\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Soit $s_g := \mathrm{sign}(G)$ la signature de g, i.e. le signe de G, de sorte que $|G| = s_g G$. Alors :

$$\Delta f|_U = -\frac{1}{\sqrt{|G|}}\partial_i\left(g^{ij}\sqrt{|G|}\partial_j f\right)$$

Preuve : J'ai démontré plus haut que sur une variété pseudo-riemannienne (X,g), la codifférentielle δ agit localement sur une 1-forme différentielle $\alpha \in \Omega^1(X)$ comme :

$$\delta\alpha|_U = \delta(\alpha_j \mathrm{d}x^j) = -\frac{1}{\sqrt{|G|}}\partial_i\left(g^{ij}\sqrt{|G|}\alpha_j\right)$$

En prenant $\alpha = \mathrm{d}f$, on trouve directement ce qu'on cherche :

$$\Delta f|_U = \delta\mathrm{d}f|_U = \delta\left((\partial_j f)\mathrm{d}x^j\right) = -\frac{1}{\sqrt{|G|}}\partial_i\left(g^{ij}\sqrt{|G|}\partial_j f\right)$$

□

Proposition : Sous les mêmes hypothèses, on peut réécrire $\Delta f|_U$ comme :

$$\Delta f|_U = -g^{ij}\left(\partial_i\partial_j f - \Gamma^k_{ij}\partial_k f\right)$$

Preuve : (preuve 1) : Plus haut, dans la section sur la géométrie riemannienne j'ai démontré que :

$$g^{ij}\Gamma^k_{ij} = \frac{-1}{\sqrt{|G|}}\partial_l(\sqrt{|G|}g^{kl})$$

où :

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}\left(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}\right)$$

sont les symboles de Christoffel de g en coordonnées locales. On calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
\Delta f|_U &= -\left(\sqrt{|G|}\right)^{-1}\partial_i\left(g^{ij}\sqrt{|G|}\partial_j f\right)\\
&= -\left(\sqrt{|G|}\right)^{-1}\left(\partial_i\left(g^{ij}\sqrt{|G|}\right)\partial_j f + g^{ij}\sqrt{|G|}\partial_i\partial_j f\right)\\
&= -\left(\sqrt{|G|}\right)^{-1}\partial_i\left(g^{ij}\sqrt{|G|}\right)\partial_j f - g^{ij}\partial_i\partial_j f\\
&= -\left(\sqrt{|G|}\right)^{-1}\partial_l\left(g^{lk}\sqrt{|G|}\right)\partial_k f - g^{ij}\partial_i\partial_j f\\
&= g^{ij}\Gamma_{ij}^k\partial_k f - g^{ij}\partial_i\partial_j f\\
&= -g^{ij}\left(\partial_i\partial_j f - \Gamma_{ij}^k\partial_k f\right)
\end{aligned}$$

□

Preuve : (preuve 2) : Plus haut, j'ai démontré que localement, pour $\alpha \in \Omega^1(X)$, on a :

$$\delta_g\alpha|_U = -g^{ij}\left(\partial_i\alpha_j - \Gamma_{ij}^k\alpha_k\right)$$

En prenant $\alpha = df$, i.e. $\alpha_i = \partial_i f$, on a directement ce qu'on cherche :

$$\begin{aligned}
\Delta_g f|_U &= \delta_g \mathrm{d}f|_U\\
&= \delta_g\alpha|_U\\
&= -g^{ij}\left(\partial_i\partial_j f - \Gamma_{ij}^k\partial_k f\right)
\end{aligned}$$

□

18.25 Opérateur Δ_g et divergence :

Considérons une fonction $f \in C^\infty(X;\mathbb{R})$. Alors son gradient est $\nabla f = (\mathrm{d}f)^\sharp$. Il suit que la divergence du gradient de f est :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\nabla f) &= -\delta_g(((\mathrm{d}f)^\sharp)^\flat)\\
&= -\delta_g\mathrm{d}f\\
&= -\Delta_g f
\end{aligned}$$

En particulier, en coordonnées locales, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\nabla f) &= -\Delta_g f \\ &= g^{ij}\left(\partial_i\partial_j f - \Gamma^k_{ij}\partial_k f\right)\end{aligned}$$

En particulier, si $J = \nabla f$ est un "courant de charges", alors l'équation $\Delta_g f = -\mathrm{div}(J)$ implique :

$$\Delta_g f = 0 \iff \mathrm{div}(J) = 0$$

Dans le cas d'une métrique pseudo-riemannienne g de type $(+,-,-,-)$ comme en relativité générale, on voit que l'équation de continuité $0 = \mathrm{div}(J)$ sur le gradient $J = \nabla f$ d'une fonction de phase f est équivalent à l'équation d'onde $\Delta_g f = 0$. Une telle relation semble utile pour l'approximation WKB $\psi = \exp(iS/\hbar)$ en prenant $f = S$.

Remarque : Je peux aussi montrer l'égalité $\mathrm{div}(\nabla f) = -\Delta_g f$ en coordonnées locales. Localement, on a :

$$\mathrm{div}(v)|_U = \frac{1}{\sqrt{|G|}}\partial_i\left(\sqrt{|G|}v^i\right)$$

$$\nabla f|_U = g^{ij}\partial_i f\partial_j$$

$$\Delta f|_U = -\frac{1}{\sqrt{|G|}}\partial_i\left(g^{ij}\sqrt{|G|}\partial_j f\right)$$

On trouve en effet :

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\nabla f) &= \mathrm{div}\left(g^{ij}(\partial_i f)\partial_j\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|G|}}\partial_i\left(\sqrt{|G|}g^{ij}\partial_j f\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|G|}}\partial_i\left(g^{ij}\sqrt{|G|}\partial_j f\right) \\ &= -\Delta f|_U\end{aligned}$$

Remarque : Ici, il était question du laplacien de Laplace-de Rham $\Delta_{\mathrm{LdR}} = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}$. Tel que discuté dans la section sur la géométrie riemannienne, sur les fonctions, la relation entre l'opérateur de Laplace-de Rham Δ_{LdR} et celui de Laplace-Beltrami Δ_{LB} est $\Delta_{\mathrm{LdR}} f = -\Delta_{\mathrm{LB}} f$. Ainsi, on a :

$$\mathrm{div}(\nabla f) = -\Delta_{\mathrm{LdR}} f$$

$$\mathrm{div}(\nabla f) = \Delta_{\mathrm{LB}} f$$

Remarque : En écrivant $\partial^i f = g^{ij}\partial_j f$, on a aussi :

$$\Delta_{\mathrm{LB}} f = \mathrm{div}(\nabla f) = \partial_i \partial^i f + (\partial^i f)\Gamma^k_{ik}$$

18.26 Ellipticité de Δ sur $\Omega^1(\Sigma)$:

Remarque : La prochaine proposition se généralise. Mais je n'ai besoin que de l'ellipticité de Δ sur $\Omega^1(\Sigma^2)$.

Proposition : Soit (Σ, g) une surface munie d'une métrique riemannienne g. Alors, $\Delta = \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}$ est un opérateur elliptique agissant sur $\Omega^1(\Sigma)$.

Preuve : Considérons des coordonnées locales $(x^1, x^2) = (x, y)$ sur $U \subset \Sigma$. Soit $\alpha \in \Omega^1(\Sigma)$. Localement, $\alpha|_U = \alpha_1 \mathrm{d}x + \alpha_2 \mathrm{d}y$ pour $\alpha_1, \alpha_2 \in C^\infty(U; \mathbb{R})$. Pour étudier l'ellipticité de Δ sur $\Omega^1(\Sigma)$, il suffit de regarder le symbole principal de Δ sur $\alpha|_U$. C'est-à-dire, il faut regarder les dérivées de plus haut degré de $\Delta\alpha|_U$. D'abord, souvenons-nous que :

$$\delta(\alpha_i \mathrm{d}x^i) = -g^{ij}\partial_i \alpha_j + g^{ij}\Gamma^k_{ij}\alpha_k$$

$$\delta(f \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) = -\star \mathrm{d}(f|G|^{-1/2})$$

Ainsi, en ne gardant successivement que la partie principale, on trouve :

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha|_U &= \delta \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\delta\alpha \\
&= \delta \mathrm{d}(\alpha_j \mathrm{d}x^j) + \mathrm{d}\delta(\alpha_i \mathrm{d}x^i) \\
&= \delta((\partial_1\alpha_2 - \partial_2\alpha_1)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) + \mathrm{d}(-g^{ij}\partial_i\alpha_j + g^{ij}\Gamma^k_{ij}\alpha_k) \\
&\approx -\star\, \mathrm{d}((\partial_1\alpha_2 - \partial_2\alpha_1)|G|^{-1/2}) - g^{ij}\partial_k\partial_i\alpha_j \mathrm{d}x^k + g^{ij}\Gamma^k_{ij}\partial_l\alpha_k \mathrm{d}x^l \\
&\approx -\star\, (\partial_i(\partial_1\alpha_2 - \partial_2\alpha_1))|G|^{-1/2}\mathrm{d}x^i - g^{ij}\partial_k\partial_i\alpha_j \mathrm{d}x^k \\
&= -(\partial_i\partial_1\alpha_2 - \partial_i\partial_2\alpha_1)|G|^{-1/2} \star \mathrm{d}x^i - g^{ij}\partial_k\partial_i\alpha_j \mathrm{d}x^k \\
&= -(\partial_i\partial_1\alpha_2 - \partial_i\partial_2\alpha_1)|G|^{-1/2}\iota_{g^{ij}\partial_j}\Omega_g - g^{ij}\partial_k\partial_i\alpha_j \mathrm{d}x^k \\
&= -(\partial_i\partial_1\alpha_2 - \partial_i\partial_2\alpha_1)|G|^{-1/2}(g^{i1}|G|^{1/2}\mathrm{d}y - g^{i2}|G|^{1/2}\mathrm{d}x) - g^{ij}\partial_k\partial_i\alpha_j \mathrm{d}x^k \\
&= -(\partial_i\partial_1\alpha_2 - \partial_i\partial_2\alpha_1)(g^{i1}\mathrm{d}y - g^{i2}\mathrm{d}x) - g^{ij}\partial_k\partial_i\alpha_j \mathrm{d}x^k \\
&= g^{i2}(\partial_i\partial_1\alpha_2 - \partial_i\partial_2\alpha_1)\mathrm{d}x - g^{i1}(\partial_i\partial_1\alpha_2 - \partial_i\partial_2\alpha_1)\mathrm{d}y - g^{ij}\partial_k\partial_i\alpha_j \mathrm{d}x^k \\
&= (g^{12}\partial_1\partial_1\alpha_2 + g^{22}\partial_2\partial_1\alpha_2 - g^{12}\partial_1\partial_2\alpha_1 - g^{22}\partial_2\partial_2\alpha_1)\mathrm{d}x \\
&\quad +(g^{11}\partial_1\partial_2\alpha_1 + g^{21}\partial_2\partial_2\alpha_1 - g^{11}\partial_1\partial_1\alpha_2 - g^{21}\partial_2\partial_1\alpha_2)\mathrm{d}y \\
&\quad -(g^{11}\partial_1\partial_1\alpha_1 + g^{21}\partial_1\partial_2\alpha_1 + g^{12}\partial_1\partial_1\alpha_2 + g^{22}\partial_1\partial_2\alpha_2)\mathrm{d}x \\
&\quad -(g^{11}\partial_2\partial_1\alpha_1 + g^{21}\partial_2\partial_2\alpha_1 + g^{12}\partial_2\partial_1\alpha_2 + g^{22}\partial_2\partial_2\alpha_2)\mathrm{d}y \\
&= -(g^{11}\partial_1\partial_1\alpha_1 + g^{12}\partial_1\partial_2\alpha_1 + g^{21}\partial_1\partial_2\alpha_1 + g^{22}\partial_2\partial_2\alpha_1)\mathrm{d}x \\
&\quad -(g^{11}\partial_1\partial_1\alpha_2 + g^{21}\partial_2\partial_1\alpha_2 + g^{12}\partial_2\partial_1\alpha_2 + g^{22}\partial_2\partial_2\alpha_2)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Ainsi, le symbole principal de Δ agissant sur $\Omega^1(\Sigma)$ est du type :

$$\alpha_1\mathrm{d}x \mapsto -(g^{11}\partial_1\partial_1\alpha_1 + g^{12}\partial_1\partial_2\alpha_1 + g^{21}\partial_1\partial_2\alpha_1 + g^{22}\partial_2\partial_2\alpha_1)\mathrm{d}x$$

$$\alpha_2\mathrm{d}y \mapsto -(g^{11}\partial_1\partial_1\alpha_2 + g^{21}\partial_2\partial_1\alpha_2 + g^{12}\partial_2\partial_1\alpha_2 + g^{22}\partial_2\partial_2\alpha_2)\mathrm{d}y$$

L'application linéaire correspondante est donc une matrice identité 2×2 multipliée par $\|\xi\|_g^2$, ce qui est inversible dès que $\xi \neq 0$. D'où l'ellipticité de Δ sur $\Omega^1(\Sigma)$ désirée. □

Remarque : Cette dernière proposition serait évidemment fausse si g n'était pas riemannienne mais plus généralement pseudo-riemannienne. En effet, le terme trouvé $\|\xi\|_g^2$ pourrait être nul tout en ayant $\xi \neq 0$, e.g. en prenant ξ *lightlike*.

18.27 Théorème de décomposition de Hodge (version naïve) :

Notation : Posons :

$$\begin{aligned}\Omega^k &:= \Omega^k(X)\\ W_1 &:= \mathrm{im}(\mathrm{d}|_{\Omega^{k-1}})\\ W_2 &:= \mathrm{im}(\delta|_{\Omega^{k+1}})\\ W_3 &:= \mathrm{im}(\Delta|_{\Omega^k})\end{aligned}$$

Proposition : Soit (X, g) une variété riemannienne orientable fermée (i.e. compacte et sans bord).

$$\begin{aligned}W_1^\perp &= \ker\left(\delta : \Omega^k \to \Omega^{k-1}\right)\\ W_2^\perp &= \ker\left(\mathrm{d} : \Omega^k \to \Omega^{k+1}\right)\\ W_3^\perp &= \ker\left(\Delta : \Omega^k \to \Omega^k\right)\end{aligned}$$

Preuve : Montrons la première égalité :

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{im}\left(\mathrm{d} : \Omega^{k-1} \to \Omega^k\right)\right)^\perp &= \{\alpha \in \Omega^k | (\alpha, \mathrm{d}\beta)_g = 0,\ \forall \beta \in \Omega^{k-1}\}\\ &= \{\alpha \in \Omega^k | (\delta\alpha, \beta)_g = 0,\ \forall \beta \in \Omega^{k-1}\}\\ &= \{\alpha \in \Omega^k | \delta\alpha = 0\}\\ &= \ker\left(\delta : \Omega^k \to \Omega^{k-1}\right)\end{aligned}$$

Montrons la seconde égalité :

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{im}\left(\delta : \Omega^{k+1} \to \Omega^k\right)\right)^\perp &= \{\alpha \in \Omega^k | (\alpha, \delta\beta)_g = 0,\ \forall \beta \in \Omega^{k+1}\}\\ &= \{\alpha \in \Omega^k | (\mathrm{d}\alpha, \beta)_g = 0,\ \forall \beta \in \Omega^{k+1}\}\\ &= \{\alpha \in \Omega^k | \mathrm{d}\alpha = 0\}\\ &= \ker\left(\mathrm{d} : \Omega^k \to \Omega^{k+1}\right)\end{aligned}$$

Montrons la troisième égalité :

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{im}\left(\Delta : \Omega^k \to \Omega^k\right)\right)^\perp &= \{\alpha \in \Omega^k | (\alpha, \Delta\beta)_g = 0,\ \forall \beta \in \Omega^k\}\\ &= \{\alpha \in \Omega^k | (\Delta\alpha, \beta)_g = 0,\ \forall \beta \in \Omega^k\}\\ &= \{\alpha \in \Omega^k | \Delta\alpha = 0\}\\ &= \ker\left(\Delta : \Omega^k \to \Omega^{k+1}\right)\end{aligned}$$

□

Proposition : Soit (X, g) une variété riemannienne orientable fermée. Alors :

$$\{0\} = W_1 \cap W_1^\perp$$
$$\{0\} = W_2 \cap W_2^\perp$$
$$\{0\} = W_3 \cap W_3^\perp$$

Preuve : Les W_k, $k = 1, 2, 3$, sont des sous-espaces vectoriels d'un préhilbertien Ω^k. D'où $W_k \cap W_k^\perp = \{0\}$. □

Proposition : Soit (X, g) une variété riemannienne orientable fermée. Alors :

$$W_3^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$$

Preuve : Il suffit de montrer que :

$$\ker\left(\Delta : \Omega^k \to \Omega^k\right) = \ker\left(\delta : \Omega^k \to \Omega^{k-1}\right) \cap \ker\left(\mathrm{d} : \Omega^k \to \Omega^{k+1}\right)$$

Découle de $\Delta\alpha = 0 \iff \mathrm{d}\alpha = \delta\alpha = 0, \forall \alpha \in \Omega^k$. □

Proposition : (FAUSSE PROPOSITION) Soit (X, g) une variété riemannienne orientable fermée. Alors :

$$W_3 = W_1 \oplus W_2$$

Preuve : (FAUSSE PREUVE) En prenant le perpendiculaire de l'égalité de la dernière proposition, on trouve :

$$W_3^{\perp\perp} = (W_1^\perp \cap W_2^\perp)^\perp = W_1^{\perp\perp} \oplus W_2^{\perp\perp}$$

Il suffit alors de montrer que :

$$W_k^{\perp\perp} = W_k, \quad \forall k = 1, 2, 3$$

MAIS JE N'AI AUCUNE RAISON DE CROIRE QUE C'EST VRAI ! ! ! En effet, $W_k < \Omega^k$ est un sous-espace vectoriel d'un préhilbertien. Rien ne me garantit que $W_k^{\perp\perp} = W_k$. □

Remarque : Pour V préhilbertien et $W < V$ non fermé, on a $(W^\perp)^\perp \neq W$. Autrement dit, il y a de fortes chances que la dernière proposition soit fausse. Une manière de remédier à ce problème serait d'utiliser le fait que pour V hilbertien et $W < V$ fermé on a $W^{\perp\perp} = W$. Autrement dit, je pourrais d'abord compléter le préhilbertien Ω^k à un espace de Hilbert, puis considérer la fermeture $\overline{W}$ des sous-espaces considérés. Le problème est que je tomberais dans un contexte d'analyse fonctionnelle qui perd de vue la géométrie derrière. Non, visiblement je suis arrivé à un cul-de-sac. En fait, pour démontrer le théorème de décomposition de Hodge, il ne faut pas passer par l'égalité démontrée plus haut :

$$\left(\mathrm{im}\left(\Delta : \Omega^k \to \Omega^k\right)\right)^{\perp} = \ker\left(\Delta : \Omega^k \to \Omega^k\right)$$

mais plutôt par :

$$\left(\ker\left(\Delta : \Omega^k \to \Omega^k\right)\right)^{\perp} = \mathrm{im}\left(\Delta : \Omega^k \to \Omega^k\right)$$

Cette dernière égalité est difficile à montrer. L'inclusion dans un sens est facile. L'inclusion dans un autre sens demande un théorème de régularité qu'on retrouve dans [Warner]. Cette dernière manière est la bonne manière de démontrer le théorème de décomposition de Hodge. C'est ce que je ferai dans la prochaine section. Mais avant d'y aller, je vais établir d'autres vrais résultats puis établir une fausse preuve du théorème de décomposition de Hodge.

Remarque : Ceci dit, il est vrai que $W_3^{\perp\perp} = W_3$. C'est précisément ce que montre [Warner] quand il montre que :

$$\left(\ker\left(\Delta : \Omega^k \to \Omega^k\right)\right)^{\perp} = \mathrm{im}\left(\Delta : \Omega^k \to \Omega^k\right)$$

Ça passe par un théorème de régularité. Aussi, après coup, par le théorème de décomposition de Hodge on a forcément W_3 fermé dans le préhilbertien $\Omega^k = W_3 \oplus W_3$. Ce sont les sous-espaces W_1 et W_2 qui sont plutôt problématiques. Sont-ils fermés ? On a vu plus haut que si $V = V_1 \oplus V_2$ est préhilbertien, alors V_1 et V_2 sont fermés en V. Dans notre cas, le théorème de décomposition de Hodge dit que $\Omega^k = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3^{\perp}$. On se retrouve donc avec plusieurs égalités :

$$\begin{aligned} \Omega^k &= (W_1 \oplus W_2) \oplus W_3^{\perp} \\ &= W_1 \oplus (W_2 \oplus W_3^{\perp}) \\ &= (W_1 \oplus W_3^{\perp}) \oplus W_2 \end{aligned}$$

Donc, tous les sous-espaces suivants sont fermés en Ω^k :

$$W_1 \qquad W_2 \qquad W_3^{\perp} \qquad W_1 \oplus W_2 \qquad W_2 \oplus W_3^{\perp} \qquad W_1 \oplus W_3^{\perp}$$

Aussi, puisque $\Omega^k = W_3 \oplus W_3^\perp$, alors on a aussi W_3 fermé.

Proposition : On a :

$$W_1 \perp W_2$$
$$W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

Preuve : Montrons la première égalité. Pour $\mu \in \Omega^{k-1}$ et $\nu \in \Omega^{k+1}$ quelconques, on a :

$$(\mathrm{d}\mu, \delta\nu)_g = (\mathrm{d}^2\mu, \nu)_g = (0, \nu)_g = 0$$

La seconde égalité découle de la première. □

Théorème : *(de décomposition de Hodge) :* Soit (X, g) une variété riemannienne orientable fermée. Alors Ω^k se décompose en somme directe orthogonale :

$$\begin{aligned}\Omega^k &= W_1 \oplus W_2 \oplus W_3^\perp \\ &= \operatorname{im}\left(\mathrm{d} : \Omega^{k-1} \to \Omega^k\right) \oplus \operatorname{im}\left(\delta : \Omega^{k+1} \to \Omega^k\right) \oplus \ker\left(\Delta : \Omega^k \to \Omega^k\right)\end{aligned}$$

Preuve : D'abord, on sait que :

$$\begin{aligned}\Omega^k &= W_3 \oplus W_3^\perp \\ &= W_1 \oplus W_2 \oplus W_3^\perp \\ &= \operatorname{im}\left(\mathrm{d} : \Omega^{k-1} \to \Omega^k\right) \oplus \operatorname{im}\left(\delta : \Omega^{k+1} \to \Omega^k\right) \oplus \ker\left(\Delta : \Omega^k \to \Omega^k\right)\end{aligned}$$

(LA PREMIÈRE ÉGALITÉ EST INJUSTIFIÉE ! ! !). (LA SECONDE ÉGALITÉ EST LA FAUSSE PROPOSITION PLUS HAUT ! ! !). □

Remarque : La présente preuve du théorème de décomposition de Hodge est visiblement mauvaise. D'abord car elle utilise la fausse proposition de plus haut et ensuite car elle suppose vrai que :

$$\Omega^k = W_3 \oplus W_3^\perp$$

Mais cette égalité est pour l'instant injustifiée. Souvenons-nous que pour V préhilbertien, on a $V = W \oplus W^\perp$ qui implique W fermé. Mais je n'ai aucune raison de croire, du moins avec ce que j'ai montré jusqu'à présent, que l'espace

$$\operatorname{im}\left(\Delta : \Omega^k \to \Omega^k\right)$$

est fermé en Ω^k. Du moins, ça serait à montrer. Aussi, pour $W < V$ complet dans V préhilbertien on a $V = W \oplus W^\perp$. Donc, pour que la preuve se tienne à peu près, il faudrait démontrer que le sous-espace $W_3 = \mathrm{im}\left(\Delta : \Omega^k \to \Omega^k\right)$ est complet en le préhilbertien Ω^k. Ceci dit, une fois le théorème de décomposition de Hodge établit, oui on a forcément W_1, W_2 et $W_3^\perp$ fermés et oui on a $W_3^{\perp\perp} = W_3$. Cette dernière égalité passe par un théorème de régularité elliptique.

Remarque : Le théorème de décomposition de Hodge dit que tout $\omega \in \Omega^k$ se décompose de manière unique en somme

$$\omega = \mathrm{d}\alpha + \delta\beta + \gamma$$

où $\Delta\gamma = 0$. La décomposition est unique au sens où les termes $\mathrm{d}\alpha$, $\delta\beta$ et γ sont uniques (α et β ne sont pas forcément uniques).

Remarque : Ici, la notion de décomposition en somme directe orthogonale est au sens où chaque paire de sous-espaces est est orthogonale :

$$\begin{aligned}
W_1 &\perp (W_2 \oplus W_3^\perp) \\
W_2 &\perp (W_1 \oplus W_3^\perp) \\
W_3^\perp &\perp (W_1 \oplus W_2) \\
W_1 &\perp W_2 \\
W_1 &\perp W_3 \\
W_2 &\perp W_3
\end{aligned}$$

Proposition : (*théorème de Hodge-de Rham*) Si $\partial X = \emptyset$, alors la cohomologie de de Rham est égal à l'espace des formes harmoniques, i.e. :

$$H^k_{\mathrm{dR}}(X) \cong W_3^\perp = \ker(\Delta|_{\Omega^k})$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned}
H^k_{\mathrm{dR}}(X) &:= \frac{\ker(\mathrm{d}|_{\Omega^k})}{\mathrm{im}(\mathrm{d}|_{\Omega^{k-1}})} \\
&= \frac{W_2^\perp}{W_1} \\
&\cong W_1^\perp \cap W_2^\perp \\
&= W_3^\perp \\
&= \ker(\Delta|_{\Omega^k})
\end{aligned}$$

□

Remarque : Encore une fois, cette preuve est légèrement louche. Une version officielle avec une preuve solide se trouve plus bas.

19 Théorème de décomposition de Hodge :

19.1 Introduction :

Le but de cette section est d'établir le théorème de décomposition de Hodge. Je suivrai à la loupe le livre de F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups* (1983).

19.2 Théorème de décomposition de Hodge :

Soit (M, g) une variété riemannienne orientable fermée (i.e. compacte et sans bord). L'orientabilité de M est nécessaire pour avoir Ω_g global, i.e. $\star$ global, i.e. δ global, i.e. Δ global.

Notation : L'espace des k-formes différentielles harmoniques sur M sera dénoté :

$$\mathcal{H}^k(M) := \ker(\Delta : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M))$$

Notation : Ici pour alléger la notation j'écrirai $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ au lieu de $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_g$ pour le produit scalaire sur $\Omega^k(M)$. De même, j'écrirai plus simplement $\|\cdot\|$ au lieu de $\|\cdot\|_g$ pour la norme L^2 sur $\Omega^k(M)$.

Définition : Soit $\alpha \in \Omega^k(M)$. Alors :

1. $\omega \in \Omega^k(M)$ est une *solution ordinaire* si :
$$\Delta\omega = \alpha$$
2. une fonctionnelle linéaire continue $\ell : \Omega^k(M) \to \mathbb{R}$ est une *solution faible* si :
$$\ell \circ \Delta(\,\cdot\,) = (\alpha, \,\cdot\,)$$

Proposition : Soit $\alpha \in \Omega^k(M)$. Soit ω une solution faible, i.e. $\Delta\omega = \alpha$. Alors la fonctionnelle linéaire ℓ définie par :

$$\begin{aligned} \ell : \Omega^k(M) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \ell(\varphi) = (\omega, \varphi) \end{aligned}$$

est une solution faible (en particulier elle est continue).

Preuve : Montrons d'abord que ℓ est continue (i.e. bornée) :

$$\begin{aligned}
\|\ell\| &= \sup_\alpha \frac{|\ell(\alpha)|}{\|\alpha\|} \\
&= \sup_\alpha \frac{|(\omega,\alpha)|}{\|\alpha\|} \quad \text{(par hyp. sur } \ell) \\
&\leq \sup_\alpha \frac{\|\alpha\|\|\omega\|}{\|\alpha\|} \quad \text{(par Cauchy-Schwarz)} \\
&= \sup_\alpha \|\omega\| \\
&= \|\omega\| \\
&< +\infty \quad \text{(car } M \text{ est compact)}
\end{aligned}$$

D'où ℓ bornée, i.e. continue. On montre ensuite que :

$$\ell \circ \Delta(\,\cdot\,) = (\alpha,\,\cdot\,)$$

Soit $\varphi \in \Omega^k(M)$ quelconque. Alors :

$$\begin{aligned}
\ell \circ \Delta(\varphi) &= \ell(\Delta\varphi) \\
&= (\omega, \Delta\varphi) \quad \text{(par définition de } \ell) \\
&= (\Delta\omega, \varphi) \quad \text{(car } \Delta \text{ est auto-adjoint)} \\
&= (\alpha, \varphi) \quad \text{(car } \omega \text{ est une solution faible } \Delta\omega = \alpha)
\end{aligned}$$

□

Remarque : La dernière proposition indique que si ω est une solution ordinaire, alors ℓ est une solution faible. La proposition suivante est l'implication dans le sens inverse.

Proposition : (*théorème de régularité*) : Soit $\alpha \in \Omega^k(M)$. Supposons que ℓ est une solution faible, i.e. que $\ell \circ \Delta(\,\cdot\,) = (\alpha,\,\cdot\,)$. Alors il existe $\omega \in \Omega^k(M)$ t.q. $\ell(\,\cdot\,) = (\omega,\,\cdot\,)$ où $\Delta\omega = \alpha$.

Preuve : Voir Warner. (à mettre ici) TO DO ! ! ! □

Proposition : Soit $C > 0$ et soit (ω_i) une suite en $\Omega^k(M)$. Supposons que $\|\omega_i\| \leq C$ et $\|\Delta\omega_i\| \leq C$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Alors (ω_i) admet une sous-suite de Cauchy en $\Omega^k(M)$.

Preuve : Voir Warner. (à mettre ici) TO DO ! ! !

Proposition : Pour $0 \leq k \leq n$, l'espace $\mathcal{H}^k(M)$ est de dimension finie.

Preuve : Supposons par l'absurde $\mathcal{H}^k(M)$ de dimension infinie. Alors il existe une suite infinie orthonormale (ω_i) en $\mathcal{H}^k(M)$, i.e. :

$$(\omega_i, \omega_j) = \delta_{i,j}, \ \forall i, j$$

$$\Delta\omega_i = 0, \ \forall i$$

Soit $C = 1$. Alors, par la dernière proposition :

$$\|\omega_i\| = \sqrt{(\omega_i, \omega_i)} = \sqrt{1} = 1 \leq C$$

$$\|\Delta\omega_i\| = \|0\| = 0 \leq C$$

Donc (ω_i) est une suite qui vérifie l'hypothèse de la dernière proposition. Donc (ω_i) admet une sous-suite Cauchy (ω_{i_j}) en $\Omega^k(M)$. Comme (ω_i) est en $\mathcal{H}^k(M)$, alors (ω_{i_j}) est en $\mathcal{H}^k(M)$. Autrement dit, on a une suite (ω_{i_j}) en $\mathcal{H}^k(M)$ qui est Cauchy et orthonormale. Comme (ω_{i_j}) est Cauchy, pour $\epsilon = 1/2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall j_1, j_2 \geq N$:

$$\|\omega_{i_{j_1}} - \omega_{i_{j_2}}\| < \epsilon = 1/2$$

Donc :

$$\begin{aligned}
1/4 &> \|\omega_{i_{j_1}} - \omega_{i_{j_2}}\|^2 \\
&= (\omega_{i_{j_1}} - \omega_{i_{j_2}}, \omega_{i_{j_1}} - \omega_{i_{j_2}}) \\
&= (\omega_{i_{j_1}}, \omega_{i_{j_1}}) - 2(\omega_{i_{j_1}}, \omega_{i_{j_2}}) + (\omega_{i_{j_2}}, \omega_{i_{j_2}}) \\
&= \|\omega_{i_{j_1}}\|^2 - 2(\omega_{i_{j_1}}, \omega_{i_{j_2}}) + \|\omega_{i_{j_2}}\|^2 \\
&= 1 - 0 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

i.e. $1/4 > 2$, ce qui est impossible. D'où $\mathcal{H}^k(M)$ de dimension finie. □

Proposition : Soit $(\omega_i)_{i=1,\ldots,l}$ une base orthonormale de $\mathcal{H}^k(M)$. Soit $\omega \in \Omega^k(M)$. Alors on peut écrire ω de manière unique comme :

$$\omega = \eta + \sum_{i=1}^{l}(\omega, \omega_i)\omega_i$$

où $\eta \in (\mathcal{H}^k(M))^\perp$.

Preuve : Par la dernière proposition, $\mathcal{H}^k(M)$ est de dimension finie. Donc il existe une base finie orthonormale $(\omega_i)_{i=1,\ldots,l}$ de $\mathcal{H}^k(M)$: On pose alors :

$$\eta := \omega - \sum_{i=1}^{l}(\omega, \omega_i)\omega_i$$

Le fait que $\eta \in (\mathcal{H}^k(M))^\perp$ découle de :

$$\begin{aligned}
(\eta, \omega_j) &= (\omega - \sum_{i=1}^{l}(\omega, \omega_i)\omega_i, \omega_j) \\
&= (\omega, \omega_j) - (\sum_{i=1}^{l}(\omega, \omega_i)\omega_i, \omega_j) \\
&= (\omega, \omega_j) - \sum_{i=1}^{l}(\omega, \omega_i)(\omega_i, \omega_j) \\
&= (\omega, \omega_j) - \sum_{i=1}^{l}(\omega, \omega_i)\delta_{i,j} \\
&= (\omega, \omega_j) - (\omega, \omega_j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Proposition : $\Omega^k(M) = (\mathcal{H}^k(M))^\perp \oplus \mathcal{H}^k(M)$.

Preuve : (preuve 1) Par la dernière proposition, ω se décompose de manière unique comme :

$$\omega = \eta + \sum_{i=1}^{l}(\omega, \omega_i)\omega_i$$

où

$$\begin{aligned} \eta &\in (\mathcal{H}^k(M))^\perp \\ \sum_{i=1}^{l}(\omega,\omega_i)\omega_i &\in \mathcal{H}^k(M) \end{aligned}$$

□

Preuve : (preuve 2) $\Omega^k(M)$ est préhilbertien et $\mathcal{H}^k(M) < \Omega^k(M)$ est de dimension finie. Donc $\Omega^k(M) = (\mathcal{H}^k(M))^\perp \oplus \mathcal{H}^k(M)$, par une proposition dans la section sur l'analyse fonctionnelle. □

Corollaire : La décomposition $\Omega^k(M) = (\mathcal{H}^k(M))^\perp \oplus \mathcal{H}^k(M)$ donne lieu à deux projections :

$$\begin{aligned} h &: \Omega^k(M) \to \mathcal{H}^k(M) \\ v &: \Omega^k(M) \to (\mathcal{H}^k(M))^\perp \end{aligned}$$

Explicitement, si $\omega = \eta + \sum_{i=1}^{l}(\omega,\omega_i)\omega_i$ où $\eta \in (\mathcal{H}^k(M))^\perp$ et où $\sum_{i=1}^{l}(\omega,\omega_i)\omega_i \in \mathcal{H}^k(M)$, on a :

$$\begin{aligned} h\omega &= \sum_{i=1}^{l}(\omega,\omega_i)\omega_i \in \mathcal{H}^k(M) \\ v\omega &= \eta \in (\mathcal{H}^k(M))^\perp \end{aligned}$$

Proposition : Il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|\beta\| \leq c\|\Delta\beta\|, \qquad \forall\beta \in (\mathcal{H}^k(M))^\perp$$

Preuve : Supposons par l'absurde que c'est faux. Donc :

$$\forall c > 0,\ \exists\beta \in (\mathcal{H}^k(M))^\perp,\ \text{t.q. } \|\beta\| > c\|\Delta\beta\|$$

i.e. t.q. :

$$\|\Delta\beta\|/\|\beta\| < c^{-1}$$

Donc :

$$\forall\epsilon > 0, \exists\beta \in (\mathcal{H}^k(M))^\perp,\ \text{t.q. } \|\Delta\beta\|/\|\beta\| < \epsilon$$

Donc, il existe une suite β_i telle que :

$$\|\Delta\beta_i\|/\|\beta_i\| \to 0$$

En renormalisant éventuellement à $\beta_i/\|\beta_i\|$, on peut supposer :

$$\|\Delta\beta_i\| \to 0$$

$$\|\beta_i\| = 1$$

Par une proposition plus haut, β_i admet une sous-suite Cauchy. Sans pertes de généralités, on peut supposer β_i Cauchy. Donc la limite $\lim_{i\to+\infty}(\beta_i, \alpha)$ existe pour tout $\alpha \in \Omega^k(M)$. Posons la fonctionnelle linéaire suivante :

$$\ell(\alpha) := \lim_{i\to+\infty}(\beta_i, \alpha), \qquad \forall\alpha \in \Omega^k(M)$$

La fonctionnelle ℓ est bornée :

$$\begin{aligned}
\frac{|\ell(\alpha)|}{\|\alpha\|} &= \frac{|\lim_{i\to+\infty}(\beta_i, \alpha)|}{\|\alpha\|} \\
&= \lim_{i\to+\infty}\frac{|(\beta_i, \alpha)|}{\|\alpha\|} \\
&\leq \lim_{i\to+\infty}\frac{\|\beta_i\|\|\alpha\|}{\|\alpha\|} \\
&= \lim_{i\to+\infty}\|\beta_i\| \\
&= \lim_{i\to+\infty} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

La fonctionnelle ℓ est une solution faible de $\Delta\beta = 0$:

$$\begin{aligned}
\ell(\Delta\varphi) &= \lim_{i\to+\infty}(\beta_i, \Delta\varphi) \\
&= \lim_{i\to+\infty}(\Delta\beta_i, \varphi) \\
&= (\lim_{i\to+\infty}\Delta\beta_i, \varphi) \\
&= (0, \varphi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par le théorème de régularité plus haut, il existe une solution forte β telle que :

$$\ell(\,\cdot\,) = (\beta, \,\cdot\,)$$

$$\Delta\beta = 0$$

Ainsi :

$$\lim_{i\to+\infty}(\beta_i, \alpha) = \ell(\alpha) = (\beta, \alpha)$$

Donc β_i converge faiblement à β. Mais $\|\beta_i\| = 1$. Donc β_i converge fortement à β (POURQUOI ? ? ? On ne sait pas si $\|\beta\| = 1$... ? ? ? TO DO ! !). Puisque $\|\beta_i\| = 1$, alors $\|\beta\| = 1$. Puisque $(\mathcal{H}^k(M))^\perp$ est fermé, alors la suite β_i en $(\mathcal{H}^k(M))^\perp$ converge à $\beta \in (\mathcal{H}^k(M))^\perp$. Mais $\Delta\beta = 0$. Donc $\beta \in \mathcal{H}^k(M)$. Mais $\beta \in (\mathcal{H}^k(M))^\perp$ aussi. Donc $\beta = 0$. Ce qui contredit $\|\beta\| = 1$. Contradiction. □

Remarque : J'ai encore un petit problème dans cette preuve. Elle est à la p.224 de Warner. Je n'arrive pas à passer de la convergence faible à la forte, c'est pas clair. TO DO ! ! !

Rappel : (*corollaire du thm. de Hahn-Banach*) : Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit $F < E$ un sous-espace vectoriel de E. Soit $f \in F'$ une forme linéaire continue sur F. Alors on peut prolonger f en une forme linéaire continue g sur E de même norme que f. (voir la section sur l'analyse fonctionnelle plus haut)

Théorème : (*de décomposition de Hodge*) : Soit M riemannienne fermée orientable. Nous alors les décompositions en sommes directes orthogonales suivantes de $\Omega^k(M)$:

$$\begin{aligned}\Omega^k(M) &= \Delta(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k(M)\\ &= \mathrm{d}\delta(\Omega^k(M)) \oplus \delta\mathrm{d}(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k(M)\\ &= \mathrm{d}(\Omega^{k-1}(M)) \oplus \delta(\Omega^{k+1}(M)) \oplus \mathcal{H}^k(M)\end{aligned}$$

Preuve : Montrons que :

$$\Omega^k(M) = \Delta(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k(M)$$

Par la dernière proposition, on sait que :

$$\Omega^k(M) = (\mathcal{H}^k(M))^\perp \oplus \mathcal{H}^k(M)$$

Il suffit de montrer que :

$$\Delta(\Omega^k(M)) = (\mathcal{H}^k(M))^\perp$$

Pour cela, il suffit de montrer deux inclusions :

1. $\Delta(\Omega^k(M)) \subset (\mathcal{H}^k(M))^\perp$
2. $(\mathcal{H}^k(M))^\perp \subset \Delta(\Omega^k(M))$

Montrons la première inclusion. Soient $\Delta\omega \in \Delta(\Omega^k(M))$ et $\alpha \in \mathcal{H}^k(M)$. Alors :

$$(\Delta\omega, \alpha) = (\omega, \Delta\alpha) = (\omega, 0) = 0$$

Ok. Montrons la seconde inclusion. Soit $\alpha \in (\mathcal{H}^k(M))^\perp$ quelconque. Posons la fonctionnelle linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \ell : \Delta(\Omega^k(M)) &\to \mathbb{R} \\ \ell \circ \Delta(\,\cdot\,) &:= (\alpha, \,\cdot\,) \end{aligned}$$

La fonctionnelle ℓ est bien définie car pour $\beta \in \ker\Delta$ on a :

$$\ell \circ \Delta(\beta) = 0$$

et aussi, puisque $\alpha \in (\ker\Delta)^\perp$:

$$(\alpha, \beta) = 0$$

Montrons ensuite que la fonctionnelle ℓ est bornée sur $\Delta(\Omega^k(M))$. Soit $\varphi \in \Omega^k(M)$ quelconque, i.e. $\Delta\varphi \in \Delta(\Omega^k(M))$ quelconque. Soit $\psi = v\varphi = \varphi - h\varphi \in (\ker\Delta)^\perp$. Alors, en utilisant la dernière proposition, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{|\ell(\Delta\varphi)|}{\|\Delta\varphi\|} &= \frac{|\ell(\Delta\psi)|}{\|\Delta\varphi\|} \\ &= \frac{|\langle\alpha, \psi\rangle|}{\|\Delta\varphi\|} \\ &\leq \frac{\|\alpha\|\|\psi\|}{\|\Delta\varphi\|} \\ &\leq c\frac{\|\alpha\|\|\Delta\psi\|}{\|\Delta\varphi\|} \\ &\leq c\frac{\|\alpha\|\|\Delta\varphi\|}{\|\Delta\varphi\|} \\ &\leq c\|\alpha\| \end{aligned}$$

D'où le fait que la fonctionnelle linéaire ℓ est bornée sur $\Delta(\Omega^k(M))$. Par le *théorème de Hahn-Banach* on peut étendre ℓ à tout l'espace $\Omega^k(M)$:

$$\ell : \Omega^k(M) \to \mathbb{R}$$

Ce dernier ℓ sur $\Omega^k(M)$ est alors une solution faible $\ell \circ \Delta(\cdot) = (\alpha, \cdot)$. Par le *théorème de régularité*, il existe une solution ordinaire $\omega \in \Omega^k(M)$ telle que $\ell(\cdot) = (\omega, \cdot)$ où $\Delta\omega = \alpha$. Donc, $\alpha \in \Delta(\Omega^k(M))$. Ok. On a donc montré que :

$$\Omega^k = \Delta(\Omega^k) \oplus \mathcal{H}^k(M)$$

i.e. que $\Delta(\Omega^k) = (\mathcal{H}^k(M))^\perp$. Il reste à montrer que :

$$\begin{array}{rcl} \Omega^k(M) & = & \Delta(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k(M) \\ & = & \mathrm{d}\delta(\Omega^k(M)) \oplus \delta\mathrm{d}(\Omega^k(M)) \oplus \mathcal{H}^k(M) \\ & = & \mathrm{d}(\Omega^{k-1}(M)) \oplus \delta(\Omega^{k+1}(M)) \oplus \mathcal{H}^k(M) \end{array}$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} \Delta(\Omega^k) & < & \mathrm{d}\delta(\Omega^k) \oplus \delta\mathrm{d}(\Omega^k) \\ & < & \mathrm{d}(\Omega^{k-1}) \oplus \delta(\Omega^{k+1}) \\ & < & (\mathcal{H}^k)^\perp \\ & = & \Delta(\Omega^k) \end{array}$$

Ainsi, la suite d'inclusions de sous-espaces vectoriels est en fait une suite d'égalités. □

Remarque : La variété M doit être :

1. *riemannienne* et non pseudo-riemannienne. C'est nécessaire pour avoir :

$$\Delta\alpha = 0 \iff \mathrm{d}\alpha = \delta\alpha = 0$$

2. *sans bord*. C'est nécessaire pour avoir Δ auto-adjoint.
3. *orientable*. C'est nécessaire pour avoir Ω_g, $\star$, δ et Δ globaux. Ceci dit, G. de Rham dans *Variétés Différentiables* fait ça avec juste une densité sans demander l'orientabilité.

Si une des conditions n'est pas remplie, alors c'est une variante plus ou moins technique du théorème de décomposition de Hodge.

19.3 Opérateur de Green du laplacien Δ :

Remarque : Par le théorème de décomposition de Hodge

$$\Omega^k(M) = \ker(\Delta) \oplus \operatorname{im}(\Delta)$$

les deux projections plus haut :

$$h : \Omega^k(M) \to \ker(\Delta)$$
$$v : \Omega^k(M) \to (\ker(\Delta))^\perp$$

deviennent :

$$h : \Omega^k(M) \to \ker(\Delta)$$
$$v : \Omega^k(M) \to \operatorname{im}(\Delta)$$

Proposition : Il existe un unique *opérateur de Green*

$$G : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$$

tel que :

$$\Delta \circ G = G \circ \Delta = v$$

Preuve : Considérons le laplacien :

$$\Delta : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$$

Considérons sa corestriction à son image :

$$\Delta : \Omega^k(M) \to \operatorname{im}(\Delta)$$

Cette dernière application surjective descend à une application bijective :

$$\Delta : \Omega^k(M)/\ker(\Delta) \to \operatorname{im}(\Delta)$$

C'est-à-dire :

$$\Delta : \operatorname{im}(\Delta) \to \operatorname{im}(\Delta)$$

À cet isomorphisme correspond un unique opérateur inverse :

$$G : \operatorname{im}(\Delta) \to \operatorname{im}(\Delta)$$

tel que :

$$\Delta \circ G = G \circ \Delta = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(\Delta)} : \mathrm{im}(\Delta) \to \mathrm{im}(\Delta)$$

est l'identité. L'opérateur $G : \mathrm{im}(\Delta) \to \mathrm{im}(\Delta)$ est alors étendu à tout $\Omega^k(M)$ via v :

$$G|_{\Omega^k} = G|_{\mathrm{im}(\Delta)} \circ v$$

Sur $\Omega^k(M)$ on a donc :

$$\Delta \circ G = G \circ \Delta = v$$

□

Remarque : Autrement dit :

$$G = (\Delta|_{\mathrm{im}(\Delta)})^{-1} \circ v$$

Proposition : $G \circ h = 0$.

Preuve : $G \circ h = G \circ v \circ h = G \circ 0 = 0$. □

Proposition : G est auto-adjoint.

Preuve : Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^k(M)$. On veut montrer que :

$$(G\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, G\alpha_2)$$

Soient $\beta_1 = v\alpha_1$ et $\beta_2 = v\alpha_2$. Il suffit alors de montrer que :

$$(G\beta_1, \beta_2) = (\beta_1, G\beta_2)$$

Comme $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{im}(\Delta)$, il existe ω_1, ω_2 tels que $\beta_1 = \Delta\omega_1$ et $\beta_2 = \Delta\omega_2$. Il suffit alors de montrer que :

$$(G\Delta\omega_1, \Delta\omega_2) = (\Delta\omega_1, G\Delta\omega_2)$$

i.e. m.q. :

$$(v\omega_1, \Delta\omega_2) = (\Delta\omega_1, v\omega_2)$$

i.e. m.q. :

$$(\omega_1, \Delta\omega_2) = (\Delta\omega_1, \omega_2)$$

Ce qui est vrai car Δ est auto-adjoint. □

Proposition : [Warner, p.225] Soit (α_i) une suite bornée en $\Omega^k(M)$. Alors $(G\alpha_i)$ admet une sous-suite Cauchy.

Preuve : TO DO ! ! ! □

Proposition : L'opérateur de Green G commute avec d, δ et Δ, i.e. :

$$G \circ \Delta = \Delta \circ G$$

$$G \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ G$$

$$G \circ \delta = \delta \circ G$$

Preuve : Montrons la première égalité :

$$\begin{aligned}
\Delta G\alpha &= \Delta G v\alpha \quad (\text{car } G = Gv) \\
&= \Delta G \Delta\beta \quad (\text{car } v\alpha = \Delta\beta \text{ pour un certain } \beta) \\
&= \Delta v\beta \quad (\text{car } G\Delta = v) \\
&= \Delta\beta - \Delta h\beta \\
&= \Delta\beta \quad (\text{car } h\beta \in \ker(\Delta)) \\
&= v\alpha \\
&= G\Delta\alpha
\end{aligned}$$

Montrons la seconde égalité :

$$\begin{aligned}
G \circ \mathrm{d}\alpha &= G \circ \mathrm{d}(\Delta\beta + \gamma) \quad (\text{car } \alpha = \Delta\beta + \gamma, \text{ où } \Delta\gamma = 0) \\
&= G \circ \mathrm{d}\Delta\beta \quad (\text{car } \mathrm{d}\gamma = 0 \text{ puisque } \Delta\gamma = 0) \\
&= G \circ \Delta\mathrm{d}\beta \quad (\text{car } \Delta\mathrm{d} = \mathrm{d}\Delta) \\
&= v\mathrm{d}\beta \quad (\text{car } G \circ \Delta = v) \\
&= \mathrm{d}\beta \quad (*) \\
&= \mathrm{d} \circ v\beta \quad (**) \\
&= \mathrm{d}G\Delta\beta \\
&= \mathrm{d} \circ Gv\alpha \\
&= \mathrm{d} \circ G\alpha
\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ découle du théorème de décomposition de Hodge. L'égalité $(**)$ découle du fait que $h\beta$ est fermé car est dans le noyau de Δ. La troisième égalité est démontrée de la même manière que la seconde. □

19.4 Théorème de Hodge-de Rham :

Théorème : Toute classe de cohomologie de de Rham sur une variété riemannienne compacte orientée sans bord M correspond à un unique représentant harmonique.

Preuve : Soit $\alpha \in \Omega^k(M)$ quelconque. Par le théorème de décomposition de Hodge, α se décompose comme :

$$\begin{aligned}
\alpha &= v\alpha + h\alpha \\
&= \Delta G\alpha + h\alpha \\
&= (\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d})G\alpha + h\alpha \\
&= \mathrm{d}\delta G\alpha + \delta\mathrm{d}G\alpha + h\alpha \\
&= \mathrm{d}\delta G\alpha + \delta G\mathrm{d}\alpha + h\alpha \quad \text{(car d commute avec } G\text{)}
\end{aligned}$$

Si α est fermée, alors :

$$\alpha = \mathrm{d}\delta G\alpha + h\alpha$$

Si on regarde α modulo forme exacte, alors $\mathrm{d}\delta G\alpha$ disparaît. Ainsi :

$$[\alpha] = [h\alpha] \quad \text{(modulo im(d))}$$

C'est-à-dire, α et $h\alpha$ sont dans la même classe de de Rham. Autrement dit, toute classe de de Rham admet un représentant harmonique. Il reste à montrer que ce représentant est unique. Soit $[\alpha]$ une classe de de Rham. Considérons deux représentants α_1 et α_2 de $[\alpha]$. Les deux formes différentielles α_1 et α_2 sont fermées et dans la même classe de de Rham. Alors il existe β tel que :

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \mathrm{d}\beta$$

Maintenant, on considère la projection horizontale :

$$h\alpha_2 - h\alpha_1 = h\mathrm{d}\beta = 0$$

D'où :

$$h\alpha_1 = h\alpha_2$$

D'où l'unicité du représentant harmonique. □

Théorème : (*de Hodge-de Rham*) Soit (M, g) une variété riemannienne compacte orientée sans bord. Alors le k-ième groupe de cohomologie de de Rham est isomorphe à l'espace des k-formes harmoniques :

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathcal{H}^k(M)$$

Preuve : C'est un corollaire de la dernière proposition. □

19.5 Dualité de Poincaré :

Proposition : Soit M une variété compacte orientable sans bord. La restriction de la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} f : \Omega^k(M) \times \Omega^{n-k}(M) &\to \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto f(\alpha, \beta) := \int_M \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

aux formes différentielles fermées descend à :

$$\begin{aligned} f : H^k_{\mathrm{dR}}(M) \times H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(M) &\to \mathbb{R} \\ ([\alpha], [\beta]) &\mapsto f([\alpha], [\beta]) = \int_M \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

Preuve : (preuve 1) Soient α et β fermés. Le produit extérieur

$$\alpha \wedge \beta \in \Omega^n(M)$$

correspond au cup-produit

$$[\alpha] \smile [\beta] = [\alpha \wedge \beta] \in H^n_{\mathrm{dR}}(M)$$

On évalue cette classe de de Rham sur la classe fondamentale $[M]$:

$$\langle [\alpha] \smile [\beta], [M] \rangle = \langle [\alpha \wedge \beta], [M] \rangle = \int_M \alpha \wedge \beta$$

Ce qui est bien défini. Bref, f est bien définie sur les classes de de Rham. □

Preuve : (preuve 2) Il suffit de montrer que si α_1 et α_2 sont fermés on a :

$$f(\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2, \beta_1 + \mathrm{d}\beta_2) = f(\alpha_1, \beta_1)$$

On calcule directement :

$$\begin{aligned}
& f(\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2, \beta_1 + \mathrm{d}\beta_2) \\
= \; & \int_M (\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2) \wedge (\beta_1 + \mathrm{d}\beta_2) \\
= \; & \int_M \alpha_1 \wedge \beta_1 + \int_M \alpha_1 \wedge \mathrm{d}\beta_2 + \int_M (\mathrm{d}\alpha_2) \wedge \beta_1 + \int_M (\mathrm{d}\alpha_2) \wedge (\mathrm{d}\beta_2) \\
= \; & \int_M \alpha_1 \wedge \beta_1 \pm \int_M \mathrm{d}(\alpha_1 \wedge \beta_2) + \int_M \mathrm{d}(\alpha_2 \wedge \beta_1) + \int_M \mathrm{d}(\alpha_2 \wedge \mathrm{d}\beta_2) \quad (*) \\
= \; & \int_M \alpha_1 \wedge \beta_1 \quad (**) \\
= \; & f(\alpha_1, \beta_1)
\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ découle de Leibniz et du fait que α_1, α_2 et $\mathrm{d}\beta_2$ sont fermés. L'égalité $(**)$ découle du fait que $\partial M = \emptyset$. □

Proposition : L'application

$$\begin{aligned}
f : H^k_{\mathrm{dR}}(M) \times H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(M) &\to \mathbb{R} \\
([\alpha], [\beta]) &\mapsto f([\alpha], [\beta]) = \int_M \alpha \wedge \beta
\end{aligned}$$

est non dégénérée.

Preuve : D'abord, on montre que f est non dégénérée par la gauche. Soit $[\alpha] \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ non nul Il faut montrer que $f([\alpha], \cdot)$ est non nul. Par le théorème de Hodge-de Rham, la classe de de Rham $[\alpha]$ admet un représentant harmonique $\alpha \in \mathcal{H}^k(M)$. Puisque $\star$ commute avec Δ, on a $\star\alpha \in \mathcal{H}^{n-k}(M)$. Encore par le théorème de Hodge-de Rham, à $\star\alpha$ harmonique correspond $[\star\alpha] \in H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(M)$. Donc :

$$f([\alpha], [\star\beta]) = \int_M \alpha \wedge \star\alpha = \|\alpha\|^2 \neq 0$$

D'où $f([\alpha], [\star\alpha]) \neq 0$. D'où $f([\alpha], \cdot) \neq 0$. La non dégénérescence par la droite se fait de la même manière. □

Remarque : Par la dernière proposition, l'application $f : H^k_{\mathrm{dR}}(M) \times H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathbb{R}$ est un appariement de dualité. Ce faisant, le triple

$$(H^k_{\mathrm{dR}}(M), H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(M), f)$$

est une paire duale.

Théorème : (*dualité de Poincaré*) Soit M une variété compacte orientable sans bord. Alors il y a un isomorphisme

$$H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(M) \cong (H^k_{\mathrm{dR}}(M))^*$$

Preuve : L'appariement de dualité

$$\begin{aligned} f : H^k_{\mathrm{dR}}(M) \times H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(M) &\to \mathbb{R} \\ ([\alpha],[\beta]) &\mapsto f([\alpha],[\beta]) = \int_M \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

induit un isomorphisme musical :

$$\begin{aligned} H^{n-k}_{\mathrm{dR}}(M) &\to (H^*_{\mathrm{dR}}(M))^* \\ [\alpha] &\mapsto f(\,\cdot\,,[\alpha]) \end{aligned}$$

□

20 Théorie de Hodge et fibrés :

20.1 Introduction :

Le but de cette section est d'étudier la théorie de Hodge sur les k-formes différentielles à valeurs en un espace vectoriel ou encore un fibré.

(ici je devrais prendre $G \hookrightarrow P \to B$ avec (B,g) riemannien pour suivre la notation des fibrés principaux. Et aussi faire ça dans la section précédente sur la dualité de Hodge).

20.2 k-formes à valeurs en un espace vectoriel (rappel) :

Soit V un espace vectoriel réel. Soit $\{v_1, ..., v_{\dim(V)}\}$ une base de V.

Définition : On dénote par

$$\Omega^k(X;V) := \Omega^k(X) \otimes_{\mathbb{R}} V$$

les k-formes à valeurs en V. Toute k-forme α à valeurs en V se décompose en

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\dim(V)} \alpha_i \otimes v_i$$

où $\alpha_i \in \Omega^k(X)$ pour $i = 1, ..., \dim(V)$. On étend le produit extérieur sur les k-formes réelles à celles ayant valeurs en V :

$$(\wedge, \otimes) : (\wedge^p T^*X \otimes_{\mathbb{R}} V) \times (\wedge^q T^*X \otimes_{\mathbb{R}} V) \to \left(\wedge^{p+q} T^*X\right) \otimes_{\mathbb{R}} (V \otimes_{\mathbb{R}} V)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\dim(V)} \alpha_i \otimes v_i\right) (\wedge, \otimes) \left(\sum_{j=1}^{\dim(V)} \beta_j \otimes w_j\right) := \sum_{i,j=1}^{\dim(V)} \left(\alpha_i \wedge \beta_j\right) \otimes \left(v_i \otimes w_j\right)$$

On étend de la même manière le produit extérieur pour les k-formes à valeurs en un fibré vectoriel réel $E \to X$:

$$\Omega^k(X;E) := \Omega^k(X) \otimes_{\mathbb{R}} E$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\dim(V)} \alpha_i \otimes s_i\right) (\wedge, \otimes) \left(\sum_{j=1}^{\dim(V)} \beta_j \otimes t_j\right) := \sum_{i,j=1}^{\dim(V)} \left(\alpha_i \wedge \beta_j\right) \otimes \left(s_i \otimes t_j\right)$$

où $s_i, t_j \in \Gamma^\infty(X; E)$, pour tout i, j.

20.3 Extension de $\star$ à $\Omega^k(X;V)$ et $\Omega^k(X;E)$:

L'opérateur Hodge-étoile $\star$ sur $\Omega^k(X)$ s'étend naturellement à $\Omega^k(X;V)$ et $\Omega^k(X;E)$:

$$\star\left(\sum_{i=1}^{\dim(V)} \alpha_i \otimes v_i\right) := \sum_{i=1}^{\dim(V)} (\star\alpha_i) \otimes v_i$$

et

$$\star\left(\sum_{i=1}^{\dim(V)} \alpha_i \otimes s_i\right) := \sum_{i=1}^{\dim(V)} (\star\alpha_i) \otimes s_i$$

20.4 h-produit extérieur $\wedge^h$ sur $\Omega^k(X;V)$ et $\Omega^k(X;E)$:

Donnons à V un produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_h : V \times V \to \mathbb{R}$$

Puisqu'il est symétrique et $\mathbb{R}$-linéaire, il descend à un produit scalaire bien défini sur $V \otimes_{\mathbb{R}} V$:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_h : V \otimes_{\mathbb{R}} V \to \mathbb{R}$$

Définition : Le h-produit extérieur $\wedge^h$ en $x \in X$ est par définition :

$$\wedge^h : \left(\wedge^p T_x^* X \otimes_{\mathbb{R}} V\right) \times \left(\wedge^q T_x^* X \otimes_{\mathbb{R}} V\right) \to \left(\wedge^{p+q} T_x^* X\right)$$

donné par

$$\left(\sum_{i=1}^{\dim(V)} \alpha_i \otimes v_i\right) \wedge^h \left(\sum_{j=1}^{\dim(V)} \beta_j \otimes w_j\right) := \sum_{i,j=1}^{\dim(V)} \left(\alpha_i \wedge \beta_j\right) h(v_i, w_j)$$

La définition est la même si l'on prend un fibré $E \to X$ au lieu de V mais cette fois avec $h \in \Gamma^\infty(E^* \otimes E^*)$ produit scalaire fibre par fibre.

20.5 h-produit scalaire sur $\Omega^k(X;V)$ et $\Omega^k(X;L)$:

Le h-produit extérieur $\wedge^h$ induit un produit scalaire sur $\Omega^k(X;V)$ et $\Omega^k(X;E)$. Soient $\alpha\otimes v$ et $\beta\otimes w$ deux k-formes à valeurs en V. Posons :

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{g,h} : \left(\wedge^k T^*X\otimes_{\mathbb{R}} V\right)\times\left(\wedge^k T^*X\otimes_{\mathbb{R}} V\right)\to\wedge^n T^*X$$

$$\langle\alpha\otimes v,\beta\otimes w\rangle_{g,h} := \langle\alpha,\beta\rangle_g\langle v,w\rangle_h$$

Ainsi,

$$(\alpha\otimes v)\wedge^h\star(\beta\otimes w)=\langle\alpha\otimes v,\beta\otimes w\rangle_{g,h}\Omega_g=\langle\alpha,\beta\rangle_g\langle v,w\rangle_h\Omega_g$$

On étend $\mathbb{R}$-linéairement aux k-formes plus générales. La construction est la même pour les k-formes à valeurs en un fibré vectoriel E au lieu d'à valeurs en un espace vectoriel V.

Ensuite, pour $\alpha\otimes v,\beta\otimes w\in\Omega^k(X;V)$ deux k-formes différentielles à valeurs en V, posons :

$$(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{g,h} : \Omega^k(X;V)\times\Omega^k(X;V)\to\mathbb{R}$$

défini par :

$$(\alpha\otimes v,\beta\otimes w)_{g,h} := \int_X(\alpha\otimes v)\wedge^h\star(\beta\otimes w)=\int_X\langle\alpha\otimes v,\beta\otimes w\rangle_{g,h}\Omega_g$$

La construction est la même pour les éléments de $\Omega^k(X;E)$, mais cette fois on doit considérer $h\in\Gamma^\infty(E^*\otimes E^*)$ qui est un produit scalaire point par point pour les fibres de E.

Remarque : En trivialisation locale s_α sur U_α, pour tout $\eta_1,\eta_2\in\Omega^k(X;E)$, on a

$$\langle\eta_1,\eta_2\rangle_{g,h}|_{U_\alpha}=\langle(\eta_1)_\alpha,(\eta_2)_\alpha\rangle_{g,h_\alpha}$$

Cette égalité est indépendante du s_α choisi.

20.6 Codifférentielle covariante extérieure δ_A :

Soit $G\hookrightarrow P\to X$ un G-fibré principal sur (X,g) pseudo-riemannien orienté muni d'une forme de connexion $A\in\mathcal{A}$. Soit $E:=P\times_\rho V$ un V-fibré vectoriel associé.

Définition : La *codifférentielle covariante extérieure*

$$\delta_A : \Omega^k(X;E) \to \Omega^{k-1}(X;E)$$

est définie par

$$\delta_A := (-1)^k \star^{-1} \mathrm{d}_A \star = (-1)^{nk+n+1} s_g \star \mathrm{d}_A \star$$

Remarque : δ_A dépend de g et de A.

Proposition : Pour $\alpha \in \Omega^k(X;E)$, $\beta \in \Omega^{k+1}(X;E)$ et $h \in \Gamma^\infty(E^* \otimes E^*)$ un produit scalaire point par point. Alors on a l'égalité :

$$\int_{\partial X} \alpha \wedge^h \star\beta = \int_X \alpha \wedge^{\mathrm{d}_A h} \star\beta + (\mathrm{d}_A\alpha, \beta)_{g,h} - (\alpha, \delta_A \beta)_{g,h}$$

Preuve : On utilise la formule de Leibniz trouvée beaucoup plus haut :

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge^h \beta) = \alpha \wedge^{\mathrm{d}_A h} \beta + (\mathrm{d}_A \alpha) \wedge^h \beta + (-1)^k \alpha \wedge^h (\mathrm{d}_A \beta)$$

qui implique

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge^h \star\beta) = \alpha \wedge^{\mathrm{d}_A h} \star\beta + (\mathrm{d}_A \alpha) \wedge^h \star\beta + (-1)^k \alpha \wedge^h (\mathrm{d}_A \star \beta)$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial X} \alpha \wedge^h \star\beta &= \int_X \mathrm{d}(\alpha \wedge^h \star\beta) \\
&= \int_X \Big(\alpha \wedge^{\mathrm{d}_A h} \star\beta + (\mathrm{d}_A \alpha) \wedge^h \star\beta + (-1)^k \alpha \wedge^h (\mathrm{d}_A \star \beta)\Big) \\
&= \int_X \Big(\alpha \wedge^{\mathrm{d}_A h} \star\beta + (\mathrm{d}_A \alpha) \wedge^h \star\beta + (-1)^k \alpha \wedge^h \star(\star^{-1}\mathrm{d}_A \star \beta)\Big) \\
&= \int_X \Big(\alpha \wedge^{\mathrm{d}_A h} \star\beta + (\mathrm{d}_A \alpha) \wedge^h \star\beta + (-1)^k \alpha \wedge^h \star((-1)^{k+1}\delta_A \beta)\Big) \\
&= \int_X \alpha \wedge^{\mathrm{d}_A h} \star\beta + (\mathrm{d}_A\alpha, \beta)_{g,h} - (\alpha, \delta_A \beta)_{g,h}
\end{aligned}$$

Corollaire : Soient $\alpha \in \Omega^k(X;E)$ et $\beta \in \Omega^{k+1}(X;E)$. Si h est d_A-adapté, i.e. $\mathrm{d}_A h = 0$, alors on a l'égalité

$$\int_{\partial X} \alpha \wedge^h \star\beta = (\mathrm{d}_A\alpha, \beta)_{g,h} - (\alpha, \delta_A \beta)_{g,h}$$

Corollaire : Si en plus $\partial X = \emptyset$, alors

$$(\mathrm{d}_A\alpha, \beta)_{g,h} = (\alpha, \delta_A\beta)_{g,h}$$

En particulier, δ_A est l'opérateur adjoint d_A^* de d_A.

Remarque : Sous la dernière proposition, δ_A dépend de A, g et h. Mais par définition, δ_A ne dépend que de A et g. VÉRIFIER SI TOUT MARCHE ! ! !

20.7 Le carré de la codifférentielle covariante extérieure δ_A :

Proposition : Soit $\alpha \in \Omega^k(X;E)$ où E est un V-fibré associé à P via une représentation $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$. Alors :

$$\delta_A^2\alpha = (-1)^{nk+k+1} s_g \star_g \big((\rho_* F_A)(\wedge,\circ)(\star_g\alpha)\big)$$

Preuve : Souvenons-nous que :

$$\mathrm{d}_A^2\alpha = (\rho_* F_A)(\wedge,\circ)\alpha$$

$$\delta_A|_{\Omega^k(X;E)} = (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A \star_g$$

$$\star^2|_{\Omega^k(X;E)} = (-1)^{nk+k} s_g$$

On trouve alors directement :

$$\begin{aligned}
\delta_A^2\alpha &= \delta_A\,(\delta_A\alpha)\\
&= (-1)^{n(k-1)+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A \star_g \Big((-1)^{nk+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A \star_g \alpha\Big)\\
&= (-1)^n \star_g \mathrm{d}_A \star_g^2 \mathrm{d}_A \star_g \alpha\\
&= (-1)^n \star_g \mathrm{d}_A (-1)^{n(n-k+1)+(n-k+1)} s_g \mathrm{d}_A \star_g \alpha\\
&= (-1)^{nk+k+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A^2 \star_g \alpha\\
&= (-1)^{nk+k+1} s_g \star_g \big((\rho_* F_A)(\wedge,\circ)(\star_g\alpha)\big)
\end{aligned}$$

□

Proposition : $\delta_A^2\alpha = -\star_g^{-1}\big((\rho_* F_A)(\wedge,\circ)(\star_g\alpha)\big)$

Preuve : Il suffit d'utiliser plutôt la formule

$$\delta_A|_{\Omega^k(X;E)} = (-1)^k \star_g^{-1} \mathrm{d}_A \star_g$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\delta_A^2\alpha &= \delta_A(\delta_A\alpha)\\
&= (-1)^{k-1} \star_g^{-1} \mathrm{d}_A \star_g \left((-1)^k \star_g^{-1} \mathrm{d}_A \star_g \alpha\right)\\
&= -\star_g^{-1} \mathrm{d}_A^2 \star_g \alpha\\
&= -\star_g^{-1}\big((\rho_* F_A)(\wedge,\circ)(\star_g\alpha)\big)
\end{aligned}$$

□

Remarque : En particulier, si $\rho = \mathrm{Ad}$, i.e. $E = \mathrm{Ad}P$, on a alors non seulement :

$$\mathrm{d}_A^2\alpha = [F_A \wedge \alpha]$$

mais aussi :

$$\delta_A^2\alpha = (-1)^{nk+k+1} s_g \star_g [F_A \wedge (\star_g \alpha)]$$

i.e. avec un $\star_g^{-1}$ on a :

$$\delta_A^2\alpha = - \star_g^{-1} [F_A \wedge (\star_g \alpha)]$$

En particulier, sur (X, g) riemannien, on a :

$$\delta_A^2 F_A = - \star_g [F_A \wedge (\star_g F_A)]$$

Corollaire : Pour $\eta \in \Omega^2(\Sigma; \mathrm{Ad}P_\Sigma)$ où Σ est de dimension 2, on a :

$$\delta_A^2\eta = [\star\eta, \star F_A]$$

Preuve : On calcule directement :

$$\delta_A^2\eta = - \star [F_A \wedge \star\eta] = -[(\star F_A) \wedge (\star\eta)] = [(\star\eta) \wedge (\star F_A)] = [\star\eta, \star F_A]$$

□

Corollaire : Sur Σ de dimension 2, on a :

$$\delta_A^2 F_A = 0$$

Preuve : On a $F_A \in \Omega^2(\Sigma; \mathrm{Ad}P_\Sigma)$. Donc, par le dernier corollaire, on a :

$$\delta_A^2 F_A = [\star\eta, \star F_A] = 0$$

□

Remarque : Souvenons-nous que κ défini par $\kappa^\sharp = -K$ où K est la forme de Killing, donne un produit scalaire défini positif fibre par fibre pour le fibré $\mathrm{Ad}P$.

Proposition : Pour $\alpha \in \Omega^k(X; \mathrm{Ad}P)$ et $\beta \in \Omega^{k+2}(X; \mathrm{Ad}P)$ on a :

$$([F_A \wedge \alpha], \beta)_{g,\kappa} = -(\alpha, \star_g^{-1}[F_A \wedge (\star_g \beta)])_{g,\kappa}$$

Preuve : Puisque $(\mathrm{d}_A^2\alpha, \beta)_{g,\kappa} = (\mathrm{d}_A\alpha, \delta_A\beta)_{g,\kappa} = (\alpha, \delta_A^2\beta)_{g,\kappa}$, on a directement :

$$([F_A \wedge \alpha], \beta)_{g,\kappa} = (\alpha, -\star_g^{-1}\,[F_A \wedge (\star_g\beta)])_{g,\kappa}$$

□

Remarque : Ceci semble découler de la proposition plus forte suivante.

Proposition : Pour $\alpha \in \Omega^p(X; \mathrm{Ad}P)$ et $\beta \in \Omega^q(X; \mathrm{Ad}P)$ on a :

$$0 = [F_A \wedge \alpha] \wedge^\kappa \beta + \alpha \wedge^\kappa [F_A \wedge \beta]$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{d}^2\,(\alpha \wedge^\kappa \beta) \\
&= \mathrm{d}\,((\mathrm{d}_A\alpha) \wedge^\kappa \beta + (-1)^p \alpha \wedge^\kappa (\mathrm{d}_A\beta)) \\
&= (\mathrm{d}_A^2\alpha) \wedge^\kappa \beta + (-1)^{p+1}(\mathrm{d}_A\alpha) \wedge^\kappa (\mathrm{d}_A\beta) \\
&\quad + (-1)^p(\mathrm{d}_A\alpha) \wedge^\kappa (\mathrm{d}_A\beta) + (-1)^p(-1)^p\alpha \wedge^\kappa (\mathrm{d}_A^2\beta) \\
&= (\mathrm{d}_A^2\alpha) \wedge^\kappa \beta + \alpha \wedge^\kappa (\mathrm{d}_A^2\beta) \\
&= [F_A \wedge \alpha] \wedge^\kappa \beta + \alpha \wedge^\kappa [F_A \wedge \beta]
\end{aligned}$$

□

20.8 Opérateur de Hodge-de Rham covariant $\mathbf{D}_{A,g} = \mathbf{d}_A + \delta_{A,g}$:

Notation : $\Omega^\bullet(X;E) := \oplus_{k=0}^n \Omega^k(X;E)$.

Remarque : Le produit scalaire $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{g,h}$ sur chaque $\Omega^k(X;E)$ s'étend naturellement à un produit scalaire sur $\Omega^\bullet(X;E)$:

$$(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{g,h} : \Omega^\bullet(X;E) \times \Omega^\bullet(X;E) \to \mathbb{R}$$

Ce dernier produit scalaire est défini de telle sorte que deux sous-espaces $\Omega^p(X;E)$ et $\Omega^q(X;E)$ de $\Omega^\bullet(X;E)$ soient $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{g,h}$-orthogonaux lorsque $p \neq q$.

Définition : L'*opérateur de Hodge-de Rham covariant*

$$\mathrm{D}_{A,g} : \Omega^\bullet(X;E) \to \Omega^\bullet(X;E)$$

est par définition

$$\mathrm{D}_{A,g} := \mathrm{d}_A + \delta_{A,g} \in \mathrm{End}(\Omega^\bullet(X;E))$$

Proposition : Si $\partial X = \emptyset$, l'opérateur de Hodge-de Rham covariant $\mathrm{D}_{A,g}$ est $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{g,h}$-auto-adjoint. C'est-à-dire :

$$(\mathrm{D}_{A,g}\alpha, \beta)_{g,h} = (\alpha, \mathrm{D}_{A,g}\beta)_{g,h}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \Omega^\bullet(X;E)$$

Preuve : $\partial X = \emptyset$ implique $\delta_{A,g} = \mathrm{d}'_A$. Donc $\mathrm{d}_A + \delta_{A,g} = 2\mathrm{sym}(\mathrm{d}_A)$. Mais $\mathrm{sym}(\mathrm{d}_A)$ est toujours auto-adjoint. Explicitement :

$$\begin{aligned}((\mathrm{d}_A + \delta_{A,g})\alpha, \beta)_{g,h} &= (\mathrm{d}_A\alpha, \beta)_{g,h} + (\delta_{A,g}\alpha, \beta)_{g,h} \\ &= (\alpha, \delta_{A,g}\beta)_{g,h} + (\alpha, \mathrm{d}_A\beta)_{g,h} \\ &= (\alpha, (\mathrm{d}_A + \delta_{A,g})\beta)_{g,h}\end{aligned}$$

□

20.9 Opérateur de Laplace-de Rham covariant $\Delta_{A,g}$:

Remarque : Il y a deux manières de définir un *opérateur de Laplace-de Rham covariant*. D'abord on peut poser $\Delta_{A,g} : \Omega^k(X;E) \to \Omega^k(X;E)$ sur les k-formes différentielles :

$$\Delta_{A,g} := \mathrm{d}_A\delta_{A,g} + \delta_{A,g}\mathrm{d}_A$$

Ou encore, on peut poser $\Delta_{A,g} : \Omega^k(X;E) \to \Omega^\bullet(X;E)$ par :

$$\Delta_{A,g} := \mathrm{D}^2_{A,g} = (\mathrm{d}_A + \delta_{A,g})^2 = \mathrm{d}_A^2 + \mathrm{d}_A\delta_{A,g} + \delta_{A,g}\mathrm{d}_A + \delta^2_{A,g}$$

Ces deux définitions ne sont pas équivalentes car si la courbure est non nulle on a $(\mathrm{d}_A)^2 \neq 0$ et $(\delta_{A,g})^2 \neq 0$.

Proposition : Soit (X,g) riemannien tel que $\partial X = \emptyset$. Soit $\Delta_{A,g} := \mathrm{d}_A\delta_{A,g}+\delta_{A,g}\mathrm{d}_A$. Soit $\alpha \in \Omega^k(X;E)$. Alors $\Delta_{A,g}\alpha = 0$ si et seulement si $\mathrm{d}_A\alpha = 0$ et $\delta_A\alpha = 0$.

Preuve : Basons-nous sur la preuve pour $\Delta : \Omega^k(X) \to \Omega^k(X)$. Soit $\alpha \in \Omega^k(X;E)$. D'abord, si $\mathrm{d}_A\alpha = 0$ et $\delta_{A,g}\alpha = 0$ alors on a directement $\Delta_{A,g}\alpha = 0$. Montrons ensuite que $\Delta_{A,g}\alpha = 0$ implique $\mathrm{d}_A\alpha = 0$ et $\delta_{A,g}\alpha = 0$. Supposons $\Delta_{A,g}\alpha = 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
0 &= (\Delta_{A,g}\alpha, \alpha) \\
&= (\mathrm{d}_A\delta_{A,g}\alpha + \delta_{A,g}\mathrm{d}_A\alpha, \alpha)_{g,\kappa} \\
&= (\mathrm{d}_A\delta_{A,g}\alpha, \alpha)_{g,\kappa} + (\delta_{A,g}\mathrm{d}_A\alpha, \alpha)_{g,\kappa} \\
&= (\delta_{A,g}\alpha, \delta_{A,g}\alpha)_{g,\kappa} + (\mathrm{d}_A\alpha, \mathrm{d}_A\alpha)_{g,\kappa} \\
&= \|\delta_{A,g}\alpha\|^2_{g,\kappa} + \|\mathrm{d}_A\alpha\|^2_{g,\kappa}
\end{aligned}$$

Mais $\|\delta_{A,g}\alpha\|^2_{g,\kappa} \geq 0$ et $\|\mathrm{d}_A\alpha\|^2_{g,\kappa} \geq 0$. Donc $\|\delta_{A,g}\alpha\|^2_{g,\kappa} = 0$ et $\|\mathrm{d}_A\alpha\|^2_{g,\kappa} = 0$. Donc $\delta_{A,g}\alpha = 0$ et $\mathrm{d}_A\alpha = 0$. □

Proposition : Soit (X,g) riemannien tel que $\partial X = \emptyset$. Soit $\Delta_{A,g} := \mathrm{D}^2_{A,g}$. Soit $\alpha \in \Omega^k(X;E)$. Alors $\Delta_{A,g}\alpha = 0$ si et seulement si $\mathrm{d}_A\alpha = 0$ et $\delta_A\alpha = 0$.

Preuve : D'abord, si $\mathrm{d}_A\alpha = 0$ et $\delta_A\alpha = 0$ on a donc $\mathrm{D}_{A,g}\alpha = 0$, ce qui implique en retour $\Delta_{A,g}\alpha = \mathrm{D}^2_{A,g}\alpha = 0$. Inversement, supposons $\Delta_{A,g}\alpha = 0$. Alors :

$$\mathrm{d}_A^2\alpha + (\mathrm{d}_A\delta_{A,g} + \delta_{A,g}\mathrm{d}_A)\alpha + \delta^2_{A,g}\alpha = 0$$

Mais :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_A^2\alpha &\in \Omega^{k+2}(X;E) \\ (\mathrm{d}_A\delta_{A,g}+\delta_{A,g}\mathrm{d}_A)\alpha &\in \Omega^{k}(X;E) \\ \delta_{A,g}^2\alpha &\in \Omega^{k-2}(X;E) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_A^2\alpha &= 0 \\ (\mathrm{d}_A\delta_{A,g}+\delta_{A,g}\mathrm{d}_A)\alpha &= 0 \\ \delta_{A,g}^2\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Par la dernière proposition, on sait que $(\mathrm{d}_A\delta_{A,g}+\delta_{A,g}\mathrm{d}_A)\alpha = 0$ implique $\mathrm{d}_A\alpha = 0$ et $\delta_{A,g}\alpha = 0$. □

Remarque : Pour la suite, je m'en tiendrai à ce laplacien :

$$\Delta_{A,g} := \mathrm{d}_A\delta_{A,g}+\delta_{A,g}\mathrm{d}_A$$

20.10 Ellipticité de $\Delta_{A,g}$ sur $\Omega^1(\Sigma; \mathrm{Ad}P)$:

Remarque : La prochaine proposition se généralise. Mais je n'ai besoin que de l'ellipticité de $\Delta_{A,g}$ sur $\Omega^1(\Sigma^2; \mathrm{Ad}P)$ pour $G = \mathrm{SU}(2)$.

Proposition : Soit (Σ, g) une surface munie d'une métrique riemannienne g. Soit P un $\mathrm{SU}(2)$-fibré principal sur Σ. Soit $A \in \mathcal{A}_P$, une forme de connexion. Alors, $\Delta_{A,g} = \mathrm{d}_A\delta_{A,g} + \delta_{A,g}\mathrm{d}_A$ est un opérateur elliptique agissant sur $\Omega^1(\Sigma; \mathrm{Ad}P)$.

Preuve : Considérons des coordonnées locales $(x^1, x^2) = (x, y)$ sur $U \subset \Sigma$. Soit $\eta \in \Omega^1(\Sigma; \mathrm{Ad}P)$. Localement, $\eta|_U = \eta_1\mathrm{d}x + \eta_2\mathrm{d}y$ pour $\eta_1, \eta_2 \in C^\infty(U; \mathrm{Ad}P)$. Pour étudier l'ellipticité de $\Delta_{A,g}$ sur $\Omega^1(\Sigma; \mathrm{Ad}P)$, il suffit de regarder le symbole principal de $\Delta_{A,g}$ sur $\eta|_U$. C'est-à-dire, il faut regarder les dérivées de plus haut degré de $\Delta_{A,g}\alpha|_U$. Soit $s_\alpha : U \to \pi^{-1}(U) \subset P$, une section trivialisante locale. Soit $A_\alpha := s_\alpha^* A \in \Omega^1(U; \mathfrak{g})$. Soit $\eta_\alpha := s_\alpha^*\eta^\sharp \in \Omega^1(U; \mathfrak{g})$. Je sais que Δ_g est elliptique sur $\Omega^1(\Sigma)$. Donc, pour montrer que $\Delta_{A,g}$ est elliptique sur $\Omega^1(\Sigma; \mathrm{Ad}P)$, il suffit de montrer qu'il a le même symbole principal que Δ_g. Souvenons-nous que $\delta_{A,g} = (-1)^{nk+n+1}s_g \star_g \mathrm{d}_A\star_g$. Ici $n = 2$, $k = 1$ et $s_g = 1$, donc $\delta_{A,g} = -\star_g \mathrm{d}_A\star_g$ On calcule directement :

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{A,g}\eta)_\alpha &= (\mathrm{d}_A\delta_{A,g}\eta + \delta_{A,g}\mathrm{d}_A\eta)_\alpha \\
&= -(\mathrm{d}_A \star_g \mathrm{d}_A \star_g \eta + \star_g\mathrm{d}_A \star_g \mathrm{d}_A\eta)_\alpha \\
&= -\mathrm{d}_A \star_g (\mathrm{d} \star_g \eta_\alpha + [A_\alpha \wedge \star_g\eta_\alpha]) - \star_g\mathrm{d}_A \star_g (\mathrm{d}\eta_\alpha + [A_\alpha \wedge \eta_\alpha]) \\
&\approx -\mathrm{d}_A \star_g (\mathrm{d} \star_g \eta_\alpha) - \star_g\mathrm{d}_A \star_g (\mathrm{d}\eta_\alpha) \\
&= -\mathrm{d}_A(\star_g\mathrm{d} \star_g \eta_\alpha) - \star_g\mathrm{d}_A(\star_g\mathrm{d}\eta_\alpha) \\
&= -\mathrm{d} \star_g \mathrm{d} \star_g \eta_\alpha - [A_\alpha \wedge \star_g\mathrm{d} \star_g \eta_\alpha] - \star_g\mathrm{d} \star_g \mathrm{d}\eta_\alpha - \star_g[A \wedge \star_g\mathrm{d}\eta_\alpha] \\
&\approx -\mathrm{d} \star_g \mathrm{d} \star_g \eta_\alpha - \star_g\mathrm{d} \star_g \mathrm{d}\eta_\alpha \\
&= \mathrm{d}\delta_g\eta_\alpha + \delta_g\mathrm{d}\eta_\alpha \\
&= \Delta_g\eta_\alpha
\end{aligned}
$$

□

20.11 Variations de la codifférentielle covariante extérieure $\delta_{A,g}$:

Soit $G \hookrightarrow P \to X$ un G-fibré principal sur (X, g) pseudo-riemannien. Soit $E := P \times_\rho V$ un V-fibré vectoriel associé. Soit $A \in \mathcal{A}$ et $\tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}$. Soit $\eta \in \Omega^k(X; E)$.

Proposition : $\delta_{A+\tau^\sharp}\eta = \delta_A\eta + (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g ((\rho_*\tau)(\wedge, \circ)(\star_g\eta))$

Preuve : En se souvenant que $\mathrm{d}_{A+\tau^\sharp}\eta = \mathrm{d}_A\eta + (\rho_*\tau)(\wedge, \circ)\eta$, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\delta_{A+\tau^\sharp}\eta &= (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_{A+\tau^\sharp} \star_g \eta \\
&= (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g (\mathrm{d}_A \star_g \eta + (\rho_*\tau)(\wedge, \circ)(\star_g\eta)) \\
&= (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A \star_g \eta + (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g ((\rho_*\tau)(\wedge, \circ)(\star_g\eta)) \\
&= \delta_A\eta + (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g ((\rho_*\tau)(\wedge, \circ)(\star_g\eta))
\end{aligned}$$

□

Corollaire : Si $\rho = \mathrm{Ad}$, i.e. $\eta \in \Omega^k(X; \mathrm{Ad}P)$, alors :

$$\delta_{A+\tau^\sharp}\eta = \delta_A\eta + (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g [\tau \wedge \star_g\eta]$$

Remarque : J'ai déjà fait ce calcul il y a longtemps avec une autre notation, il est dans la section qui suit.

Corollaire : Toujours avec $\rho = \mathrm{Ad}$, on a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \delta_{A+\epsilon\tau^\sharp}\eta = (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g [\tau \wedge \star_g\eta]$$

En particulier, pour $n = 2$ et $s_g = 1$ on a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \delta_{A+\epsilon\tau^\sharp}\eta = - \star_g [\tau \wedge \star_g\eta]$$

20.12 Variations de la codifférentielle covariante extérieure $\delta_{A,g}$ (vieux) :

Notation : $(\lrcorner, \circ)$ est à la fois le produit intérieur d'un champ vectoriel dans une k-forme différentielle et à la fois la composition au niveau des fibrés respectif.

Proposition : Soient $A \in \mathcal{A}_X$, $\tau \in \Omega^1(X; \mathrm{Ad}P_X)$ et $\eta \in \Omega^k(X; E)$ quelconques pour $E = P_X \times_\rho V$ sur (X, g) pseudo-riemanien. Alors :

$$\delta_{A+\tau^\sharp}\eta = \delta_A\eta - (\rho_*\tau^g)(\lrcorner, \circ)\eta$$

Preuve : Soient $A \in \mathcal{A}_X$, $\tau \in \Omega^1(X; \mathrm{Ad}P_X)$ et $\eta \in \Omega^k(X; E)$ quelconques (où $E := P_X \times_\rho V$). Souvenons-nous de l'égalité

$$\star_g(\alpha \wedge \star_g\beta) = (-1)^{pn-qp+nq+q} s_g \iota_{\alpha_p^g} \dots \iota_{\alpha_1^g}\beta$$

pour α une p-forme et β une q-forme. Dans le cas particulier où $p = 1$, on a $\alpha_1 = \alpha$ et donc :

$$\star_g(\alpha \wedge \star_g\beta) = (-1)^{n+nq} s_g \iota_{\alpha^g}\beta = (-1)^{n+nq} s_g \alpha^g \lrcorner \beta$$

Dans le cas particulier où $\alpha = \tau \in \Omega^1(X; \mathrm{Ad}P_X)$ et $\eta = \beta \in \Omega^k(X; E)$ des formes différentielles à valeurs en des fibrés, la dernière égalité se réécrit :

$$\star_g((\rho_*\tau)(\wedge, \circ) \star_g \eta) = (-1)^{n+nk} s_g (\rho_*\tau^g)(\lrcorner, \circ)\eta$$

où $\tau^g \in \mathfrak{X}(X; \mathrm{Ad}P_X)$. Souvenons-nous que du fait que l'égalité $\mathrm{d}^A = \mathrm{d} + (\rho_*A)(\wedge, \circ)$ impliquait que $\mathrm{d}^{A+\tau^\sharp} = \mathrm{d}^A + (\rho_*\tau^\sharp)(\wedge, \circ)$. Cette dernière formule, ainsi que l'identité

$$\delta_A = (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A \star_g$$

implique directement :

$$\begin{aligned}
\delta_{A+\tau^\sharp}\eta &= (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_{A+\tau^\sharp} \star_g \eta \\
&= (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g (\mathrm{d}_A + (\rho_*\tau)(\wedge, \circ)) \star_g \eta \\
&= (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A \star_g \eta + (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g ((\rho_*\tau)(\wedge, \circ) \star_g \eta) \\
&= \delta_A\eta + (-1)^{nk+n+1} s_g (-1)^{n+nk} s_g (\rho_*\tau^g)(\lrcorner, \circ)\eta \\
&= \delta_A\eta - (\rho_*\tau^g)(\lrcorner, \circ)\eta
\end{aligned}$$

□

Remarque : Si $k = 1$, on a grosso modo $\tau^g \lrcorner \eta = \langle \tau, \eta \rangle_g$. Il faut combiner ça avec ρ_* et $\circ$. Ça semble donner une formule pas trop mal et fort utile. En particulier, pour $\rho = \mathrm{Ad}$, on a un mélange de $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ au niveau des formes et du crochet $[\cdot, \cdot]$ au niveau de $\mathrm{Ad}P$. Définir une notation pour ça, e.g. $[\langle \cdot, \cdot \rangle_g]$ ou encore $\langle [\cdot, \cdot] \rangle_g$, mais moins horrible si possible. À FAIRE ! ! !

20.13 Variations du laplacien $\Delta_{A,g}$:

Soit $G \hookrightarrow P \to X$ un G-fibré principal sur (X, g) pseudo-riemannien. Soit $E := P \times_\rho V$ un V-fibré vectoriel associé. Soit $A \in \mathcal{A}$ et $\tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}$. Soit $\eta \in \Omega^k(X; E)$.

Proposition : On a :

$$
\begin{aligned}
& \Delta_{A+\tau^\sharp,g}\eta \\
= \; & \Delta_A\eta + (\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\,(\delta_A\eta) + (-1)^{nk+n+1}s_g \mathrm{d}_A\left(\star_g((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\eta))\right) \\
& +(-1)^{nk+n+1}s_g(\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\left(\star_g((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\eta))\right) \\
& +(-1)^{nk+1}s_g \star_g \left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g \mathrm{d}_A\eta)\right) \\
& +\delta_{A,g}\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right) + (-1)^{nk+1}s_g \star_g \left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right))\right)
\end{aligned}
$$

Preuve : Souvenons-nous des égalités suivantes :

$$\Delta_{A,g} := \mathrm{d}_A\delta_{A,g} + \delta_{A,g}\mathrm{d}_A$$

$$
\begin{aligned}
\delta_{A+\tau^\sharp}\eta &= \delta_A\eta + (-1)^{nk+n+1}s_g \star_g \left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\eta)\right) \\
\mathrm{d}_{A+\tau^\sharp}\eta &= \mathrm{d}_A\eta + (\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta
\end{aligned}
$$

On a d'abord :

$$\Delta_{A+\tau^\sharp,g}\eta = \mathrm{d}_{A+\tau^\sharp}\delta_{A+\tau^\sharp,g}\eta + \delta_{A+\tau^\sharp,g}\mathrm{d}_{A+\tau^\sharp}\eta$$

La première partie est donnée par :

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{d}_{A+\tau^\sharp}\delta_{A+\tau^\sharp,g}\eta \\
= \; & \mathrm{d}_{A+\tau^\sharp}\left(\delta_A\eta + (-1)^{nk+n+1}s_g \star_g \left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\eta)\right)\right) \\
= \; & \mathrm{d}_{A+\tau^\sharp}\left(\delta_A\eta\right) + (-1)^{nk+n+1}s_g \mathrm{d}_{A+\tau^\sharp}\left(\star_g((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\eta))\right) \\
= \; & \mathrm{d}_A\delta_A\eta + (\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\,(\delta_A\eta) + (-1)^{nk+n+1}s_g \mathrm{d}_A\left(\star_g((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\eta))\right) \\
& +(-1)^{nk+n+1}s_g(\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\left(\star_g((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\eta))\right)
\end{aligned}
$$

La seconde partie est donnée par :

$$\begin{aligned}
& \delta_{A+\tau^\sharp,g}\mathrm{d}_{A+\tau^\sharp}\eta \\
= \; & \delta_{A+\tau^\sharp,g}\left(\mathrm{d}_A\eta + (\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right) \\
= \; & \delta_{A+\tau^\sharp,g}\left(\mathrm{d}_A\eta\right) + \delta_{A+\tau^\sharp,g}\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right) \\
= \; & \delta_{A,g}\mathrm{d}_A\eta + (-1)^{n(k+1)+n+1}s_g \star_g \left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\mathrm{d}_A\eta)\right) \\
& +\delta_{A,g}\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right) + (-1)^{n(k+1)+n+1}s_g \star_g \left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right))\right) \\
= \; & \delta_{A,g}\mathrm{d}_A\eta + (-1)^{nk+1}s_g \star_g \left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\mathrm{d}_A\eta)\right) \\
& +\delta_{A,g}\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right) + (-1)^{nk+1}s_g \star_g \left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right))\right)
\end{aligned}$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned}
& \Delta_{A+\tau^\sharp,g}\eta \\
= \; & \mathrm{d}_{A+\tau^\sharp}\delta_{A+\tau^\sharp,g}\eta + \delta_{A+\tau^\sharp,g}\mathrm{d}_{A+\tau^\sharp}\eta \\
= \; & \mathrm{d}_A\delta_A\eta + (\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\left(\delta_A\eta\right) + (-1)^{nk+n+1}s_g\mathrm{d}_A\left(\star_g((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\eta))\right) \\
& +(-1)^{nk+n+1}s_g(\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\left(\star_g((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\eta))\right) \\
& +\delta_{A,g}\mathrm{d}_A\eta + (-1)^{nk+1}s_g \star_g \left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\mathrm{d}_A\eta)\right) \\
& +\delta_{A,g}\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right) + (-1)^{nk+1}s_g \star_g \left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right))\right) \\
= \; & \Delta_A\eta + (\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\left(\delta_A\eta\right) + (-1)^{nk+n+1}s_g\mathrm{d}_A\left(\star_g((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\eta))\right) \\
& +(-1)^{nk+n+1}s_g(\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\left(\star_g((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\eta))\right) \\
& +(-1)^{nk+1}s_g \star_g \left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\mathrm{d}_A\eta)\right) \\
& +\delta_{A,g}\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right) + (-1)^{nk+1}s_g \star_g \left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right))\right)
\end{aligned}$$

□

Corollaire : On a :

$$\begin{aligned}
& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\Delta_{A+\epsilon\tau^\sharp,g}\eta \\
= \; & (\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\left(\delta_A\eta\right) + (-1)^{nk+n+1}s_g\mathrm{d}_A\left(\star_g((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\eta))\right) \\
& +(-1)^{nk+1}s_g \star_g \left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\mathrm{d}_A\eta)\right) + \delta_{A,g}\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right)
\end{aligned}$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned}
& \Delta_{A+\epsilon\tau^\sharp,g}\eta \\
= \; & \Delta_A\eta + \epsilon(\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\,(\delta_A\eta) + \epsilon(-1)^{nk+n+1}s_g \mathrm{d}_A\left(\star_g((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\eta))\right) \\
& +\epsilon^2(-1)^{nk+n+1}s_g(\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\left(\star_g((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\eta))\right) \\
& +\epsilon(-1)^{nk+1}s_g\star_g\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\mathrm{d}_A\eta)\right) \\
& +\epsilon\delta_{A,g}\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right) + \epsilon^2(-1)^{nk+1}s_g\star_g\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right))\right)
\end{aligned}$$

Si on prend la dérivée en ϵ à $\epsilon = 0$ on trouve :

$$\begin{aligned}
& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\Delta_{A+\epsilon\tau^\sharp,g}\eta \\
= \; & (\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\,(\delta_A\eta) + (-1)^{nk+n+1}s_g\mathrm{d}_A\left(\star_g((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\eta))\right) \\
& +(-1)^{nk+1}s_g\star_g\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)(\star_g\mathrm{d}_A\eta)\right) + \delta_{A,g}\left((\rho_*\tau)(\wedge,\circ)\eta\right)
\end{aligned}$$

□

Corollaire : Si g est riemannien (i.e. $s_g = 1$) et si $E = \mathrm{Ad}P$, alors :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\Delta_{A+\epsilon\tau^\sharp,g}\eta &= [\tau\wedge(\delta_A\eta)] + (-1)^{nk+n+1}\mathrm{d}_A\star_g[\tau\wedge(\star_g\eta)] \\
& \quad +(-1)^{nk+1}\star_g[\tau\wedge(\star_g\mathrm{d}_A\eta)] + \delta_{A,g}[\tau\wedge\eta]
\end{aligned}$$

Corollaire : Si g est riemannien (i.e. $s_g = 1$) et si $E = \mathrm{Ad}P$, et si $n = 2$, alors :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\Delta_{A+\epsilon\tau^\sharp,g}\eta &= [\tau\wedge(\delta_A\eta)] - \mathrm{d}_A\star_g[\tau\wedge(\star_g\eta)] \\
& \quad -\star_g[\tau\wedge(\star_g\mathrm{d}_A\eta)] + \delta_{A,g}[\tau\wedge\eta]
\end{aligned}$$

Corollaire : Si g est riemannien (i.e. $s_g = 1$) et si $E = \mathrm{Ad}P$, et si $n = 2$ et si $k = 0$ on a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\Delta_{A+\epsilon\tau^\sharp,g}\eta = \delta_{A,g}[\tau\wedge\eta] - \star_g[\tau\wedge(\star_g\mathrm{d}_A\eta)]$$

Preuve : D'abord, sous les conditions $s_g = 1$, $E = \mathrm{Ad}P$, $k = 0$, $n = 2$ on trouve :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\Delta_{A+\epsilon\tau^\sharp,g}\eta &= [\tau\wedge(\delta_A\eta)] - \mathrm{d}_A\star_g[\tau\wedge(\star_g\eta)] \\
& \quad -\star_g[\tau\wedge(\star_g\mathrm{d}_A\eta)] + \delta_{A,g}[\tau\wedge\eta]
\end{aligned}$$

Ensuite, puisque η est une 0-forme, on a $\delta_A \eta = 0$. Aussi, $[\tau \wedge (\star_g \eta)]$ est une 3-forme, donc nulle. On trouve donc :

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \Delta_{A+\epsilon\tau^\sharp,g}\eta = - \star_g [\tau \wedge (\star_g \mathrm{d}_A \eta)] + \delta_{A,g}[\tau \wedge \eta]$$

□

20.14 Opérateur $\star^\sharp$ sur P :

Définition : L'opérateur

$$\star^\sharp : \Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V) \to \Omega^{n-k}_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V)$$

est défini par

$$\star^\sharp(\,\cdot\,) := (\star(\,\cdot\,)_\sharp)^\sharp$$

C'est-à-dire, pour tout $\eta^\sharp \in \Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V)$ par $\star^\sharp\eta^\sharp = (\star\eta)^\sharp$.

Proposition : Soit $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ section trivialisante locale de P sur $U \subset X$. Alors

$$(\star\eta)_\alpha = \star\eta_\alpha$$

Preuve : Ceci découle du fait que $\star$ agit sur l'aspect « forme différentielle » de η alors que passer de η à η_α n'agit que sur l'aspect « vectoriel » de η. □

Corollaire : $s_\alpha^*(\star^\sharp\eta^\sharp) = \star\eta_\alpha$.

Preuve : On a

$$s_\alpha^*(\star^\sharp\eta^\sharp) = s_\alpha^*((\star\eta)^\sharp) = (\star\eta)_\alpha = \star\eta_\alpha$$

□

20.15 Théorème de décomposition de Hodge covariant :

Soit (X, g) orientable et fermé (compact et sans bord). Soit $P \to X$ un G-fibré principal. Soit $A \in \mathcal{A}$ et soit $\Omega^k := \Omega^k(X; \mathrm{Ad}P)$. Considérons les sous-espaces de Ω^k suivants :

$$W_1 := \mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^{k-1}})$$
$$W_2 := \mathrm{im}(\delta_A|_{\Omega^{k+1}})$$
$$W_3 := \mathrm{im}(\Delta_A|_{\Omega^k})$$

Proposition : Les perpendiculaires de W_1, W_2 et W_3 en Ω^k sont donnés par :

$$W_1^\perp = \ker(\delta_A|_{\Omega^k})$$
$$W_2^\perp = \ker(\mathrm{d}_A|_{\Omega^k})$$
$$W_3^\perp = \ker(\Delta_A|_{\Omega^k})$$

Preuve : D'abord, pour $W_1^\perp$:

$$\begin{aligned}
W_1^\perp &= \{\alpha \in \Omega^k | (\alpha, \beta)_g = 0,\ \forall \beta \in W_1\} \\
&= \{\alpha \in \Omega^k | (\alpha, \mathrm{d}_A\gamma)_g = 0,\ \forall \gamma \in \Omega^{k-1}\} \\
&= \{\alpha \in \Omega^k | (\delta_A\alpha, \gamma)_g = 0,\ \forall \gamma \in \Omega^{k-1}\} \\
&= \{\alpha \in \Omega^k | \delta_A\alpha = 0\} \\
&= \ker(\delta_A|_{\Omega^k})
\end{aligned}$$

Ensuite, pour $W_2^\perp$:

$$\begin{aligned}
W_2^\perp &= \{\alpha \in \Omega^k | (\alpha, \beta)_g = 0,\ \forall \beta \in W_2\} \\
&= \{\alpha \in \Omega^k | (\alpha, \delta_A\gamma)_g = 0,\ \forall \gamma \in \Omega^{k+1}\} \\
&= \{\alpha \in \Omega^k | (\mathrm{d}_A\alpha, \gamma)_g = 0,\ \forall \gamma \in \Omega^{k+1}\} \\
&= \{\alpha \in \Omega^k | \mathrm{d}_A\alpha = 0\} \\
&= \ker(\mathrm{d}_A|_{\Omega^k})
\end{aligned}$$

Enfin pour W_3 :

$$\begin{aligned}
W_3^\perp &= \{\alpha \in \Omega^k | (\alpha, \beta)_g = 0,\ \forall \beta \in W_3\} \\
&= \{\alpha \in \Omega^k | (\alpha, \Delta_A\gamma)_g = 0,\ \forall \gamma \in \Omega^k\} \\
&= \{\alpha \in \Omega^k | (\Delta_A\alpha, \gamma)_g = 0,\ \forall \gamma \in \Omega^k\} \\
&= \{\alpha \in \Omega^k | \Delta_A\alpha = 0\} \\
&= \ker(\Delta_A|_{\Omega^k})
\end{aligned}$$

□

Corollaire : On a en particulier les intersections suivantes :

$$\{0\} = W_1 \cap W_1^\perp = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^{k-1}}) \cap \ker(\delta_A|_{\Omega^k})$$
$$\{0\} = W_2 \cap W_2^\perp = \mathrm{im}(\delta_A|_{\Omega^{k+1}}) \cap \ker(\mathrm{d}_A|_{\Omega^k})$$
$$\{0\} = W_3 \cap W_3^\perp = \mathrm{im}(\Delta_A|_{\Omega^k}) \cap \ker(\Delta_A|_{\Omega^k})$$

Preuve : Découle du fait que pour $W < V$ un sous-espace vectoriel d'un préhilbertien V on a $W \cap W^\perp = \{0\}$. □

Proposition :

$$W_3^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$$

Preuve : Découle du fait que pour tout $\alpha \in \Omega^k$ on a $\Delta_A\alpha = 0$ si et seulement si $\mathrm{d}_A\alpha = \delta_A\alpha = 0$. □

Proposition : (FAUSSE PROPOSITION) On a les égalités suivantes :

$$W_3 = W_1 \oplus W_2$$

Preuve : (FAUSSE PREUVE) En prenant le perpendiculaire de l'égalité de la dernière proposition, on trouve :

$$W_3^{\perp\perp} = (W_1^\perp \cap W_2^\perp)^\perp = W_1^{\perp\perp} \oplus W_2^{\perp\perp}$$

Il reste donc à montrer que :

$$W_1^{\perp\perp} = W_1$$
$$W_2^{\perp\perp} = W_2$$
$$W_3^{\perp\perp} = W_3$$

MAIS C'EST PROBABLEMENT FAUX ! ! ! À réparer. TO DO ! ! ! □

Remarque : Le problème dans cette proposition est le même que dans la section plus haut avec le laplacien usuel. En effet, dans un préhilbertien V, avoir $W^{\perp\perp} = W$ implique W fermé. Bref, je n'ai aucun théorème qui peut me garantir que $W_k^{\perp\perp} = W_k$ pour $k = 1, 2, 3$. C'est problématique. Et c'est pourquoi dans la preuve du théorème de décomposition de Hodge il fallait passer par un autre chemin, avec un théorème de régularité elliptique, etc. Je devrais refaire la même chose pour le présent cas du laplacien covariant. C'est probablement déjà dans un article ou un livre quelque part. C'est à trouver, sinon c'est à faire. TO DO ! ! !

Proposition : Si A est une connexion plate, alors on a :

$$W_1 \perp W_2$$

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

Preuve : Montrons la première égalité :

$$(\mathrm{d}_A\mu, \delta_A\nu)_g = (\mathrm{d}_A^2\mu, \nu)_g = ([F_A \wedge \mu], \nu)_g = ([0 \wedge \mu], \nu)_g = (0, \nu)_g = 0$$

D'où $W_1 \perp W_2$. Ceci implique en retour $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. □

Remarque : Si A est une connexion générique (i.e. pas nécessairement plate), on a généralement pas W_1 perpendiculaire à W_2 et $W_1 \cap W_2$ peut être non nul.

Théorème : *(de décomposition de Hodge covariant pour connexions plates) :* Soit (X, g) orientable et fermé (compact et sans bord). Soit $P \to X$ un G-fibré principal. Soit $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{fl}}$ une connexion plate. Alors $\Omega^k := \Omega^k(X; \mathrm{Ad}P)$ se décompose en somme directe orthogonale :

$$\begin{aligned}\Omega^k &= W_1 \oplus W_2 \oplus W_3^\perp \\ &= \mathrm{im}\left(\mathrm{d}_A : \Omega^{k-1} \to \Omega^k\right) \oplus \mathrm{im}\left(\delta_A : \Omega^{k+1} \to \Omega^k\right) \oplus \ker\left(\Delta_A : \Omega^k \to \Omega^k\right)\end{aligned}$$

Preuve : D'abord, on sait que :

$$\begin{aligned}\Omega^k &= W_3 \oplus W_3^\perp \\ &= \mathrm{im}\left(\Delta_A : \Omega^k \to \Omega^k\right) \oplus \ker\left(\Delta_A : \Omega^k \to \Omega^k\right)\end{aligned}$$

(LA PREMIÈRE ÉGALITÉ EST PROBABLEMENT FAUSSE, la seconde est vraie). Par une proposition plus haut, on sait que :

$$\mathrm{im}\left(\Delta_A : \Omega^k \to \Omega^k\right) = \mathrm{im}\left(\mathrm{d}_A : \Omega^{k-1} \to \Omega^k\right) \oplus \mathrm{im}\left(\delta_A : \Omega^{k+1} \to \Omega^k\right)$$

(C'ÉTAIT LA FAUSSE PROPOSITION ! ! !). On trouve donc :

$$\Omega^k = \mathrm{im}\left(\mathrm{d}_A : \Omega^{k-1} \to \Omega^k\right) \oplus \mathrm{im}\left(\delta_A : \Omega^{k+1} \to \Omega^k\right) \oplus \ker\left(\Delta_A : \Omega^k \to \Omega^k\right)$$

□

Remarque : Cette preuve est évidemment fausse. Il me faudra trouver une autre preuve. TO DO ! ! !

Remarque : Si A n'est pas plat, le dernier théorème n'est pas vrai.

Remarque : Si A est plat, on a $\mathrm{d}_A^2 = 0$. Ainsi, $\mathrm{d}_A : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$ définit un complexe de cochaîne *tordu* dont la cohomologie est :

$$\begin{aligned} H^k(X; \mathrm{Ad}P) &:= \frac{\ker(\mathrm{d}_A : \Omega^k \to \Omega^{k+1})}{\mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega^{k-1} \to \Omega^k)} \\ &= \frac{W_2^\perp}{W_1} \\ &\cong W_1^\perp \cap W_2^\perp \\ &= W_3^\perp \\ &= \ker(\Delta_A : \Omega^k \to \Omega^{k+1}) \end{aligned}$$

Pour A plate, la cohomologie tordue $H^k(X; \mathrm{Ad}P)$ correspond donc aux k-formes harmoniques pour le laplacien covariant Δ_A.

Remarque : Encore une fois, ce dernier "*théorème de Hodge-de Rham*" est un peu trop simple. Il faut faire une preuve plus solide. TO DO ! ! !

Remarque : Dans le cas où A n'est pas plat, on peut tout de même établir un *théorème de décomposition de Hodge généralisé* (du moins il me semble). Ce que je vais développer à l'instant.

20.16 Théorème de décomposition de Hodge généralisé :

Théorème : *(de décomposition de Hodge généralisé) :* Soit (X, g) orientable et fermé (compact et sans bord). Soit $P \to X$ un G-fibré principal. Soit $A \in \mathcal{A}$ une connexion qui n'est pas forcément plate. Alors $\Omega^k := \Omega^k(X; \mathrm{Ad}P)$ se décompose en somme directe orthogonale comme suit :

$$\begin{aligned}\Omega^k &= \left(\ker \Delta_{A,g}|_{\Omega^k}\right) \oplus \left(\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^{k+1}}\right)\right) \oplus \left(\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^{k-1}}\right)\right) \\ &\quad \oplus \left\{\tau \in \Omega^1 | \exists \alpha \in \Omega^{k-1}, \exists \beta \in \Omega^{k+1} : \tau = \mathrm{d}_A\alpha = \delta_{A,g}\beta\right\}\end{aligned}$$

où :

$$\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^{k+1}}\right) = \mathrm{im}\left(\delta_{A,g} : \left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^{k+1}}\right) \to \Omega^k\right)$$

$$\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^{k-1}}\right) = \mathrm{im}\left(\mathrm{d}_A : \left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^{k-1}}\right) \to \Omega^k\right)$$

Preuve : (fausse preuve) D'abord on a deux décompositions en sommes directes orthogonales :

$$\Omega^k = \ker(\delta_{A,g}|_{\Omega^k}) \oplus \mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^{k-1}})$$

$$\Omega^k = \ker(\mathrm{d}_A|_{\Omega^k}) \oplus \mathrm{im}(\delta_{A,g}|_{\Omega^{k+1}})$$

On sait aussi que :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^{k-1}}) \cap \ker(\mathrm{d}_A|_{\Omega^k}) = \mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^{k-1}}\right)$$

$$\mathrm{im}(\delta_{A,g}|_{\Omega^{k+1}}) \cap \ker(\delta_{A,g}|_{\Omega^k}) = \delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^{k+1}}\right)$$

On calcule alors directement :

$$\begin{aligned}\Omega^k &= \Omega^k \cap \Omega^k \\ &= \left(\ker(\delta_{A,g}|_{\Omega^k}) \oplus \mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^{k-1}})\right) \cap \left(\ker(\mathrm{d}_A|_{\Omega^k}) \oplus \mathrm{im}(\delta_{A,g}|_{\Omega^{k+1}})\right) \\ &= \left(\ker(\delta_{A,g}|_{\Omega^k}) \cap \ker(\mathrm{d}_A|_{\Omega^k})\right) \oplus \left(\ker(\delta_{A,g}|_{\Omega^k}) \cap \mathrm{im}(\delta_{A,g}|_{\Omega^{k+1}})\right) \\ &\quad \oplus (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^{k-1}}) \cap \ker(\mathrm{d}_A|_{\Omega^k})) \oplus \left(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^{k-1}}) \cap \mathrm{im}(\delta_{A,g}|_{\Omega^{k+1}})\right) \\ &= \left(\ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^k})\right) \oplus \left(\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^{k+1}}\right)\right) \oplus \left(\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^{k-1}}\right)\right) \\ &\quad \oplus \left\{\tau \in \Omega^1 | \exists \alpha \in \Omega^{k-1}, \exists \beta \in \Omega^{k+1} : \tau = \mathrm{d}_A\alpha = \delta_{A,g}\beta\right\}\end{aligned}$$

□

Remarque : Cette preuve est fausse. En effet, il est faux de dire $(V_1 \oplus V_2) \cap (V_3 \oplus V_4) = (V_1 \cap V_3) \oplus (V_1 \oplus V_4) \oplus (V_2 \cap V_3) \oplus (V_2 \cap V_4)$. Bref, je dois faire une autre preuve. Me baser sur la preuve du théorème de décomposition de Hodge usuel. À FAIRE ! ! !

Remarque : Dans le cas où A est plat, on retrouve le théorème de décomposition de Hodge usuel. En effet, pour A plat on a :

$$\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^{k+1}}\right) = \delta_{A,g}(\Omega^{k+1}) = \mathrm{im}\left(\delta_{A,g}|_{\Omega^{k+1}}\right)$$

$$\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^{k-1}}\right) = \mathrm{d}_A(\Omega^{k-1}) = \mathrm{im}\left(\mathrm{d}_A|_{\Omega^{k-1}}\right)$$

$$\left\{\tau \in \Omega^1 | \exists \alpha \in \Omega^{k-1}, \exists \beta \in \Omega^{k+1} : \tau = \mathrm{d}_A\alpha = \delta_{A,g}\beta\right\} = \{0\}$$

21 Théorème de décomposition de Hodge généralisé :

21.1 Introduction :

Le but de cette section est d'établir le théorème de décomposition de Hodge généralisé énoncé plus haut. Ici je ne vais essayer de le démontrer que pour Ω^1_Σ, c'est tout ce que j'ai besoin. Probablement ça se généralise pour Ω^2_X. Je m'inspirerai largement de la section plus haut que le théorème de décomposition de Hodge usuel. Cette section suivait à la loupe le livre de F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups* (1983).

21.2 Motivations :

Soit (X, g) une variété fermée orientable riemannienne. Soit $\Omega^k = \Omega^k(X)$ l'espace des k-formes différentielles sur X. Le théorème de décomposition de Hodge dit que :

$$\Omega^k = \mathrm{im}(\mathrm{d}) \oplus \mathrm{im}(\delta) \oplus \ker(\Delta)$$

Ici, il est nécessaire d'avoir $\mathrm{d}^2 = 0$ et $\delta^2 = 0$. Le théorème de décomposition généralisé que je tente de démontrer est pour le cas où on remplace $\Omega^k(X)$ par $\Omega^k(X; E)$, d par d_A et δ par δ_A. La nouveauté en est que $\mathrm{d}_A^2 \neq 0$ et $\delta_A^2 \neq 0$ lorsque la courbure F_A est non nulle. Intuitivement, il me semble qu'on devrait avoir :

$$\Omega^k = (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))\oplus(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\mathrm{d}_A))\oplus(\mathrm{im}(\delta_A)\cap\ker(\delta_A))\oplus(\ker(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\delta_A))$$

Cette intuition me vient par analogie de la fausse preuve suivante du théorème de décomposition de Hodge.

Preuve : (fausse preuve) : On sait que $\Omega^k(X) = \mathrm{im}(\mathrm{d}) \oplus \ker(\delta)$ (ce qui est faux). On sait aussi que $\Omega^k(X) = \mathrm{im}(\delta) \oplus \ker(\mathrm{d})$ (ce qui est aussi faux). Donc :

$$\begin{array}{cl} & \Omega^k \\ = & \Omega^k \cap \Omega^k \\ = & (\mathrm{im}(\mathrm{d}) \oplus \ker(\delta)) \cap (\mathrm{im}(\delta) \oplus \ker(\mathrm{d})) \\ \text{"} = \text{"} & (\mathrm{im}(\mathrm{d}) \cap \mathrm{im}(\delta)) \oplus (\mathrm{im}(\mathrm{d}) \cap \ker(\mathrm{d})) \oplus (\mathrm{im}(\delta) \cap \ker(\delta)) \oplus (\ker(\mathrm{d}) \cap \ker(\delta)) \\ = & \{0\} \oplus (\mathrm{im}(\mathrm{d})) \oplus (\mathrm{im}(\delta)) \oplus (\ker(\mathrm{d}) \cap \ker(\delta)) \\ = & \mathrm{im}(\mathrm{d}) \oplus \mathrm{im}(\delta) \oplus \ker(\Delta) \end{array}$$

où le " = " est une fausse égalité, du moins une égalité hautement injustifiée. □

En changeant $\Omega^k(X)$ par $\Omega^k(X; E)$, d par d_A et δ par δ_A, j'obtiens un nouvelle fausse preuve d'un éventuel théorème de décomposition de Hodge généralisé.

Preuve : (fausse preuve) : On sait que $\Omega^k(X; E) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \oplus \ker(\delta_A)$ (ce qui est faux). On sait aussi que $\Omega^k(X; E) = \mathrm{im}(\delta_A) \oplus \ker(\mathrm{d}_A)$ (ce qui est aussi faux). Donc :

$$\begin{array}{cl} & \Omega^k \\ = & \Omega^k \cap \Omega^k \\ = & (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \oplus \ker(\delta_A)) \cap (\mathrm{im}(\delta_A) \oplus \ker(\mathrm{d}_A)) \\ \text{"} = \text{"} & (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A)) \oplus (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) \oplus (\mathrm{im}(\delta_A) \cap \ker(\delta_A)) \oplus (\ker(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\delta_A)) \\ = & (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A)) \oplus (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) \oplus (\mathrm{im}(\delta_A) \cap \ker(\delta_A)) \oplus (\ker(\Delta_A)) \end{array}$$

où le " = " est encore une fausse égalité, du moins encore une égalité hautement injustifiée. □

Je n'ai toujours pas de vraie preuve venant confirmer cet éventuel théorème de décomposition de Hodge généralisé. Je n'ai toujours pas non plus de contre-exemple qui viendrait l'infirmer. Le but de cette section est de construire des fausses preuves de l'éventuel théorème de décomposition de Hodge généralisé qui sont de plus en plus vraies.

21.3 Définitions (symplectique linéaire) :

Définition : (rappel) : Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un *produit scalaire* sur V est une application bilinéaire symétrique non dégénérée $g : V \times V \to \mathbb{R}$. Un *espace préhilbertien réel* est une paire (V, g).

Définition : Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une *structure symplectique* sur V est une application bilinéaire antisymétrique non dégénérée $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$. Un *espace vectoriel symplectique* est une paire (V, ω).

Définition : Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une *structure complexe* J sur V est un endomorphisme linéaire $J \in \mathrm{Aut}(V)$ vérifiant $J^2 := J \circ J = -\mathrm{id}_V$. Un *espace vectoriel complexe* est une paire (V, J).

Définition : Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique et J une structure complexe sur V. Posons $g_J := \omega(\,\cdot\,, J\,\cdot\,)$. Alors, J est dite :

- *dominée par* ω si g_J est définie positive, i.e. si $\forall v \neq 0$, $\omega(v, Jv) > 0$,
- *compatible avec* ω si g_J est définie positive et J-invariante, i.e. si J est dominée par ω et si $\omega(J\,\cdot\,, J\,\cdot\,) = \omega(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$.

Remarque : La condition de J-invariance est équivalente à ce que g_J soit symétrique, i.e. soit une métrique. En effet :

$$g_J(v, w) = \omega(v, Jw) = -\omega(Jw, v) = \omega(Jw, J^2 v) = g_J(Jw, Jv)$$

Proposition : Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique et J une structure complexe compatible avec ω. Alors $g_J(\,\cdot\,,\,\cdot\,) := \omega(\,\cdot\,, J\,\cdot\,)$ est un produit scalaire J-invariant.

Preuve : La bilinéarité de g_J est évidente. Le fait que g_J est symétrique découle de :

$$g_J(v, w) = \omega(v, Jw) = \omega(Jv, J^2 w) = -\omega(Jv, w) = \omega(w, Jv) = g_J(w, v)$$

La non dégénérescence de g_J découle du fait que pour $v \neq 0$ on a :

$$\|v\|_{g_J}^2 = g_J(v, v) = \omega(v, Jv) > 0$$

□

Définition : Soit (V, g) un espace préhilbertien et J une structure complexe. Alors J est dit être *compatible* avec g si $\omega(\cdot\,,\,\cdot) := g(J\,\cdot\,,\,\cdot)$ est une forme symplectique.

Définition : J'écrirai (V, g, J) pour dénoter un espace préhilbertien (V, g) muni d'une structure complexe J compatible avec g.

21.4 Résultats préliminaires :

Définition : Soit (V, g) un espace vectoriel préhilbertien. Un automorphisme $\varphi \in \mathrm{Aut}(V)$ est dit être une *isométrie* de (V, g) si :

$$g(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = g(v_1, v_2), \qquad \forall v_1, v_2 \in V$$

Proposition : Soit (V, g) un espace vectoriel préhilbertien. Soit φ une isométrie de (V, g). Soit $W < V$ un sous-espace vectoriel. Alors :

$$\varphi(W^\perp) = (\varphi(W))^\perp$$

Preuve : Calcul direct :

$$\begin{aligned}
\varphi(W^\perp) &= \varphi\{v \in V | \forall w \in W, g(v, w) = 0\} \\
&= \{\varphi(v) \in V | \forall w \in W, g(v, w) = 0\} \\
&= \{v \in V | \forall w \in W, g(\varphi^{-1}(v), w) = 0\} \\
&= \{v \in V | \forall w \in W, g(v, \varphi(w)) = 0\} \\
&= \{v \in V | \forall \varphi^{-1}(w) \in W, g(v, w) = 0\} \\
&= \{v \in V | \forall w \in \varphi(W), g(v, w) = 0\} \\
&= (\varphi(W))^\perp
\end{aligned}$$

□

Corollaire : Soit (V, g, J) un espace vectoriel préhilbertien muni d'une structure complexe compatible J. Alors :

$$J(W^\perp) = (JW)^\perp$$

Preuve : Découle de la dernière proposition et du fait que J est une isométrie car est compatible avec g. □

Proposition : Soit V un espace vectoriel. Soient $W_1, W_2 < V$ deux sous-espaces vectoriels. Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(V)$. Alors :

1. $\varphi(W_1 \cap W_2) = \varphi(W_1) \cap \varphi(W_2)$
2. $\varphi(W_1 + W_2) = \varphi(W_1) + \varphi(W_2)$
3. $W_1 < W_2 \implies \varphi(W_1) < \varphi(W_2)$

Preuve : Montrons la première égalité :

$$\begin{aligned}
\varphi(W_1 \cap W_2) &= \varphi\,\{v | v \in W_1, v \in W_2\} \\
&= \{\varphi(v) | v \in W_1, v \in W_2\} \\
&= \{v | \varphi^{-1}(v) \in W_1, \varphi^{-1}(v) \in W_2\} \\
&= \{v | v \in \varphi(W_1), v \in \varphi(W_2)\} \\
&= \varphi(W_1) \cap \varphi(W_2)
\end{aligned}$$

Montrons la seconde égalité :

$$\begin{aligned}
\varphi(W_1 + W_2) &= \varphi\,\{v_1 + v_2 | v_1 \in W_1, v_2 \in W_2\} \\
&= \{\varphi(v_1 + v_2) | v_1 \in W_1, v_2 \in W_2\} \\
&= \{v_1 + v_2 | \varphi^{-1}(v_1) \in W_1, \varphi^{-1}(v_2) \in W_2\} \\
&= \{v_1 + v_2 | v_1 \in \varphi(W_1), v_2 \in \varphi(W_2)\} \\
&= \varphi(W_1) \cap \varphi(W_2)
\end{aligned}$$

Montrons la troisième implication :

$$\begin{aligned}
W_1 < W_2 &\implies \forall v \in W_1 : v \in W_2 \\
&\implies \forall \varphi(v) \in \varphi(W_1) : v \in W_2 \\
&\implies \forall v \in \varphi(W_1) : \varphi^{-1}(v) \in W_2 \\
&\implies \forall v \in \varphi(W_1) : v \in \varphi(W_2) \\
&\implies \varphi(W_1) < \varphi(W_2)
\end{aligned}$$

□

Corollaire : Soit (V, J) un espace vectoriel muni d'une structure complexe J. Alors :

1. $J(W_1 \cap W_2) = JW_1 \cap JW_2$
2. $J(W_1 + W_2) = JW_1 + JW_2$
3. $W_1 < W_2 \implies JW_1 < JW_2$

Preuve : Découle de la dernière proposition pour $\varphi = J$. □

Proposition : (fausse proposition) Soit (V, g, J) de dimension finie, où g et J sont compatibles. Soit $W < V$ un sous-espace vectoriel. Alors :

$$W = (W \cap JW) \oplus (W \cap JW^{\perp})$$

Contre-exemple : Il suffit de prendre un sous-espace $W < V$ qui est symplectique mais qui n'est pas J-invariant. Par exemple, considérons cet espace vectoriel :

$$V = \mathbb{R}^4 \left\langle \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2} \right\rangle$$

Donnons-lui ces structures canoniques compatibles :

$$\omega = \mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}q_1 + \mathrm{d}p_2 \wedge \mathrm{d}q_2$$

$$g = \mathrm{d}p_1 \otimes \mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}p_2 \otimes \mathrm{d}p_2 + \mathrm{d}q_1 \otimes \mathrm{d}q_1 + \mathrm{d}q_2 \otimes \mathrm{d}q_2$$

$$J = \mathrm{d}p_1 \otimes \frac{\partial}{\partial q_1} + \mathrm{d}p_2 \otimes \frac{\partial}{\partial q_2} - \mathrm{d}q_1 \otimes \frac{\partial}{\partial p_1} - \mathrm{d}q_2 \otimes \frac{\partial}{\partial p_2}$$

Considérons ce sous-espace vectoriel :

$$W = \mathbb{R} \left\langle \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\partial}{\partial q_1} \right\rangle$$

Alors :

$$JW = \mathbb{R} \left\langle \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{\partial}{\partial p_1} \right\rangle$$

On a $W \cap JW = \{0\}$ car W et JW sont deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 transverses :

$$\begin{aligned} W + JW &= \mathbb{R} \left\langle \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\partial}{\partial q_1} \right\rangle + \mathbb{R} \left\langle \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{\partial}{\partial p_1} \right\rangle \\ &= \mathbb{R} \left\langle \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{\partial}{\partial p_1} \right\rangle \\ &= \mathbb{R} \left\langle \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2} \right\rangle \\ &= V \end{aligned}$$

Ensuite :

$$W^\perp = \mathbb{R}\left\langle \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial}{\partial q_1} \right\rangle$$

$$JW^\perp = \mathbb{R}\left\langle \frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial p_1} \right\rangle$$

On a $W \cap JW^\perp = \{0\}$ car W et $JW^\perp$ sont deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 transverses :

$$\begin{aligned}
W + JW^\perp &= \mathbb{R}\left\langle \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\partial}{\partial q_1} \right\rangle + \mathbb{R}\left\langle \frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial p_1} \right\rangle \\
&= \mathbb{R}\left\langle \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial p_1} \right\rangle \\
&= \mathbb{R}\left\langle \frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial p_2}, \frac{\partial}{\partial q_2} \right\rangle \\
&= V
\end{aligned}$$

D'où :

$$(W \cap JW) \oplus (W \cap JW^\perp) = \{0\} \oplus \{0\} = \{0\} \neq V$$

□

Remarque : Ceci dit, il y a moyen d'ajouter une condition à la dernière proposition qui la rend vraie.

Proposition : Soit (V, ω, J, g) hilbertien. Soit $W < V$ un sous-espace vectoriel. $\ker(\omega|_W)$ est fermé en V.

Preuve : D'abord, $J : V \to V$ est une application bornée car est une isométrie. Donc $J : V \to V$ est continue. Ensuite, $g : V \times V \to \mathbb{R}$ est continue. Puis $\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$, i.e. ω est une composition d'applications continues. Donc $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ est continue. Donc la musicalité $\omega : V \to V^*$ et continue. Donc la restriction $\omega|_W : W \to V^*$ est continue. Mais $\{0\} < V^*$ est un fermé. Donc la préimage $(\omega|_W)^{-1}(\{0\})$ est un fermé en W. Donc $(\omega|_W)^{-1}(0)$ est un fermé en W. Donc $\ker(\omega|_W)$ est un fermé. □

Remarque : Cette dernière preuve est à revérifier. Il me semble que j'y vais un peu rapidement sur plusieurs énoncés. TO DO ! ! !

Proposition : Soit (V, g, J, ω) un espace de Hilbert réel V où le produit scalaire g, la structure complexe J et la forme symplectique ω sont compatibles, i.e. $g(J\cdot, J\cdot) = g(\cdot, \cdot)$ et $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$. Soit $W < V$ un sous-espace vectoriel fermé. Supposons que ce sous-espace vectoriel :

$$W \cap (\ker(\omega|_W))^\perp$$

soit J-invariant. Alors :

$$W = (W \cap JW) \oplus (W \cap JW^\perp)$$

Preuve : Par la dernière proposition, $\ker(\omega|_W)$ est un fermé en l'espace de Hilbert V. Donc :

$$W = (W \cap (\ker(\omega|_W))^\perp) \oplus \ker(\omega|_W)$$

Ici, on a :

$$\ker(\omega|_W) = W \cap W^\omega = W \cap JW^\perp$$

Ensuite, par hypothèse, $W \cap (\ker(\omega|_W))^\perp$ est J-invariant, donc :

$$(W \cap (\ker(\omega|_W))^\perp) < W \cap JW$$

Puisque W est fermé, $JW^{\perp\perp} = JW$. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} W \cap JW & < & W \cap (W^\perp + JW) \\ & = & W \cap (W^\perp + JW^{\perp\perp}) \\ & < & W \cap (W \cap JW^\perp)^\perp \\ & = & W \cap (W \cap W^\omega)^\perp \\ & = & W \cap (\ker(\omega|_W))^\perp \end{array}$$

D'où :

$$W \cap JW = W \cap (\ker(\omega|_W))^\perp$$

D'où :

$$\begin{array}{rcl} W & = & (W \cap (\ker(\omega|_W))^\perp) \oplus \ker(\omega|_W) \\ & = & (W \cap JW) \oplus (W \cap JW^\perp) \end{array}$$

□

Proposition : Soit (V, g, J, ω) un espace de Hilbert réel V où le produit scalaire g, la structure complexe J et la forme symplectique ω sont compatibles. Soit $W < V$

un sous-espace vectoriel fermé. Supposons que les deux sous-espaces vectoriels $W \cap (\ker(\omega|_W))^\perp$ et $W^\perp \cap (\ker(\omega|_{W^\perp}))^\perp$ sont J-invariants. Alors :

$$V = (W \cap JW) \oplus (W \cap JW^\perp) \oplus (W^\perp \cap JW^\perp) \oplus (W^\perp \cap JW)$$

Preuve : Par la dernière proposition, puisque $W \cap (\ker(\omega|_W))^\perp$ et $W^\perp \cap (\ker(\omega|_{W^\perp}))^\perp$ sont J-invariants, on a :

$$W = (W \cap JW) \oplus (W \cap JW^\perp)$$
$$W^\perp = (W^\perp \cap JW^\perp) \oplus (W^\perp \cap JW)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} V &= W \oplus W^\perp \\ &= (W \cap JW) \oplus (W \cap JW^\perp) \oplus (W^\perp \cap JW^\perp) \oplus (W^\perp \cap JW) \end{aligned}$$

□

21.5 Nouvelle fausse preuve du thm. de décomp. de Hodge gén. :

Proposition : (fausse proposition) Soit (Σ, g) une surface fermée orientable munie d'une métrique riemannienne g. Soit $\Omega^1 = \Omega^1(\Sigma^2; \mathrm{Ad}P)$. Alors :

$$\Omega^1 = (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A)) \oplus (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) \oplus (\mathrm{im}(\delta_A) \cap \ker(\delta_A)) \oplus (\ker(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\delta_A))$$

Preuve : (nouvelle fausse preuve) D'abord, Ω^1 est un espace de Hilbert (faux, c'est un préhilbertien). Considérons le sous-espace fermé $\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) < \Omega^1$ (faux, ce n'est pas un sous-espace fermé). J'ai montré plus haut que pour W un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert V tel que les deux sous-espaces vectoriels $W \cap (\ker(\omega|_W))^\perp$ et $W^\perp \cap (\ker(\omega|_{W^\perp}))^\perp$ sont J-invariants, on a la décomposition :

$$V = (W \cap JW) \oplus (W \cap JW^\perp) \oplus (W^\perp \cap JW^\perp) \oplus (W^\perp \cap JW)$$

Prenons $V = \Omega^1$, $W = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A)$ et $J = \star$ de sorte que :

$$\begin{aligned} W &= \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \\ JW &= \star\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) = \mathrm{im}(\delta_A) \\ W^\perp &= \ker(\delta_A) \\ JW^\perp &= \star\ker(\delta_A) = \ker(\mathrm{d}_A) \end{aligned}$$

Je veux montrer que :

$\Omega^k = (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))\oplus(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\mathrm{d}_A))\oplus(\mathrm{im}(\delta_A)\cap\ker(\delta_A))\oplus(\ker(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\delta_A))$

Il suffit donc de montrer que ces deux sous-espaces vectoriels de V sont J-invariants :

$$\begin{aligned} W\cap(\ker(\omega|_W))^\perp &= W\cap(W\cap W^\omega)^\perp \\ &= W\cap(W\cap JW^\perp)^\perp \\ &= \mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\mathrm{d}_A))^\perp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^\perp\cap(\ker(\omega|_{W^\perp}))^\perp &= W^\perp\cap(W^\perp\cap(W^\perp)^\omega)^\perp \\ &= W^\perp\cap(W^\perp\cap JW^{\perp\perp})^\perp \\ &= W^\perp\cap(W^\perp\cap JW)^\perp \\ &= \ker(\delta_A)\cap(\ker(\delta_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))^\perp \end{aligned}$$

Il faut donc montrer ces deux égalités :

$$\star(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\mathrm{d}_A))^\perp) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\mathrm{d}_A))^\perp$$

$$\star(\ker(\delta_A)\cap(\ker(\delta_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))^\perp) = \ker(\delta_A)\cap(\ker(\delta_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))^\perp$$

C'est-à-dire, il faut montrer que :

$$\mathrm{im}(\delta_A)\cap(\mathrm{im}(\delta_A)\cap\ker(\delta_A))^\perp = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\mathrm{d}_A))^\perp$$

$$\ker(\mathrm{d}_A)\cap(\ker(\mathrm{d}_A)\cap\mathrm{im}(\mathrm{d}_A))^\perp = \ker(\delta_A)\cap(\ker(\delta_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))^\perp$$

TO DO ! ! ! □

21.6 Preuve incomplète du thm. de décomp. de Hodge gén. :

Proposition : (fausse proposition) Soit (X,g) une variété riemannienne fermée orientable. Soit $\Omega^k = \Omega^k(X;E)$. Alors :

$\Omega^k = (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))\oplus(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\mathrm{d}_A))\oplus(\mathrm{im}(\delta_A)\cap\ker(\delta_A))\oplus(\ker(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\delta_A))$

Preuve : (autre tentative) Puisque Δ_A est un opérateur elliptique, on peut montrer que $\ker(\Delta_A)$ est de dimension finie (TO DO ! ! !). Donc $\ker(\Delta_A)$ est complet en le préhilbertien Ω^k. Ainsi :

$$\Omega^k = (\ker(\Delta_A))^\perp \oplus \ker(\Delta_A)$$

En suivant les étapes du théorème de décomposition de Hodge usuel (TO DO ! ! !), on peut montrer que :

$$(\ker(\Delta_A))^\perp = \mathrm{im}(\Delta_A)$$

Ainsi :

$$\Omega^k = \mathrm{im}(\Delta_A) \oplus \ker(\Delta_A)$$

Posons $\mathcal{H}^k = \ker(\Delta_A : \Omega^k \to \Omega^k)$. Ensuite, on fait comme dans la preuve du théorème de décomposition de Hodge usuel (À VÉRIFIER ! ! !) :

$$\begin{array}{rcl} \Delta_A(\Omega^k) & < & \mathrm{d}_A\delta_A(\Omega^k) + \delta_A\mathrm{d}_A(\Omega^k) \\ & < & \mathrm{d}_A(\Omega^{k-1}) + \delta_A(\Omega^{k+1}) \\ & < & (\mathcal{H}^k)^\perp \\ & = & \Delta(\Omega^k) \end{array}$$

Donc la suite d'inclusions de sous-espaces vectoriels est une suite d'égalités :

$$\mathrm{im}(\Delta_A) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A\delta_A) + \mathrm{im}(\delta_A\mathrm{d}_A) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) + \mathrm{im}(\delta_A)$$

D'où :

$$\Omega^k = (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) + \mathrm{im}(\delta_A)) \oplus \ker(\Delta_A)$$

Donc, pour montrer l'égalité recherchée :

$$\Omega^k = (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))\oplus(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\mathrm{d}_A))\oplus(\mathrm{im}(\delta_A)\cap\ker(\delta_A))\oplus(\ker(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\delta_A))$$

il suffit de montrer que :

$$(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))\oplus(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\mathrm{d}_A))\oplus(\mathrm{im}(\delta_A)\cap\ker(\delta_A)) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A)+\mathrm{im}(\delta_A)$$

ou encore, il suffit de montrer que :

$$(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))\oplus(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\mathrm{d}_A))\oplus(\mathrm{im}(\delta_A)\cap\ker(\delta_A)) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A\delta_A)+\mathrm{im}(\delta_A\mathrm{d}_A)$$

TO DO ! ! ! □

Remarque : Cette dernière preuve est incomplète mais plausible. Je n'utilise rien de faux.

Remarque : Soit V un espace préhilbertien. Soient $W_1, W_2 < V$ des sous-espaces vectoriels en V. Supposons $W_1 \cap W_2$ complet en V. Alors :

$$W_1 + W_2 = (W_1 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \oplus (W_1 \cap W_2) \oplus (W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp)$$

Ainsi, en prenant $W_1 = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A)$ et $W_2 = \mathrm{im}(\delta_A)$, il suffit de montrer que le sous-espace vectoriel :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A)$$

est complet en le préhilbertien Ω^k pour avoir :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)+\mathrm{im}(\delta_A) = (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))^\perp)\oplus(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))\oplus(\mathrm{im}(\delta_A)\cap(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))^\perp)$$

Dès lors, pour avoir l'égalité recherchée :

$$(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))\oplus(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\mathrm{d}_A))\oplus(\mathrm{im}(\delta_A)\cap\ker(\delta_A)) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A\delta_A)+\mathrm{im}(\delta_A\mathrm{d}_A)$$

il suffirait de montrer que :

$$(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\ker(\mathrm{d}_A))\oplus(\mathrm{im}(\delta_A)\cap\ker(\delta_A)) = (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))^\perp)\oplus(\mathrm{im}(\delta_A)\cap(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)\cap\mathrm{im}(\delta_A))^\perp)$$

Pour cela, il suffirait de montrer ces deux égalités :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A))^\perp$$

$$\mathrm{im}(\delta_A) \cap \ker(\delta_A) = \mathrm{im}(\delta_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A))^\perp$$

La seconde égalité découle de la première en y appliquant l'isométrie $\star$:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A))^\perp \\
\Longrightarrow\ & \star\,(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) = \star(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A))^\perp) \\
\Longrightarrow\ & \star\,\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \star\ker(\mathrm{d}_A) = \star\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\star\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \star\mathrm{im}(\delta_A))^\perp \\
\Longrightarrow\ & \mathrm{im}(\delta_A) \cap \ker(\delta_A) = \mathrm{im}(\delta_A) \cap (\mathrm{im}(\delta_A) \cap \mathrm{im}(\mathrm{d}_A))^\perp \\
\Longrightarrow\ & \mathrm{im}(\delta_A) \cap \ker(\delta_A) = \mathrm{im}(\delta_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A))^\perp
\end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer que :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A))^\perp$$

Je sais que cette suite d'inclusions est vraie :

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A) &< \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\ker(\mathrm{d}_A) + \ker(\delta_A)) \\
&= \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap ((\mathrm{im}(\delta_A))^\perp + (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A))^\perp) \\
&< \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\delta_A) \cap \mathrm{im}(\mathrm{d}_A))^\perp \\
&= \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A))^\perp
\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer cette inclusion :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A))^\perp < \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)$$

C'est-à-dire, il suffit de montrer cette inclusion :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A))^\perp < \ker(\mathrm{d}_A)$$

Ainsi, mon théorème de décomposition de Hodge généralisé serait vrai dès lors que j'arrive à montrer ces deux énoncés :

1. $\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A)$ est complet
2. $\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A))^\perp < \ker(\mathrm{d}_A)$

Je doute que $\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A)$ soit complet. Ceci dit, la décomposition

$$W_1 + W_2 = (W_1 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp) \oplus (W_1 \cap W_2) \oplus (W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^\perp)$$

peut être vraie même si $W_1 \cap W_2$ n'est pas complet. En effet, dans un préhilbertien V il faut W complet pour avoir $V = W \oplus W^\perp$. Mais le fait d'avoir $V = W \oplus W^\perp$ implique W fermé, mais pas forcément complet. Bref, je devrais vérifier si $\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A)$ est fermé. Car s'il n'est pas fermé ça peut poser problème. À VÉRIFIER ! ! ! TO DO ! ! !

Remarque : J'ai cette suite d'égalités :

$$\mathrm{im}(\Delta_A) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A\delta_A) + \mathrm{im}(\delta_A\mathrm{d}_A) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) + \mathrm{im}(\delta_A)$$

Ainsi, je peux donc aussi refaire tout ce que je viens de faire mais avec $\mathrm{im}(\mathrm{d}_A\delta_A)$ et $\mathrm{im}(\delta_A\mathrm{d}_A)$ au lieu de $\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)$ et $\mathrm{im}(\delta_A)$. Je n'avais pas essayé ça dans mes feuilles. À FAIRE ! ! ! TO DO ! ! !

21.7 Nouvelle preuve incomplète du thm. de décomp. de Hodge gén. (idée d'Egor) :

Soit $\Omega^k := \Omega^k(\Sigma^2; \mathrm{Ad}P)$. Voici une nouvelle idée pour démontrer le théorème de décomposition de Hodge généralisé. C'est basé sur une idée d'Egor (2019-04-23).

D'abord, comme plus haut, puisque Δ_A est elliptique on a :

$$\begin{aligned}\Omega^k &= \ker(\Delta_A) \oplus \mathrm{im}(\Delta_A) \\ &= \ker(\Delta_A) \oplus (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) + \mathrm{im}(\delta_A))\end{aligned}$$

L'idée d'Egor est de décomposer $\mathrm{im}(\mathrm{d}_A)$ et $\mathrm{im}(\delta_A)$ en :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) = (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) \oplus T$$

$$\mathrm{im}(\delta_A) = (\mathrm{im}(\delta_A) \cap \ker(\delta_A)) \oplus T'$$

pour certains sous-espaces T et T'.

Proposition : On a :

$$(\ker \mathrm{d}_A^2)^\perp = \mathrm{im}(\delta_A^2)$$

Preuve : (ATTENTION) Pour un opérateur L et L' son opérateur adjoint, on a :

$$(\mathrm{im}(L'))^\perp = \ker L$$

En prenant le perpendiculaire, on a donc :

$$(\mathrm{im}(L'))^{\perp\perp} = (\ker L)^\perp$$

En faisant comme en dimension finie, on enlève le double perpendiculaire (ATTENTION ! ! !) :

$$(\ker L)^\perp = \mathrm{im}(L')$$

Maintenant, on prend $L = \mathrm{d}_A^2$ et son opérateur adjoint $L' = \delta_A^2$. D'où l'égalité recherchée. □

Remarque : Dans la dernière proposition il y a évidemment un truc à gérer (TO DO ! ! !).

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ une connexion irréductible. Considérons ces deux opérateurs :

$$R_A := \Delta_A^{-1} \circ \mathrm{d}_A^2 : \Omega^0 \to \Omega^2$$
$$\tilde{R}_A := \Delta_A^{-1} \circ \delta_A^2 : \Omega^2 \to \Omega^0$$

Alors, les deux sous-espaces :

$$T = \mathrm{d}_A(\mathrm{im}(\tilde{R}_A)) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A \circ \tilde{R}_A) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A \circ \Delta_A^{-1} \circ \delta_A^2) < \Omega^1$$

$$T' = \delta_A(\mathrm{im}(R_A)) = \mathrm{im}(\delta_A \circ R_A) = \mathrm{im}(\delta_A \circ \Delta_A^{-1} \circ \mathrm{d}_A^2) < \Omega^1$$

vérifient :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) = (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) \oplus T$$
$$\mathrm{im}(\delta_A) = (\mathrm{im}(\delta_A) \cap \ker(\delta_A)) \oplus T'$$

Preuve : (preuve d'Egor. ATTENTION DEUX FOIS) Par symétrie de la preuve, il suffit de montrer la première égalité :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) = (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) \oplus T$$

Pour cela, il faut montrer deux choses :

$$(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) \perp T$$

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) = (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) + T$$

Considérons :

$$\alpha = \mathrm{d}_A\beta \in \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)$$
$$\gamma = \mathrm{d}_A\Delta_A^{-1}\delta_A^2\mu \in T = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A \circ \Delta_A^{-1} \circ \delta_A^2)$$

quelconques. Alors :

$$\begin{aligned}
(\alpha, \gamma)_{g,\kappa} &= (\mathrm{d}_A\beta, \mathrm{d}_A\Delta_A^{-1}\delta_A^2\mu)_{g,\kappa} \\
&= (\delta_A\mathrm{d}_A\beta, \Delta_A^{-1}\delta_A^2\mu)_{g,\kappa} \\
&= (\Delta_A\beta, \Delta_A^{-1}\delta_A^2\mu)_{g,\kappa} \\
&= (\Delta_A^{-1}\Delta_A\beta, \delta_A^2\mu)_{g,\kappa} \\
&= (\beta, \delta_A^2\mu)_{g,\kappa} \\
&= (\mathrm{d}_A^2\beta, \mu)_{g,\kappa} \\
&= (\mathrm{d}_A\alpha, \mu)_{g,\kappa} \\
&= (0, \mu)_{g,\kappa} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ok. Montrons maintenant l'égalité :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) = (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) + T$$

Plus haut, j'ai démontré que pour $U < W < V$ des sous-espaces vectoriels d'un préhilbertien V, si U est complet, alors :

$$W = U \oplus (W \cap U^\perp)$$

Considérons ces espaces :

$$V = \Omega^1$$

$$W = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A)$$

$$U = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)$$

Ici, V est préhilbertien. Et on a bien $U < W < V$. Mais U ne semble pas complet (ATTENTION ! ! !). En oubliant la condition de complétude de U, on a donc :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) = (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) \oplus (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A))^\perp)$$

Pour montrer que :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) = (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) \oplus T$$

il suffit donc de montrer que :

$$T = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A))^\perp$$

C'est-à-dire, il faut montrer que :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A \circ \Delta_A^{-1} \circ \delta_A^2) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A))^\perp$$

Pour cela, il faut montrer ces deux inclusions :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A \circ \Delta_A^{-1} \circ \delta_A^2) < \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A))^\perp$$

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A \circ \Delta_A^{-1} \circ \delta_A^2) > \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A))^\perp$$

Montrons la première inclusion. Soit :

$$\alpha = \mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A^2 \beta \in \mathrm{im}(\mathrm{d}_A \circ \Delta_A^{-1} \circ \delta_A^2)$$

quelconque. Alors $\alpha \in \mathrm{im}(\mathrm{d}_A)$. Il reste à montrer que $\alpha \in (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A))^\perp$. Soit $\gamma = \mathrm{d}_A\mu \in \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)$ quelconque. Alors :

$$\begin{aligned} (\alpha, \gamma)_{g,\kappa} &= (\mathrm{d}_A\Delta_A^{-1}\delta_A^2\beta, \mathrm{d}_A\mu)_{g,\kappa} \\ &= (\delta_A\mathrm{d}_A\Delta_A^{-1}\delta_A^2\beta, \mu)_{g,\kappa} \\ &= (\Delta_A\Delta_A^{-1}\delta_A^2\beta, \mu)_{g,\kappa} \\ &= (\delta_A^2\beta, \mu)_{g,\kappa} \\ &= (\beta, \mathrm{d}_A^2\mu)_{g,\kappa} \\ &= (\beta, \mathrm{d}_A\gamma)_{g,\kappa} \\ &= (\beta, 0)_{g,\kappa} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ok. Montrons maintenant l'autre inclusion :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A \circ \Delta_A^{-1} \circ \delta_A^2) > \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A))^\perp$$

Soit :

$$\alpha \in \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A))^\perp$$

quelconque. Donc $\alpha = \mathrm{d}_A\beta$ et aussi $(\alpha, \gamma)_{g,\kappa} = 0$ pour tout $\gamma = \mathrm{d}_A\mu \in \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)$. Puisque A est irréductible, Δ_A est un isomorphisme de Ω^0. Alors il existe $\nu \in \Omega^0$ tel que $\beta = \Delta_A^{-1}\nu$. Ainsi $\alpha = \mathrm{d}_A\Delta_A^{-1}\nu$. On a donc :

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha, \gamma)_{g,\kappa} \\ &= (\mathrm{d}_A\Delta_A^{-1}\nu, \mathrm{d}_A\mu)_{g,\kappa} \\ &= (\delta_A\mathrm{d}_A\Delta_A^{-1}\nu, \mu)_{g,\kappa} \\ &= (\Delta_A\Delta_A^{-1}\nu, \mu)_{g,\kappa} \\ &= (\nu, \mu)_{g,\kappa} \end{aligned}$$

D'où $(\nu, \mu)_{g,\kappa} = 0$, pour tout $\mu \in \Omega^0$ tel que $\mathrm{d}_A^2\mu = 0$. En utilisant la dernière proposition, on a $\nu \in (\ker \mathrm{d}_A^2)^\perp = \mathrm{im}(\delta_A^2)$. Il existe donc $\eta \in \Omega^2$ tel que $\nu = \delta_A^2\eta$. On a donc :

$$\alpha = \mathrm{d}_A\Delta_A^{-1}\nu = \mathrm{d}_A\Delta_A^{-1}\delta_A^2\eta \in \mathrm{im}(\mathrm{d}_A \circ \Delta_A^{-1} \circ \delta_A^2)$$

□

Remarque : Dans la dernière preuve il y a deux choses à clarifier :

1. J'ai utilisé la décomposition $W = U \oplus (W \cap U^\perp)$. Mais je ne pense pas U complet.
2. J'ai utilisé la proposition plus haut $(\ker \mathrm{d}_A^2)^\perp = \mathrm{im}(\delta_A^2)$. Mais la preuve de cette proposition était louche.

TO DO ! ! !

Proposition : On a aussi :

$$(\mathrm{im}(\delta_A) \cap \ker(\delta_A)) \perp T$$

$$(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) \perp T'$$

Preuve : Par symétrie de la preuve, il suffit de montrer la première égalité :

$$(\mathrm{im}(\delta_A) \cap \ker(\delta_A)) \perp T$$

Considérons :

$$\alpha \in \mathrm{im}(\delta_A) \cap \ker(\delta_A)$$

$$\gamma = \mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A^2 \mu \in T = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A \circ \Delta_A^{-1} \circ \delta_A^2)$$

quelconques. On calcule alors directement :

$$\begin{array}{rcl} (\alpha, \gamma)_{g,\kappa} & = & (\alpha, \mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A^2 \mu)_{g,\kappa} \\ & = & (\delta_A \alpha, \Delta_A^{-1} \delta_A^2 \mu)_{g,\kappa} \\ & = & (0, \Delta_A^{-1} \delta_A^2 \mu)_{g,\kappa} \\ & = & 0 \end{array}$$

□

Remarque : On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \Omega^k & = & \ker(\Delta_A) \oplus \mathrm{im}(\Delta_A) \\ & = & \ker(\Delta_A) \oplus (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) + \mathrm{im}(\delta_A)) \\ & = & \ker(\Delta_A) \oplus (((\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) \oplus T) + ((\mathrm{im}(\delta_A) \cap \ker(\delta_A)) \oplus T')) \\ & = & \ker(\Delta_A) \oplus (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) \oplus (\mathrm{im}(\delta_A) \cap \ker(\delta_A) \oplus (T + T') \end{array}$$

La question revient alors à savoir ce que vaut $T + T'$. D'abord, on a la proposition suivante due à Egor.

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ une connexion irréductible. Alors on a les inclusions suivantes :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega^0 \to \Omega^1) = \{\alpha \in \Omega^1 | \alpha = \mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A \alpha\}$$
$$\mathrm{im}(\delta_A : \Omega^2 \to \Omega^1) = \{\alpha \in \Omega^1 | \alpha = \delta_A \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A \alpha\}$$

Preuve : (preuve d'Egor) Par symétrie de la preuve, il suffit de montrer la première égalité. L'inclusion dans un sens est évidente :

$$\{\alpha \in \Omega^1 | \alpha = \mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A \alpha\} < \mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega^0 \to \Omega^1)$$

Il reste alors à montrer l'inclusion dans l'autre sens :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega^0 \to \Omega^1) < \{\alpha \in \Omega^1 | \alpha = \mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A \alpha\}$$

Soit $\alpha \in \mathrm{im}(\mathrm{d}_A)$ quelconque. Alors il existe $\beta \in \Omega^0$ tel que $\alpha = \mathrm{d}_A \beta$. Mais A est irréductible. Donc $\Delta_A : \Omega^0 \to \Omega^0$ est un isomorphisme. Ainsi, $\beta = \Delta_A^{-1} \upsilon$ pour $\upsilon = \Delta_A \beta$. On a alors $\alpha = \mathrm{d}_A \beta = \mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \upsilon$. On calcule ensuite :

$$\begin{aligned} \delta_A \alpha &= \delta_A \mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \upsilon \\ &= \Delta_A \Delta_A^{-1} \upsilon \\ &= \upsilon \end{aligned}$$

D'où $\upsilon = \delta_A \alpha$. D'où $\alpha = \mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \upsilon = \mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A \alpha$. □

Remarque : Les deux égalités de la dernière proposition sont évidentes. En effet, la première égalité :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega^0 \to \Omega^1) = \{\alpha \in \Omega^1 | \alpha = \mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A \alpha\}$$

se reformule géométriquement comme :

$$\text{distrib. vert.} = \{\alpha \,|\alpha = v_A \alpha\}$$

où $v_A = \mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A : \Omega^1 \to \Omega^1$ est la projection verticale de la connexion de Coulomb. La seconde égalité :

$$\mathrm{im}(\delta_A : \Omega^2 \to \Omega^1) = \{\alpha \in \Omega^1 | \alpha = \delta_A \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A \alpha\}$$

découle de la première en y appliquant $\star$.

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ une connexion irréductible. On a l'égalité :

$$T \cap T' = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A)$$

Preuve : (preuve d'Egor) On a :

$$T = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A^2)$$
$$T' = \mathrm{im}(\delta_A \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A^2)$$

On doit donc montrer que :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A^2) \cap \mathrm{im}(\delta_A \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A^2) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A)$$

Puisque :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A^2) < \mathrm{im}(\mathrm{d}_A)$$
$$\mathrm{im}(\delta_A \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A^2) < \mathrm{im}(\delta_A)$$

l'inclusion dans un sens est évidente :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A^2) \cap \mathrm{im}(\delta_A \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A^2) < \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A)$$

Il reste alors à montrer l'inclusion dans l'autre sens :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A^2) \cap \mathrm{im}(\delta_A \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A^2) > \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A)$$

Considérons $\alpha \in \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A)$ quelconque. Alors $\alpha = \mathrm{d}_A \beta = \delta_A \gamma$ pour $\beta \in \Omega^0$ et $\gamma \in \Omega^2$. Puisque A est irréductible, par la dernière proposition, on a aussi :

$$\alpha = \mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A \alpha = \mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A \delta_A \gamma$$
$$\alpha = \delta_A \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A \alpha = \delta_A \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A \mathrm{d}_A \beta$$

D'où $\alpha \in \mathrm{im}(\mathrm{d}_A \Delta_A^{-1} \delta_A^2) \cap \mathrm{im}(\delta_A \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A^2)$. □

Remarque : Je voulais montrer que :

$$\Omega^k = \ker(\Delta_A) \oplus (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) \oplus (\mathrm{im}(\delta_A) \cap \ker(\delta_A) \oplus (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A))$$

J'aurais donc ce résultat si j'arrivais à montrer que $T + T' = T \cap T'$.

Proposition : On a :

$$T + T' = (T \cap (T \cap T')^\perp) \oplus (T \cap T') \oplus (T' \cap (T \cap T')^\perp)$$

Preuve : Je sais que :

$$W_1 + W_2 = (W_1 \cap (W_1 \cap W_2)^{\perp}) \oplus (W_1 \cap W_2) \oplus (W_2 \cap (W_1 \cap W_2)^{\perp})$$

Ici, $W_1 = T$, $W_2 = T'$, $W_1 + W_2 = T + T'$, $W_1 \cap W_2 = T_1 \cap T_2 = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A)$. On a donc :

$$T + T' = (T \cap (T \cap T')^{\perp}) \oplus (T \cap T') \oplus (T' \cap (T \cap T')^{\perp})$$

□

Remarque : ATTENTION : ici j'ai utilisé un résultat en dimension infinie. Il faut ajouter l'hypothèse sous laquelle c'est vrai.

Remarque : Pour démontrer que :

$$\Omega^k = \ker(\Delta_A) \oplus (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \ker(\mathrm{d}_A)) \oplus (\mathrm{im}(\delta_A) \cap \ker(\delta_A) \oplus (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A))$$

il suffit de montrer que $T + T' = T \cap T'$. Par la dernière proposition, il suffit donc de démontrer que :

$$(T \cap (T \cap T')^{\perp}) \oplus (T' \cap (T \cap T')^{\perp}) = \{0\}$$

Par symétrie, il suffit donc de démontrer que :

$$T \cap (T \cap T')^{\perp} = \{0\}$$

C'est-à-dire, il faut montrer que :

$$\mathrm{im}(\mathrm{d}_A \circ \Delta_A^{-1} \circ \delta_A^2) \cap (\mathrm{im}(\mathrm{d}_A) \cap \mathrm{im}(\delta_A))^{\perp} = \{0\}$$

Il me semble que je devais démontrer une égalité similaire plus haut. TO DO ! ! !

Remarque : Pour gérer les deux trucs louches plus haut, il faut utiliser le "closed range theorem". Et il faut compléter dans la topologie de l'espace de Sobolev $L^2_k = H_k$. Là on y démontre ce qu'on veut. Puis on revient à C^∞ par l'identité $\cap_k L^2_k = C^\infty$. Cette procédure est celle usuellememt utilisée pour la théorie de Hodge standard.

22 Décomposition simple de la théorie de Hodge :

22.1 Introduction :

Le but de cette section est de décomposer la théorie de Hodge lors d'une décomposition simple
$$X^n = Y^{n-1} \times \mathbb{R}$$
Des résultats similaires s'obtiennent aisément pour le cas $X^n = Y^{n-1} \times [0,1]$.

22.2 Le lieu, la métrique, la forme volume :

Soit $X^n = Y^{n-1} \times \mathbb{R}$ lisse orientable muni d'une métrique g de signature s_g. Je dénoterai à la fois les points de $\mathbb{R}$ par t et à la fois par $t : X \to \mathbb{R}$ la coordonnée t sur X. Dénotons par $Y_t := Y \times \{t\}$ les tranches t constantes. Posons la famille d'inclusions
$$\begin{aligned} \iota_t : Y &\hookrightarrow X \\ y &\mapsto (y,t) \end{aligned}$$
Supposons que la métrique g sur X se décompose comme
$$g = \tilde{g} + s_t \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t$$
de sorte que $\tilde{g}(\partial_t, \cdot) = 0$, que $s_t = \pm 1$, et que pour tout t la restriction $\tilde{g}|_{Y_t}$ est une métrique pseudo-riemannienne de signature $s_{\tilde{g}} = s_g \cdot s_t$ sur Y_t. Considérons le champ vectoriel $\partial_t := s_t(\mathrm{d}t)^g$. Ce champ vectorel vérifie $\mathrm{d}t(\partial_t) = \mathrm{d}t((s_t\mathrm{d}t)^g) = s_t^2 = 1$ tel que souhaité. Posons
$$g_t := \iota_t^* \tilde{g}$$
C'est une famille de métriques pseudo-riemanniennes sur Y paramétrée par t. Sur chaque tranche Y_t se trouve une forme volume $\Omega_{\tilde{g}|_{Y_t}}$ qui vérifie
$$\Omega_{g_t} = \Omega_{\iota_t^*\tilde{g}} = \iota_t^* \Omega_{\tilde{g}|_{Y_t}}$$
Les formes volumes $\Omega_{\tilde{g}|_{Y_t}}$ sur chaque tranche Y_t déterminent une $(n-1)$-forme $\Omega_{\tilde{g}}$ sur X telle que
$$\Omega_{\tilde{g}}|_{Y_t} = \Omega_{\tilde{g}|_{Y_t}}$$

Puisque dt est diagonalisé en g sur X, on a l'égalité

$$\Omega_g = \Omega_{\tilde{g}} \wedge \mathrm{d}t$$

Enfin, la signature de $\tilde{g}$ et celle de g sont reliées par $s_{\tilde{g}} = s_g \cdot s_t$.

22.3 Produit scalaire sur les k-formes :

Dénotons par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{g}}$ le produit induit par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{g}|_{Y_t}}$ sur chaque tranche Y_t.

Proposition : Soient $\alpha, \beta \in \Omega^k(X)$ et $\gamma \in \Omega^{k+1}(X)$ ne contenant pas de dt, i.e. $\iota_{\partial_t}\alpha = \iota_{\partial_t}\beta = \iota_{\partial_t}\gamma = 0$. Alors on a les trois égalités suivantes :

$$\langle \alpha, \beta \rangle_g = \langle \alpha, \beta \rangle_{\tilde{g}}$$
$$\langle \alpha \wedge \mathrm{d}t, \beta \wedge \mathrm{d}t \rangle_g = s_t \langle \alpha, \beta \rangle_{\tilde{g}}$$
$$\langle \alpha \wedge \mathrm{d}t, \gamma \rangle_g = 0$$

Preuve : Les égalités découlent du fait que dt est diagonalité en g. Montrons la première égalité :

$$\langle \alpha, \beta \rangle_g = \iota_{\beta_k^g} ... \iota_{\beta_1^g} \alpha = \iota_{\beta_k^{\tilde{g}}} ... \iota_{\beta_1^{\tilde{g}}} \alpha = \langle \alpha, \beta \rangle_{\tilde{g}}$$

Montrons la seconde égalité :

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \wedge \mathrm{d}t, \beta \wedge \mathrm{d}t \rangle_g &= \iota_{(\mathrm{d}t)^g} \iota_{\beta_k^g} ... \iota_{\beta_1^g} (\alpha \wedge \mathrm{d}t) \\
&= \iota_{(\mathrm{d}t)^g} \left(\iota_{\beta_k^g} ... \iota_{\beta_1^g} \alpha \right) \mathrm{d}t \\
&= \left(\iota_{(\mathrm{d}t)^g} \mathrm{d}t \right) \langle \alpha, \beta \rangle_{\tilde{g}} \\
&= s_t \langle \alpha, \beta \rangle_{\tilde{g}}
\end{aligned}$$

La troisième égalité est évidente. □

22.4 Opérateur ⋆ de dualité de Hodge :

Souvenons-nous que l'opérateur de dualité de Hodge peut s'écrire explicitement comme :

$$\star\alpha = \iota_{\alpha^g} \Omega_g \quad \text{i.e.} \quad \star\left(\alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^k\right) = \iota_{(\alpha^k)^g} ... \iota_{(\alpha^1)^g} \Omega_g$$

Ici, $\Omega_g = \Omega_{\tilde{g}} \wedge \mathrm{d}t$. Il est donc possible de relier la dualité de Hodge sur X à celle sur chaque tranche Y_t. Dénotons par $\star_g : \Omega^k(X) \to \Omega^{n-k}(X)$ la dualité de Hodge sur X et par $\star_{\tilde{g}} : \Omega^k(X) \to \Omega^{n-k-1}(X)$ celle induite par la dualité $\star_{\tilde{g}|_{Y_t}}$ sur chaque tranche Y_t.

Proposition : Soit α une k-forme sur X ne contenant pas de $\mathrm{d}t$, i.e. $\iota_{\partial_t}\alpha = 0$. Alors

$$\star_g\alpha = (\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t$$

$$\star_g(\alpha \wedge \mathrm{d}t) = s_t(-1)^{n-k-1}(\star_{\tilde{g}}\alpha)$$

où $\star_{\tilde{g}}\alpha \in \Omega^{n-k-1}(X)$ ne contient pas de $\mathrm{d}t$.

Preuve : D'abord la première égalité :

$$\begin{aligned}
\star_g\alpha &= \iota_{\alpha^g}\Omega_g \\
&= \iota_{\alpha^g}(\Omega_{\tilde{g}} \wedge \mathrm{d}t) \\
&= (\iota_{\alpha^g}\Omega_{\tilde{g}}) \wedge \mathrm{d}t \\
&= (\iota_{\alpha^{\tilde{g}}}\Omega_{\tilde{g}}) \wedge \mathrm{d}t \\
&= (\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Où $\alpha^g = \alpha^{\tilde{g}}$ et $\iota_{\alpha^g}\mathrm{d}t = 0$ découlent du fait que α ne contient pas de $\mathrm{d}t$ et que $\mathrm{d}t$ est diagonalisé en g. Remarquons que $\star_{\tilde{g}}\alpha$ est une $(n-k-1)$-forme ne contenant pas de $\mathrm{d}t$. Ensuite la seconde égalité :

$$\begin{aligned}
\star_g(\alpha \wedge \mathrm{d}t) &= \iota_{(\mathrm{d}t)^g}\iota_{\alpha^g}\Omega_g \\
&= s_t\iota_{\partial_t}\iota_{\alpha^g}(\Omega_{\tilde{g}} \wedge \mathrm{d}t) \\
&= s_t\iota_{\partial_t}((\iota_{\alpha^g}\Omega_{\tilde{g}}) \wedge \mathrm{d}t) \\
&= s_t\iota_{\partial_t}((\iota_{\alpha^{\tilde{g}}}\Omega_{\tilde{g}}) \wedge \mathrm{d}t) \\
&= s_t\iota_{\partial_t}((\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t) \\
&= s_t(-1)^{n-k-1}(\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge (\iota_{\partial_t}\mathrm{d}t) \\
&= s_t(-1)^{n-k-1}(\star_{\tilde{g}}\alpha)
\end{aligned}$$

□

22.5 Produit scalaire L^2 sur $\Omega^k(X)$:

Proposition : Soient $\alpha, \beta \in \Omega^k(X)$ et $\gamma \in \Omega^{k+1}(X)$ ne contenant pas de dt, i.e. $\iota_{\partial_t}\alpha = \iota_{\partial_t}\beta = \iota_{\partial_t}\gamma = 0$. Alors on a les trois égalités suivantes :

$$(\alpha, \beta)_g = \int_{\mathbb{R}} (\alpha|_{Y_t}, \beta|_{Y_t})_{\tilde{g}|_{Y_t}} \mathrm{d}t$$

$$(\alpha \wedge \mathrm{d}t, \beta \wedge \mathrm{d}t)_g = s_t \int_{\mathbb{R}} (\alpha|_{Y_t}, \beta|_{Y_t})_{\tilde{g}|_{Y_t}} \mathrm{d}t$$

$$(\alpha \wedge \mathrm{d}t, \gamma)_g = 0$$

Preuve : D'abord la première égalité :

$$\begin{aligned}
(\alpha, \beta)_g &= \int_X \langle \alpha, \beta \rangle_g \Omega_g \\
&= \int_{Y \times \mathbb{R}} \langle \alpha, \beta \rangle_{\tilde{g}} \Omega_{\tilde{g}} \wedge \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{Y_t} \langle \alpha|_{Y_t}, \beta|_{Y_t} \rangle_{\tilde{g}|_{Y_t}} \Omega_{\tilde{g}} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\alpha|_{Y_t}, \beta|_{Y_t})_{\tilde{g}|_{Y_t}} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

La seconde découle de la même manière du fait que $\langle \alpha \wedge \mathrm{d}t, \beta \wedge \mathrm{d}t \rangle_g |_{Y_t} = s_t \langle \alpha|_{Y_t}, \beta|_{Y_t} \rangle_{\tilde{g}|_{Y_t}}$. La troisième découle du fait que $\langle \alpha \wedge \mathrm{d}t, \gamma \rangle_g = 0$. □

Corollaire : Soient $\alpha, \beta \in \Omega^k(X)$ sans dt. Posons $\alpha_t := \iota_t^* \alpha$ et $\beta_t := \iota_t^* \beta$ deux familles de 1-formes sur Y et $g_t := \iota_t^* \tilde{g}$ une famille de métriques sur Y. Alors

$$(\alpha, \beta)_g = \int_{\mathbb{R}} (\alpha_t, \beta_t)_{g_t} \mathrm{d}t$$

$$(\alpha \wedge \mathrm{d}t, \beta \wedge \mathrm{d}t)_g = s_t \int_{\mathbb{R}} (\alpha_t, \beta_t)_{g_t} \mathrm{d}t$$

22.6 Codifférentielle :

Rappel : La codifférentielle $\delta : \Omega^k(X) \to \Omega^{k-1}(X)$ est définie par $\delta := (-1)^k \star^{-1} \mathrm{d}\star$ et se reformule comme $\delta = (-1)^{nk+n+1} s \star \mathrm{d}\star$. Elle est reliée à l'opérateur adjoint d^* de la différentielle extérieure d via :

$$(\mathrm{d}\alpha, \beta)_g - (\alpha, \delta\beta)_g = \int_{\partial X} \alpha \wedge \star_g \beta$$

pour $\alpha \in \Omega^k(X)$ et $\beta \in \Omega^{k+1}(X)$. Lorsque X est sans bord, $\delta = \mathrm{d}^*$ sous $(\cdot, \cdot)_g$. Le terme de droite dans la dernière égalité contient bel et bien $\star_g \beta$ sur X. Relions ça à $\star_{\tilde{g}}$.

Proposition : Soit $\alpha \in \Omega^k(X)$ ne contenant pas de dt. Alors :

$$\mathrm{d}|_X \alpha = \mathrm{d}|_{Y_t} \alpha + (-1)^k \alpha^{(t)} \wedge \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}|_X (\alpha \wedge \mathrm{d}t) = \mathrm{d}|_{Y_t} \alpha \wedge \mathrm{d}t$$

où $\mathrm{d}|_{Y_t}$ est sur X induit par chaque tranche $\mathrm{d}|_{Y_t} \alpha|_{Y_t}$. Ici $\alpha^{(t)}|_{Y_t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha|_{Y_t})$ est la dérivée en t de la famille de 1-formes $\alpha|_{Y_t}$. C'est-à-dire, $\alpha^{(t)}|_{Y_t} = (\iota_t^{-1})^* \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iota_t^* \alpha\right)$.

Preuve : La première égalité est évidente car $\mathrm{d}|_{\mathbb{R}}(\alpha) = \mathrm{d}t \wedge \alpha^{(t)} = (-1)^k \alpha^{(t)} \wedge \mathrm{d}t$. La seconde découle de la première :

$$\mathrm{d}|_X (\alpha \wedge \mathrm{d}t) = (\mathrm{d}|_X \alpha) \wedge \mathrm{d}t = (\mathrm{d}|_{Y_t} \alpha + (-1)^k \alpha^{(t)} \wedge \mathrm{d}t) \wedge \mathrm{d}t = \mathrm{d}|_{Y_t} \alpha \wedge \mathrm{d}t$$

□

Proposition : Soit $\alpha \in \Omega^k(X)$ ne contenant pas de dt. Alors on a les deux égalités suivantes :

$$\delta_g|_X \alpha = \delta_{\tilde{g}}|_{Y_t} \alpha$$

$$\delta_g|_X (\alpha \wedge \mathrm{d}t) = (\delta_{\tilde{g}}|_{Y_t} \alpha) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk+k+1} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}} \alpha)^{(t)}$$

Preuve : D'abord la première égalité :

$$\begin{aligned}
\delta_g|_X\alpha &= (-1)^{nk+n+1}s_g \star_g \mathrm{d}|_X \star_g \alpha \\
&= (-1)^{nk+n+1}s_g \star_g \mathrm{d}|_X(\star_{\tilde{g}}\alpha \wedge \mathrm{d}t) \\
&= (-1)^{nk+n+1}s_g \star_g ((\mathrm{d}|_{Y_t} \star_{\tilde{g}} \alpha) \wedge \mathrm{d}t) \\
&= (-1)^{nk+n+1}s_g s_t(-1)^{n-(n-k)-1} \star_{\tilde{g}} \mathrm{d}|_{Y_t} \star_{\tilde{g}} \alpha \\
&= (-1)^{nk+n+k}s_g s_t \star_{\tilde{g}} \mathrm{d}|_{Y_t} \star_{\tilde{g}} \alpha \\
&= (-1)^{nk+n-k}s_{\tilde{g}} \star_{\tilde{g}} \mathrm{d}|_{Y_t} \star_{\tilde{g}} \alpha \\
&= \delta_{\tilde{g}}|_{Y_t}\alpha
\end{aligned}$$

où $\delta_{\tilde{g}}|_{Y_t} = (-1)^{nk+n-k}s_{\tilde{g}} \star_{\tilde{g}} \mathrm{d}|_{Y_t}\star_{\tilde{g}}$ car $\dim Y = n-1$. Ensuite la seconde égalité :

$$\begin{aligned}
&\delta_g|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}t) \\
=\ & (-1)^{n(k+1)+n+1}s_g \star_g \mathrm{d}|_X \star_g (\alpha \wedge \mathrm{d}t) \\
=\ & (-1)^{nk+1}s_g \star_g \mathrm{d}|_X \left(s_t(-1)^{n-k-1} \star_{\tilde{g}} \alpha\right) \\
=\ & (-1)^{nk+n+k}s_g s_t \star_g \mathrm{d}|_X(\star_{\tilde{g}}\alpha) \\
=\ & (-1)^{nk+n+k}s_g s_t \star_g (\mathrm{d}|_{Y_t}(\star_{\tilde{g}}\alpha) + (-1)^{n-k-1}(\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} \wedge \mathrm{d}t) \\
=\ & (-1)^{nk+n+k}s_g s_t \star_g (\mathrm{d}|_{Y_t} \star_{\tilde{g}} \alpha) + (-1)^{nk+n+k}(-1)^{n-k-1}s_g s_t \star_g ((\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} \wedge \mathrm{d}t) \\
=\ & (-1)^{nk+n+k}s_{\tilde{g}}(\star_{\tilde{g}}\mathrm{d}|_{Y_t} \star_{\tilde{g}} \alpha) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk-1}s_g s_t s_t(-1)^{n-(n-k-1)-1} \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} \\
=\ & (\delta_{\tilde{g}}|_{Y_t}\alpha) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk+k+1}s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)}
\end{aligned}$$

□

Remarque : Quand j'utiliserai cette dernière formule, ne pas oublier que $s_g = s_{\tilde{g}}s_t$.

Remarque : Il semble possible de développer d'avantage le dernier terme $\star_{\tilde{g}}(\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)}$ de la seconde égalité de la dernière proposition. Mais ça impliquerait des dérivées temporelles de la métrique, donc des symboles de Christoffel et tout le tralalala.

QUESTION : Décomposer l'équation suivante ?

$$(\mathrm{d}\alpha, \beta)_g - (\alpha, \delta\beta)_g = \int_{\partial X} \alpha \wedge \star_g\beta$$

Deux cas à considérer : $X = Y \times \mathbb{R}$ où Y est à bord et le cas où $X = Y \times [0,1]$ où Y est sans bord.

22.7 Codifférentielle covariante :

Soit $X^n = Y^{n-1} \times \mathbb{R}$. Soit $\partial_t := s_t(\mathrm{d}t)^g \in \mathfrak{X}(X)$ pour $g = \tilde{g} + s_t \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t$ où $\tilde{g}(\partial_t, \cdot) = 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ la restriction $\tilde{g}|_{Y_t}$ soit une métrique pseudo-riemannienne de signature $s_{\tilde{g}} = s_g s_t$ sur Y_t. Supposons $\pi_X : P_X \to X$ trivial où $P_X = P_Y \times \mathbb{R}$ pour $\pi_Y : P_Y \to Y$ trivial. Soit $s_{\alpha,X}$ une section de P_X constante en $\mathbb{R}$, i.e. $s_{\alpha,X}(y,t) = (s_{\alpha,Y}(y), t), \forall y \in Y, t \in \mathbb{R}$ pour une certaine section $s_{\alpha,Y}$ de P_Y. Posons $\partial_t^\sharp \in \mathfrak{X}(P_X)$ par $\partial_t^\sharp|_{s_{\alpha,X}\cdot g} := (\Phi_g)_*(s_{\alpha,X})_*\partial_t \in T_{s_{\alpha,X}\cdot g}P_X$ pour tout $g \in G$. Soit $A \in \mathcal{A}_X$. Soit $\psi^\sharp := A(\partial_t^\sharp)$ et $\tilde{A} := A - \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$. On a alors une décomposition $A = \tilde{A} + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$ où $\psi^\sharp \in \Omega^0_{\mathrm{Ad,hor}}(P_X;\mathfrak{g})$ est une 0-forme basique et où $\tilde{A}$ est une forme de connexion sur chaque tranche $P_{Y_t} := P_Y \times \{t\} \subset P_X$, i.e. $\tilde{A}|_{P_{Y_t}} \in \mathcal{A}_{P_{Y_t}}$. On peut alors énoncer la proposition suivante :

Proposition : Soit $\alpha \in \Omega^k(X;E)$, où $E = P \times_\rho V$, ne contenant pas de $\mathrm{d}t$. Alors on a les deux égalités suivantes :

$$\mathrm{d}_A|_X\alpha = \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\alpha + (-1)^k(\alpha^{(t)} + (\rho_*\psi)\circ\alpha)\wedge \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}_A|_X(\alpha\wedge\mathrm{d}t) = (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\alpha)\wedge\mathrm{d}t$$

Preuve : D'abord la première égalité :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_A|_X\alpha &= \left(\mathrm{d}^A|_{P_X}\alpha^\sharp\right)_\sharp \\
&= \left(\mathrm{d}|_{P_X}\alpha^\sharp + (\rho_*A)(\wedge,\circ)\alpha^\sharp\right)_\sharp \\
&= \left(\mathrm{d}|_{P_{Y_t}}\alpha^\sharp + \mathrm{d}t^\sharp\wedge(\alpha^\sharp)^{(t)} + (\rho_*(\tilde{A}+\psi^\sharp\mathrm{d}t^\sharp))(\wedge,\circ)\alpha^\sharp\right)_\sharp \\
&= \left(\mathrm{d}|_{P_{Y_t}}\alpha^\sharp + \mathrm{d}t^\sharp\wedge(\alpha^\sharp)^{(t)} + (\rho_*\tilde{A})(\wedge,\circ)\alpha^\sharp + (\rho_*\psi^\sharp\mathrm{d}t^\sharp)(\wedge,\circ)\alpha^\sharp\right)_\sharp \\
&= \left(\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{Y_t}}\alpha + (-1)^k(\alpha^\sharp)^{(t)}\wedge\mathrm{d}t^\sharp + (-1)^k(\rho_*\psi^\sharp)\circ\alpha^\sharp\wedge\mathrm{d}t^\sharp\right)_\sharp \\
&= \left(\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{Y_t}}\alpha^\sharp + (-1)^k((\alpha^\sharp)^{(t)} + (\rho_*\psi^\sharp)\circ\alpha^\sharp)\wedge\mathrm{d}t^\sharp\right)_\sharp \\
&= \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\alpha + (-1)^k(\alpha^{(t)} + (\rho_*\psi)\circ\alpha)\wedge\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ensuite la seconde :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_A|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}t) &= \left(\mathrm{d}^A|_{P_X}(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp)\right)_\sharp \\
&= \left(\mathrm{d}|_{P_X}(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp) + (\rho_* A)(\wedge, \circ)(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp)\right)_\sharp \\
&= \left((\mathrm{d}|_{P_{Y_t}}\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}t^\sharp + (\rho_* \tilde{A})(\wedge, \circ)(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp) + (\rho_* \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp)(\wedge, \circ)(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp)\right)_\sharp \\
&= \left((\mathrm{d}|_{P_{Y_t}}\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}t^\sharp + (\rho_* \tilde{A})(\wedge, \circ)(\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}t^\sharp\right)_\sharp \\
&= \left((\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{Y_t}}\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}t^\sharp\right)_\sharp \\
&= (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\alpha) \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

Proposition : Soit $\alpha \in \Omega^k(X; E)$, où $E = P \times_\rho V$, ne contenant pas de $\mathrm{d}t$. Alors on a les deux égalités suivantes :

$$\delta_{A,g}|_X \alpha = \delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_t}\alpha$$

$$\delta_{A,g}|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}t) = \left(\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_t}\alpha\right) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk+k+1} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (-1)^{k+1}(\rho_*\psi) \circ \alpha$$

Preuve : On calcule d'abord la première égalité :

$$\begin{aligned}
\delta_{A,g}|_X\alpha &= (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A|_X \star_g \alpha \\
&= (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A|_X \left((\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&= (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t} \star_{\tilde{g}} \alpha) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&= (-1)^{nk+n+1} s_{\tilde{g}} (-1)^{n-(n-k)-1} \left(\star_{\tilde{g}} \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t} \star_{\tilde{g}} \alpha\right) \\
&= (-1)^{nk+n+k} s_{\tilde{g}} \left(\star_{\tilde{g}} \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t} \star_{\tilde{g}} \alpha\right) \\
&= (-1)^{nk+n+k} (-1)^{nk+k+n} \left(\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_t}\alpha\right) \\
&= \delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_t}\alpha
\end{aligned}$$

Ensuite la seconde égalité :

$$\begin{aligned}
& \delta_{A,g}|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}t) \\
= \ & (-1)^{n(k+1)+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A|_X \star_g (\alpha \wedge \mathrm{d}t) \\
= \ & (-1)^{nk+1} s_g s_t \star_g \mathrm{d}_A|_X \left((-1)^{n-k-1} \star_{\tilde{g}} \alpha\right) \\
= \ & (-1)^{nk+n+k} s_g s_t \star_g \mathrm{d}_A|_X \left(\star_{\tilde{g}} \alpha\right) \\
= \ & (-1)^{nk+n+k} s_g s_t \star_g \left(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t} \star_{\tilde{g}} \alpha\right) \\
& +(-1)^{nk+n+k} s_g s_t \star_g \left((-1)^{n-k-1}((\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (\rho_*\psi) \circ (\star_{\tilde{g}}\alpha)) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
= \ & (-1)^{nk+n+k} s_g s_t \left(\star_{\tilde{g}} \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t} \star_{\tilde{g}} \alpha\right) \wedge \mathrm{d}t \\
& +(-1)^{nk-1} s_g s_t \star_g \left(\left((\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (\rho_*\psi) \circ (\star_{\tilde{g}}\alpha)\right) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
= \ & \left(\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_t}\alpha\right) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk-1} s_g s_t^2 (-1)^{n-(n-k-1)-1} \star_{\tilde{g}} \left((\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (\rho_*\psi) \circ (\star_{\tilde{g}}\alpha)\right) \\
= \ & \left(\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_t}\alpha\right) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk+k+1} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (-1)^{nk+k+1} s_g (\rho_*\psi) \circ (\star_{\tilde{g}}^2\alpha) \\
= \ & \left(\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_t}\alpha\right) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk+k+1} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (-1)^{nk+k+1} s_g (\rho_*\psi) \circ ((-1)^{(n-1)k+k} s_{\tilde{g}}\alpha) \\
= \ & \left(\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_t}\alpha\right) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk+k+1} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (-1)^{k+1} (\rho_*\psi) \circ \alpha
\end{aligned}$$

□

Corollaire : Une version équivalente de la dernière égalité est :

$$\delta_{A,g}|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}t) = \left(\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_t}\alpha\right) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{k+1} s_t \star_{\tilde{g}}^{-1} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (-1)^{k+1} (\rho_*\psi) \circ \alpha$$

Preuve : Il suffit de montrer que :

$$(-1)^{nk+k+1} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} = (-1)^{k+1} s_t \star_{\tilde{g}}^{-1} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)}$$

On calcule directement :

$$\begin{aligned}
& (-1)^{nk+k+1} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} \\
= \ & (-1)^{nk+k+1} s_g s_{\tilde{g}} (-1)^{(n-1)(n-k-1)+(n-k-1)} \star_{\tilde{g}}^{-1} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} \\
= \ & (-1)^{nk+k+1} (-1)^{n(n-1)-k(n-1)-n+1+n-k-1} s_t \star_{\tilde{g}}^{-1} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} \\
= \ & (-1)^{nk+k+1} (-1)^{n^2-n-kn-k-n+1+n-k-1} s_t \star_{\tilde{g}}^{-1} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} \\
= \ & (-1)^{k+1} s_t \star_{\tilde{g}}^{-1} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)}
\end{aligned}$$

□

Corollaire : Si $\tilde{g}$ est constante en t, alors la seconde égalité de la dernière proposition revient à :

$$\delta_{A,g}|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}t) = \left(\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_t}\alpha\right) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{k+1} s_t \alpha^{(t)} + (-1)^{k+1}(\rho_* \psi) \circ (\alpha)$$

Preuve : Puisque $\tilde{g}$ est constante en t, il suit que

$$\star_{\tilde{g}}^{-1}(\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} = \star_{\tilde{g}}^{-1} \star_{\tilde{g}} (\alpha)^{(t)} = \alpha^{(t)}$$

□

22.8 (Anti-)auto-dualité :

Proposition : Soit n tel que $(-1)^{n(n+1)/2} s_g = 1$ (i.e. telle que $\star_{\tilde{g}}^2 = 1$ sur les $(k = n/2)$-formes). Soit

$$\alpha = \beta + \gamma \wedge \mathrm{d}t \in \Omega^{n/2}(X)$$

où $\beta \in \Omega^{n/2}(X)$ ne contient pas de dt et où $\gamma \in \Omega^{n/2-1}(X)$ ne contient pas de dt. Alors α est (anti-)auto-duale, i.e. $\star\alpha = \pm \star \alpha$ si et seulement si l'équation suivante est satisfaite :

$$\star_{\tilde{g}}\beta = \pm\gamma$$

Preuve : D'abord, $n - k = 2k - k = k$. Ensuite, considérons la suite de « si et seulement si » suivantes :

$$\begin{aligned}
& \star_g \alpha = \pm\alpha \\
\Longleftrightarrow\ & \star_g (\beta + \gamma \wedge \mathrm{d}t) = \pm(\beta + \gamma \wedge \mathrm{d}t) \\
\Longleftrightarrow\ & \star_g \beta + \star_g(\gamma \wedge \mathrm{d}t) = \pm\beta \pm \gamma \wedge \mathrm{d}t \\
\Longleftrightarrow\ & (\star_{\tilde{g}}\beta) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{n-k} s_t \star_{\tilde{g}} \gamma = \pm\beta \pm \gamma \wedge \mathrm{d}t \\
\Longleftrightarrow\ & \star_{\tilde{g}} \beta = \pm\gamma \quad \text{et} \quad (-1)^k s_t \star_{\tilde{g}} \gamma = \pm\beta \\
\Longleftrightarrow\ & \star_{\tilde{g}} \beta = \pm\gamma \quad \text{et} \quad (-1)^k s_t \star_{\tilde{g}} \gamma = \pm\beta
\end{aligned}$$

où la première égalité est égale à la seconde puisque :

$$\begin{aligned}
&\star_{\tilde{g}}\,\beta = \pm\gamma \\
\iff\ &\star_{\tilde{g}}^2\,\beta = \pm\star_{\tilde{g}}\,\gamma \\
\iff\ &(-1)^{nk}s_{\tilde{g}}\beta = \pm\star_{\tilde{g}}\,\gamma \\
\iff\ &(-1)^{nk}(-1)^{n(n+1)/2}s_t\beta = \pm\star_{\tilde{g}}\,\gamma \\
\iff\ &(-1)^k s_t\star_{\tilde{g}}\,\gamma = \pm\beta
\end{aligned}$$

car $s_{\tilde{g}} = s_g s_t = (-1)^{n(n+1)/2}s_t$ et $n = 2k$. D'où :

$$\star_g\alpha = \pm\alpha \iff \star_{\tilde{g}}\beta = \pm\gamma$$

□

Bref, les équations auto-duales et anti-auto-duales vérifient :

$$\star_g\alpha = \alpha \iff \star_{\tilde{g}}\beta = \gamma$$

$$\star_g\alpha = -\alpha \iff \star_{\tilde{g}}\beta = -\gamma$$

23 Décomposition double de la théorie de Hodge :

23.1 Introduction :

Le but de cette section est de décomposer la théorie de Hodge lors d'une décomposition double

$$X^n = Y^{n-2} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Des résultats similaires s'obtiennent aisément pour le cas $X^n = Y^{n-2} \times [0,1] \times \mathbb{R}$.

Ici, contrairement à la dernière section, je suppose que s et t sont de signature positive $g = \tilde{g} + \mathrm{d}s \otimes \mathrm{d}s + \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t$. Il faudrait éventuellement généraliser ça à une métrique du type $g = \tilde{g} + s_s \mathrm{d}s \otimes \mathrm{d}s + s_t \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t$ où $s_s, s_t \in \{-1, 1\}$ pour gérer des cas de signature pseudo-riemannienne.

23.2 Le lieu, la métrique, la forme volume :

Soit $X^n = Y^{n-2} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lisse orientable muni d'une métrique g. Je dénoterai à la fois les points de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par (s,t) et à la fois par $s : X \to \mathbb{R}$ et $t : X \to \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées s et t sur X. Dénotons par $Y_{s,t} := Y \times \{s\} \times \{t\}$ les tranches où s et t sont constantes. Posons la famille d'inclusions

$$\begin{aligned} \iota_{s,t} : Y &\hookrightarrow X \\ y &\mapsto (y, s, t) \end{aligned}$$

Supposons que la métrique g sur X se décompose comme

$$g = \tilde{g} + \mathrm{d}s \otimes \mathrm{d}s + \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t$$

où $\tilde{g}(\partial_s, \cdot) = 0$ et $\tilde{g}(\partial_t, \cdot) = 0$ et telle que pour tout s et tout t la restriction $\tilde{g}|_{Y_{s,t}}$ soit une métrique riemannienne sur $Y_{s,t}$. Considérons les champs vectoriels $\partial_s := (\mathrm{d}s)^g$ et $\partial_t := (\mathrm{d}t)^g$ donné par g-musicalité dièse-riemannienne des 1-formes différentielles $\mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}t$. Posons

$$g_{s,t} := \iota_{s,t}^* \tilde{g}$$

C'est une famille de métriques sur Y paramétrée par s et t. Sur chaque tranche $Y_{s,t}$ se trouve une forme volume $\Omega_{\tilde{g}|_{Y_{s,t}}}$ qui vérifie

$$\Omega_{g_{s,t}} = \Omega_{\iota_{s,t}^* \tilde{g}} = \iota_{s,t}^* \Omega_{\tilde{g}|_{Y_{s,t}}}$$

Les formes volumes $\Omega_{\tilde{g}|_{Y_{s,t}}}$ sur chaque tranche $Y_{s,t}$ déterminent une $(n-2)$-forme $\Omega_{\tilde{g}}$ sur X telle que

$$\Omega_{\tilde{g}}|_{Y_{s,t}} = \Omega_{\tilde{g}|_{Y_{s,t}}}$$

Puisque $\mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}t$ sont diagonalisés en g sur X, on a l'égalité

$$\Omega_g = \Omega_{\tilde{g}} \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

Remarque : Ne pas confondre la signature $s_{\tilde{g}} = s_g$ et le paramètre s.

23.3 Produit scalaire sur les k-formes :

Dénotons par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{g}}$ le produit induit par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{g}|_{Y_{s,t}}}$ sur chaque tranche $Y_{s,t}$.

Proposition : Soient $\alpha, \beta \in \Omega^k(X)$, $\gamma \in \Omega^{k+1}(X)$ et $\eta \in \Omega^{k+2}(X)$ ne contenant pas ni de $\mathrm{d}s$ ni de $\mathrm{d}t$, i.e. $\iota_{\partial_t}\alpha = \iota_{\partial_s}\alpha = \iota_{\partial_t}\beta = \iota_{\partial_s}\beta = \iota_{\partial_t}\gamma = \iota_{\partial_s}\gamma = \iota_{\partial_t}\eta = \iota_{\partial_s}\eta = 0$. Alors :

$$\langle \alpha, \beta \rangle_g = \langle \alpha, \beta \rangle_{\tilde{g}}$$
$$\langle \alpha \wedge \mathrm{d}t, \beta \wedge \mathrm{d}t \rangle_g = \langle \alpha, \beta \rangle_{\tilde{g}}$$
$$\langle \alpha \wedge \mathrm{d}s, \beta \wedge \mathrm{d}s \rangle_g = \langle \alpha, \beta \rangle_{\tilde{g}}$$
$$\langle \alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t, \beta \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \rangle_g = \langle \alpha, \beta \rangle_{\tilde{g}}$$
$$\langle \alpha \wedge \mathrm{d}t, \gamma \rangle_g = 0$$
$$\langle \alpha \wedge \mathrm{d}s, \gamma \rangle_g = 0$$
$$\langle \alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t, \eta \rangle_g = 0$$
$$\langle \alpha \wedge \mathrm{d}s, \beta \wedge \mathrm{d}t \rangle_g = 0$$

Preuve : Les égalités découlent du fait que $\mathrm{d}t$ est diagonalité en g. □

Remarque : Règle générale : si le nombre de $\mathrm{d}s$ et de $\mathrm{d}t$ n'est pas le même à gauche et à droite alors le produit scalaire est nul.

23.4 Opérateur $\star$ de dualité de Hodge :

Souvenons-nous que l'opérateur de dualité de Hodge peut s'écrire explicitement comme :

$$\star\alpha = \iota_{\alpha^g}\Omega_g \quad \text{i.e.} \quad \star(\alpha^1 \wedge ... \wedge \alpha^k) = \iota_{(\alpha^k)^g}...\iota_{(\alpha^1)^g}\Omega_g$$

Ici, $\Omega_g = \Omega_{\tilde{g}} \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$. Il est donc possible de relier la dualité de Hodge sur X à celle sur chaque tranche $Y_{s,t}$. Dénotons par $\star_g : \Omega^k(X) \to \Omega^{n-k}(X)$ la dualité de Hodge sur X et par $\star_{\tilde{g}} : \Omega^k(X) \to \Omega^{n-k-2}(X)$ celle induite par la dualité $\star_{\tilde{g}|_{Y_{s,t}}}$ sur chaque tranche $Y_{s,t}$.

Proposition : Soit α une k-forme sur X ne contenant pas de ds ni de dt, i.e. $\iota_{\partial_s}\alpha = \iota_{\partial_t}\alpha = 0$. Alors

$$\star_g\alpha = (\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$
$$\star_g(\alpha \wedge \mathrm{d}s) = (-1)^{n-k}(\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t$$
$$\star_g(\alpha \wedge \mathrm{d}t) = (-1)^{n-k-1}(\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s$$
$$\star_g(\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) = \star_{\tilde{g}}\alpha$$

où $\star_{\tilde{g}}\alpha \in \Omega^{n-k-2}(X)$ ne contient pas de ds ni de dt.

Preuve : D'abord la première égalité :

$$\begin{aligned}
\star_g\alpha &= \iota_{\alpha^g}\Omega_g \\
&= \iota_{\alpha^g}(\Omega_{\tilde{g}} \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) \\
&= (\iota_{\alpha^g}\Omega_{\tilde{g}}) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= (\iota_{\alpha^{\tilde{g}}}\Omega_{\tilde{g}}) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= (\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Où $\alpha^g = \alpha^{\tilde{g}}$ et $\iota_{\alpha^g}\mathrm{d}s = \iota_{\alpha^g}\mathrm{d}t = 0$ découlent du fait que α ne contient pas de ds ni de dt et que ds et dt est diagonalisé en g. Remarquons que $\star_{\tilde{g}}\alpha$ est une

$(n-k-2)$-forme ne contienant pas de ds ni de dt. Ensuite la seconde égalité :

$$\begin{aligned}
\star_g(\alpha \wedge \mathrm{d}s) &= \iota_{(\mathrm{d}s)^g}\iota_{\alpha^g}\Omega_g \\
&= \iota_{\partial_s}\iota_{\alpha^g}(\Omega_{\tilde{g}} \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) \\
&= \iota_{\partial_s}((\iota_{\alpha^g}\Omega_{\tilde{g}}) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) \\
&= \iota_{\partial_s}((\iota_{\alpha^{\tilde{g}}}\Omega_{\tilde{g}}) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) \\
&= \iota_{\partial_s}((\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) \\
&= (-1)^{n-k-2}(\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge (\iota_{\partial_s}\mathrm{d}s) \wedge \mathrm{d}t \\
&= (-1)^{n-k}(\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Vient la troisième égalité :

$$\begin{aligned}
\star_g(\alpha \wedge \mathrm{d}t) &= \iota_{(\mathrm{d}t)^g}\iota_{\alpha^g}\Omega_g \\
&= \iota_{\partial_t}\iota_{\alpha^g}(\Omega_{\tilde{g}} \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) \\
&= \iota_{\partial_t}((\iota_{\alpha^g}\Omega_{\tilde{g}}) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) \\
&= \iota_{\partial_t}((\iota_{\alpha^{\tilde{g}}}\Omega_{\tilde{g}}) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) \\
&= \iota_{\partial_t}((\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) \\
&= (-1)^{n-k-3}(\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge (\iota_{\partial_t}\mathrm{d}t) \\
&= (-1)^{n-k-1}(\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Enfin, la dernière égalité :

$$\begin{aligned}
\star_g(\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) &= \iota_{(\mathrm{d}t)^g}\iota_{(\mathrm{d}s)^g}\iota_{\alpha^g}\Omega_g \\
&= \iota_{\partial_t}\iota_{\partial_s}\iota_{\alpha^g}(\Omega_{\tilde{g}} \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) \\
&= \iota_{\partial_t}\iota_{\partial_s}((\iota_{\alpha^g}\Omega_{\tilde{g}}) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) \\
&= \iota_{\partial_t}\iota_{\partial_s}((\iota_{\alpha^{\tilde{g}}}\Omega_{\tilde{g}}) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) \\
&= \iota_{\partial_t}\iota_{\partial_s}((\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) \\
&= \iota_{\partial_t}(-1)^{n-k-2}((\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge (\iota_{\partial_s}\mathrm{d}s) \wedge \mathrm{d}t) \\
&= \iota_{\partial_t}(-1)^{n-k}((\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t) \\
&= (-1)^{n-k}(-1)^{n-k-2}(\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge (\iota_{\partial_t}\mathrm{d}t) \\
&= \star_{\tilde{g}}\alpha
\end{aligned}$$

$\square$

23.5 Produit scalaire L^2 sur $\Omega^k(X)$:

Proposition : Soient $\alpha, \beta \in \Omega^k(X)$, $\gamma \in \Omega^{k+1}(X)$ et $\eta \in \Omega^{k+2}(X)$ ne contenant pas de ds ni de dt. Alors :

$$(\alpha, \beta)_g = \int_{\mathbb{R}^2} (\alpha|_{Y_{s,t}}, \beta|_{Y_{s,t}})_{\tilde{g}|_{Y_{s,t}}} \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

$$(\alpha \wedge \mathrm{d}t, \beta \wedge \mathrm{d}t)_g = \int_{\mathbb{R}^2} (\alpha|_{Y_{s,t}}, \beta|_{Y_{s,t}})_{\tilde{g}|_{Y_{s,t}}} \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

$$(\alpha \wedge \mathrm{d}s, \beta \wedge \mathrm{d}s)_g = \int_{\mathbb{R}^2} (\alpha|_{Y_{s,t}}, \beta|_{Y_{s,t}})_{\tilde{g}|_{Y_{s,t}}} \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

$$(\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t, \beta \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t)_g = \int_{\mathbb{R}^2} (\alpha|_{Y_{s,t}}, \beta|_{Y_{s,t}})_{\tilde{g}|_{Y_{s,t}}} \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

$$(\alpha \wedge \mathrm{d}t, \gamma)_g = 0$$

$$(\alpha \wedge \mathrm{d}s, \gamma)_g = 0$$

$$(\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t, \eta)_g = 0$$

$$(\alpha \wedge \mathrm{d}s, \beta \wedge \mathrm{d}t)_g = 0$$

Preuve : D'abord la première égalité :

$$\begin{aligned}
(\alpha, \beta)_g &= \int_X \langle \alpha, \beta \rangle_g \Omega_g \\
&= \int_{Y \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \langle \alpha, \beta \rangle_{\tilde{g}} \Omega_{\tilde{g}} \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{Y_{s,t}} \langle \alpha|_{Y_{s,t}}, \beta|_{Y_{s,t}} \rangle_{\tilde{g}|_{Y_{s,t}}} \Omega_{\tilde{g}} \right) \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\alpha|_{Y_{s,t}}, \beta|_{Y_{s,t}})_{\tilde{g}|_{Y_{s,t}}} \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ensuite la seconde :

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \mathrm{d}t, \beta \wedge \mathrm{d}t)_g &= \int_X \langle \alpha \wedge \mathrm{d}t, \beta \wedge \mathrm{d}t \rangle_g \Omega_g \\
&= \int_{Y\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \langle \alpha, \beta \rangle_{\tilde{g}} \Omega_{\tilde{g}} \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{Y_{s,t}} \langle \alpha|_{Y_{s,t}}, \beta|_{Y_{s,t}} \rangle_{\tilde{g}|_{Y_{s,t}}} \Omega_{\tilde{g}} \right) \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\alpha|_{Y_{s,t}}, \beta|_{Y_{s,t}})_{\tilde{g}|_{Y_{s,t}}} \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

La troisième égalité découle de la même manière que la seconde mais via $\langle \alpha \wedge \mathrm{d}s, \beta \wedge \mathrm{d}s \rangle_g = \langle \alpha, \beta \rangle_{\tilde{g}}$ cette fois. La quatrième égalité découle de $\langle \alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t, \beta \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \rangle_g = \langle \alpha, \beta \rangle_{\tilde{g}}$. Les quatre dernières égalités découlent des résultats d'orthogonalités de l'avant-dernière sous-section, à savoir $\langle \alpha \wedge \mathrm{d}t, \gamma \rangle_g = 0$, $\langle \alpha \wedge \mathrm{d}s, \gamma \rangle_g = 0$, $\langle \alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t, \eta \rangle_g = 0$ et $\langle \alpha \wedge \mathrm{d}s, \beta \wedge \mathrm{d}t \rangle_g = 0$. □

Corollaire : Soient $\alpha, \beta \in \Omega^k(X)$ sans ds ni dt. Posons $\alpha_{s,t} := \iota_{s,t}^*(\alpha|_{Y_{s,t}})$ et $\beta_{s,t} := \iota_{s,t}^*(\beta|_{Y_{s,t}})$ deux familles de 1-formes sur Y et $g_{s,t} := \iota_{s,t}^*(\tilde{g}|_{Y_{s,t}})$ une famille de métriques sur Y. Alors :

$$(\alpha, \beta)_g = \int_{\mathbb{R}^2} (\alpha_{s,t}, \beta_{s,t})_{g_{s,t}} \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

$$(\alpha \wedge \mathrm{d}t, \beta \wedge \mathrm{d}t)_g = \int_{\mathbb{R}^2} (\alpha_{s,t}, \beta_{s,t})_{g_{s,t}} \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

$$(\alpha \wedge \mathrm{d}s, \beta \wedge \mathrm{d}s)_g = \int_{\mathbb{R}^2} (\alpha_{s,t}, \beta_{s,t})_{g_{s,t}} \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

$$(\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t, \beta \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t)_g = \int_{\mathbb{R}^2} (\alpha_{s,t}, \beta_{s,t})_{g_{s,t}} \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

23.6 Codifférentielle :

Rappel : La codifférentielle $\delta : \Omega^k(X) \to \Omega^{k-1}(X)$ est définie par $\delta := (-1)^k \star^{-1} \mathrm{d}\star$ et se reformule comme $\delta = (-1)^{nk+n+1} s_g \star \mathrm{d} \star$. Elle est reliée à l'opérateur adjoint d^* de la différentielle extérieure d via

$$(\mathrm{d}\alpha, \beta)_g - (\alpha, \delta\beta)_g = \int_{\partial X} \alpha \wedge \star_g \beta$$

pour $\alpha \in \Omega^k(X)$ et $\beta \in \Omega^{k+1}(X)$. Lorsque X est sans bord, $\delta = \mathrm{d}^*$ sous $(\cdot, \cdot)_g$. Le terme de droite dans la dernière égalité contient bel et bien $\star_g \beta$ sur X. Relions ça à $\star_{\tilde{g}}$.

Proposition : Soit $\alpha \in \Omega^k(X)$ ne contenant pas de ds ni de dt. Alors :

$$\mathrm{d}|_X \alpha = \mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \alpha + (-1)^k \alpha^{(s)} \wedge \mathrm{d}s + (-1)^k \alpha^{(t)} \wedge \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}|_X (\alpha \wedge \mathrm{d}s) = (\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \alpha) \wedge \mathrm{d}s + (-1)^{k+1} \alpha^{(t)} \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}|_X (\alpha \wedge \mathrm{d}t) = (\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \alpha) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^k \alpha^{(s)} \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}|_X (\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) = (\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

où $\mathrm{d}|_{Y_{s,t}}$ est sur X induit par chaque tranche $\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \alpha|_{Y_{s,t}}$. Ici $\alpha^{(s)}|_{Y_{s,t}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\alpha|_{Y_{s,t}})$ et $\alpha^{(t)}|_{Y_{s,t}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha|_{Y_{s,t}})$ sont les dérivées en s et t de la famille de 1-formes $\alpha|_{Y_{s,t}}$.

Preuve : La première égalité est évidente. Les trois autres découlent de la première :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}|_X (\alpha \wedge \mathrm{d}s) &= (\mathrm{d}|_X \alpha) \wedge \mathrm{d}s \\
&= (\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \alpha + (-1)^k \alpha^{(s)} \wedge \mathrm{d}s + (-1)^k \alpha^{(t)} \wedge \mathrm{d}t) \wedge \mathrm{d}s \\
&= (\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \alpha) \wedge \mathrm{d}s + (-1)^{k+1} \alpha^{(t)} \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}|_X (\alpha \wedge \mathrm{d}t) &= (\mathrm{d}|_X \alpha) \wedge \mathrm{d}t \\
&= (\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \alpha + (-1)^k \alpha^{(s)} \wedge \mathrm{d}s + (-1)^k \alpha^{(t)} \wedge \mathrm{d}t) \wedge \mathrm{d}t \\
&= (\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \alpha) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^k \alpha^{(s)} \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}|_X (\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) &= (\mathrm{d}|_X \alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= (\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \alpha + (-1)^k \alpha^{(s)} \wedge \mathrm{d}s + (-1)^k \alpha^{(t)} \wedge \mathrm{d}t) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= (\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

Proposition : Soit $\alpha \in \Omega^k(X)$ ne contenant pas de ds ni de dt. Alors :

$$\delta_g|_X \alpha = \delta_{\tilde{g}}|_{Y_{s,t}} \alpha$$

$$\delta_g|_X(\alpha\wedge \mathrm{d}s) = (\delta_{\tilde g}|_{Y_{s,t}}\alpha)\wedge \mathrm{d}s + (-1)^{nk+1}s_g \star_{\tilde g} (\star_{\tilde g}\alpha)^{(s)}$$
$$\delta_g|_X(\alpha\wedge \mathrm{d}t) = (\delta_{\tilde g}|_{Y_{s,t}}\alpha)\wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk+1}s_g \star_{\tilde g} (\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)}$$

$$\begin{aligned}\delta_g|_X(\alpha\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t) &= (\delta_{\tilde g}|_{Y_{s,t}}\alpha)\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t\\ &\quad +(-1)^{nk+1}s_g(\star_{\tilde g}(\star_{\tilde g}\alpha)^{(s)})\wedge \mathrm{d}t\\ &\quad +(-1)^{nk}s_g(\star_{\tilde g}(\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)})\wedge \mathrm{d}s\end{aligned}$$

Preuve : Souvenons-nous que sur les k-formes sur X^n on a $\delta|_X = (-1)^{nk+n+1}s_g\star_g \mathrm{d}|_X\star_g$. Donc sur les k-formes sur $Y^{n-2}_{s,t}$ on a

$$\delta|_{Y_{s,t}} = (-1)^{(n-2)k+(n-2)+1}s_{\tilde g}\star_{\tilde g}\mathrm{d}|_{Y_{s,t}}\star_{\tilde g} = (-1)^{nk+n+1}s_{\tilde g}\star_{\tilde g}\mathrm{d}|_{Y_{s,t}}\star_{\tilde g}$$

D'abord la première égalité :

$$\begin{aligned}\delta_g|_X\alpha &= (-1)^{nk+n+1}s_g\star_g \mathrm{d}|_X\star_g\alpha\\ &= (-1)^{nk+n+1}s_g\star_g \mathrm{d}|_X(\star_{\tilde g}\alpha\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t)\\ &= (-1)^{nk+n+1}s_g\star_g ((\mathrm{d}|_{Y_{s,t}}\star_{\tilde g}\alpha)\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t)\\ &= (-1)^{nk+n+1}s_{\tilde g}\star_{\tilde g}\mathrm{d}|_{Y_{s,t}}\star_{\tilde g}\alpha\\ &= \delta_{\tilde g}|_{Y_{s,t}}\alpha\end{aligned}$$

Ensuite la seconde égalité :

$$\begin{aligned}&\delta_g|_X(\alpha\wedge \mathrm{d}s)\\ =\ & (-1)^{n(k+1)+n+1}s_g\star_g \mathrm{d}|_X\star_g(\alpha\wedge \mathrm{d}s)\\ =\ & (-1)^{nk+1}s_g\star_g \mathrm{d}|_X((-1)^{n-k}(\star_{\tilde g}\alpha)\wedge \mathrm{d}t)\\ =\ & (-1)^{nk+n+k+1}s_g\star_g \mathrm{d}|_X((\star_{\tilde g}\alpha)\wedge \mathrm{d}t)\\ =\ & (-1)^{nk+n+k+1}s_g\star_g ((\mathrm{d}|_{Y_{s,t}}\star_{\tilde g}\alpha)\wedge \mathrm{d}t + (-1)^{n-2-k}(\star_{\tilde g}\alpha)^{(s)}\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t)\\ =\ & (-1)^{nk+n+k+1}s_g\star_g ((\mathrm{d}|_{Y_{s,t}}\star_{\tilde g}\alpha)\wedge \mathrm{d}t) + (-1)^{nk+1}s_g\star_g ((\star_{\tilde g}\alpha)^{(s)}\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t)\\ =\ & (-1)^{nk+n+k+1}s_g(-1)^{n-(n-2-k+1)-1}(\star_{\tilde g}\mathrm{d}|_{Y_{s,t}}\star_{\tilde g}\alpha)\wedge \mathrm{d}s + (-1)^{nk+1}s_g\star_{\tilde g}(\star_{\tilde g}\alpha)^{(s)}\\ =\ & (-1)^{nk+n+1}s_g(\star_{\tilde g}\mathrm{d}|_{Y_{s,t}}\star_{\tilde g}\alpha)\wedge \mathrm{d}s + (-1)^{nk+1}s_g\star_{\tilde g}(\star_{\tilde g}\alpha)^{(s)}\\ =\ & (\delta_{\tilde g}|_{Y_{s,t}}\alpha)\wedge \mathrm{d}s + (-1)^{nk+1}s_g\star_{\tilde g}(\star_{\tilde g}\alpha)^{(s)}\end{aligned}$$

Puis la troisème égalité :

$$\begin{aligned}
& \delta_g|_X(\alpha\wedge \mathrm{d}t)\\
= \ & (-1)^{n(k+1)+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}|_X \star_g (\alpha\wedge \mathrm{d}t)\\
= \ & (-1)^{nk+1} s_g \star_g \mathrm{d}|_X((-1)^{n-k-1}(\star_{\tilde g}\alpha)\wedge \mathrm{d}s)\\
= \ & (-1)^{nk+n+k} s_g \star_g \mathrm{d}|_X((\star_{\tilde g}\alpha)\wedge \mathrm{d}s)\\
= \ & (-1)^{nk+n+k} s_g \star_g ((\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde g}\alpha)\wedge \mathrm{d}s + (-1)^{(n-2-k)+1}(\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)}\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t)\\
= \ & (-1)^{nk+n+k} s_g \star_g ((\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde g}\alpha)\wedge \mathrm{d}s) + (-1)^{nk+1} s_g \star_g ((\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)}\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t)\\
= \ & (-1)^{nk+n+k} s_g (-1)^{n-(n-2-k+1)}(\star_{\tilde g}\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde g}\alpha)\wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk+1} s_g \star_{\tilde g} (\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)}\\
= \ & (-1)^{nk+n+1} s_g (\star_{\tilde g}\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde g}\alpha)\wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk+1} s_g \star_{\tilde g} (\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)}\\
= \ & (\delta_{\tilde g}|_{Y_{s,t}}\alpha)\wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk+1} s_g \star_{\tilde g} (\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)}
\end{aligned}$$

Enfin la dernière égalité :

$$\begin{aligned}
& \delta_g|_X(\alpha\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t)\\
= \ & (-1)^{n(k+2)+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}|_X \star_g (\alpha\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t)\\
= \ & (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}|_X(\star_{\tilde g}\alpha)\\
= \ & (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g (\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde g}\alpha\\
& +(-1)^{n-2-k}(\star_{\tilde g}\alpha)^{(s)}\wedge \mathrm{d}s + (-1)^{n-2-k}(\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)}\wedge \mathrm{d}t)\\
= \ & (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g (\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde g}\alpha)\\
& +(-1)^{nk+k+1} s_g \star_g ((\star_{\tilde g}\alpha)^{(s)}\wedge \mathrm{d}s)\\
& +(-1)^{nk+k+1} s_g \star_g ((\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)}\wedge \mathrm{d}t)\\
= \ & (-1)^{nk+n+1} s_g (\star_{\tilde g}\mathrm{d}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde g}\alpha)\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t\\
& +(-1)^{nk+k+1} s_g (-1)^{n-(n-2-k)}(\star_{\tilde g}(\star_{\tilde g}\alpha)^{(s)})\wedge \mathrm{d}t\\
& +(-1)^{nk+k+1} s_g (-1)^{n-(n-2-k)-1}(\star_{\tilde g}(\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)})\wedge \mathrm{d}s\\
= \ & (\delta_{\tilde g}|_{Y_{s,t}}\alpha)\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk+1} s_g (\star_{\tilde g}(\star_{\tilde g}\alpha)^{(s)})\wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk} s_g (\star_{\tilde g}(\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)})\wedge \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

□

QUESTION : Décomposer l'équation suivante ?

$$(\mathrm{d}\alpha,\beta)_g - (\alpha,\delta\beta)_g = \int_{\partial X}\alpha\wedge\star_g\beta$$

Deux cas à considérer : $X = Y \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ où Y est à bord et le cas où $X = Y \times [0,1] \times \mathbb{R}$ où Y est sans bord.

23.7 Codifférentielle covariante :

Soit $X^n = Y^{n-2} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soient $\partial_s := (\mathrm{d}s)^g$ et $\partial_t := (\mathrm{d}t)^g$ en $\mathfrak{X}(X)$ pour $g = \tilde{g} + \mathrm{d}s \otimes \mathrm{d}s + \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t$ où $\tilde{g}(\partial_t, \cdot) = \tilde{g}(\partial_s, \cdot) = 0$ telle que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ la restriction $\tilde{g}|_{Y_{s,t}}$ soit une métrique riemannienne sur $Y_{s,t}$. Supposons $\pi_X : P_X \to X$ trivial où $P_X = P_Y \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour $\pi_Y : P_Y \to Y$ trivial. Soit $s_{\alpha,X}$ une section de P_X constante en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, i.e. $s_{\alpha,X}(y,s,t) = (s_{\alpha,Y}(y), s, t), \forall y \in Y, s, t \in \mathbb{R}$ pour une certaine section $s_{\alpha,Y}$ de P_Y. Posons $\partial_t^\sharp \in \mathfrak{X}(P_X)$ par $\partial_t^\sharp|_{s_{\alpha,X} \cdot g} := (\Phi_g)_*(s_{\alpha,X})_* \partial_t \in T_{s_{\alpha,X} \cdot g} P_X$ pour tout $g \in G$. De la même manière on construit $\partial_s^\sharp \in \mathfrak{X}(P_X)$. Soit $A \in \mathcal{A}_X$. Soient $\varphi^\sharp := A(\partial_s^\sharp)$, $\psi^\sharp := A(\partial_t^\sharp)$ et $\tilde{A} := A - \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp - \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$. On a alors une décomposition $A = \tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$ où $\varphi^\sharp, \psi^\sharp \in \Omega^0_{\mathrm{Ad,hor}}(P_X; \mathfrak{g})$ sont deux 0-formes basiques et où $\tilde{A}$ est une forme de connexion sur chaque tranche $P_{Y_{s,t}} := P_Y \times \{s\} \times \{t\} \subset P_X$, i.e. $\tilde{A}|_{P_{Y_{s,t}}} \in \mathcal{A}_{P_{Y_{s,t}}}$. On peut alors énoncer la proposition suivante :

Proposition : Soit $\alpha \in \Omega^k(X; E)$, où $E = P \times_\rho V$, ne contenant ni de ds ni de dt. Alors on a les quatre égalités suivantes :

$$\mathrm{d}_A|_X \alpha = \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}} \alpha + (-1)^k (\alpha^{(s)} + (\rho_* \varphi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}s + (-1)^k (\alpha^{(t)} + (\rho_* \psi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}_A|_X (\alpha \wedge \mathrm{d}s) = (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}} \alpha) \wedge \mathrm{d}s + (-1)^{k+1} (\alpha^{(t)} + (\rho_* \psi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}_A|_X (\alpha \wedge \mathrm{d}t) = (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}} \alpha) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^k (\alpha^{(s)} + (\rho_* \varphi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}_A|_X (\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) = (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}} \alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

Preuve : *(preuve de la première égalité)* Calculons d'abord ceci :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{d}^A|_{P_X}\alpha^\sharp \\
= \; & \mathrm{d}|_{P_X}\alpha^\sharp + (\rho_*A)(\wedge,\circ)\alpha^\sharp \\
= \; & \mathrm{d}|_{P_{Y_{s,t}}}\alpha^\sharp + \mathrm{d}s^\sharp \wedge (\alpha^\sharp)^{(s)} + \mathrm{d}t^\sharp \wedge (\alpha^\sharp)^{(t)} + (\rho_*(\tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp))(\wedge,\circ)\alpha^\sharp \\
= \; & \mathrm{d}|_{P_{Y_{s,t}}}\alpha^\sharp + (\rho_*\tilde{A})(\wedge,\circ)\alpha^\sharp + \mathrm{d}s^\sharp \wedge (\alpha^\sharp)^{(s)} + \mathrm{d}t^\sharp \wedge (\alpha^\sharp)^{(t)} \\
& +(\rho_*\varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp)(\wedge,\circ)\alpha^\sharp + (\rho_*\psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp)(\wedge,\circ)\alpha^\sharp \\
= \; & \mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{Y_{s,t}}}\alpha^\sharp + (-1)^k(\alpha^\sharp)^{(s)} \wedge \mathrm{d}s^\sharp + (-1)^k(\alpha^\sharp)^{(t)} \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
& +(-1)^k(\rho_*\varphi^\sharp) \circ \alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp + (-1)^k(\rho_*\psi^\sharp) \circ \alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
= \; & \mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{Y_{s,t}}}\alpha^\sharp + (-1)^k((\alpha^\sharp)^{(s)} + (\rho_*\varphi^\sharp) \circ \alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp \\
& +(-1)^k((\alpha^\sharp)^{(t)} + (\rho_*\psi^\sharp) \circ \alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}t^\sharp
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{d}_A|_X\alpha \\
= \; & \left(\mathrm{d}^A|_{P_X}\alpha^\sharp\right)_\sharp \\
= \; & \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}}\alpha + (-1)^k(\alpha^{(s)} + (\rho_*\varphi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}s + (-1)^k(\alpha^{(t)} + (\rho_*\psi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

(preuve de la seconde égalité) Calculons d'abord ceci :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{d}^A|_{P_X}(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp) \\
= \; & \mathrm{d}|_{P_X}(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp) + (\rho_*A)(\wedge,\circ)(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp) \\
= \; & \mathrm{d}|_{P_{Y_{s,t}}}(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp) + \mathrm{d}s^\sharp \wedge (\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp)^{(s)} + \mathrm{d}t^\sharp \wedge (\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp)^{(t)} \\
& +(\rho_*(\tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp))(\wedge,\circ)(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp) \\
= \; & (\mathrm{d}|_{P_{Y_{s,t}}}\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp + \mathrm{d}t^\sharp \wedge (\alpha^\sharp)^{(t)} \wedge \mathrm{d}s^\sharp \\
& +((\rho_*\tilde{A})(\wedge,\circ)\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp + (\rho_*\psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp)(\wedge,\circ)(\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp \\
= \; & (\mathrm{d}|_{P_{Y_{s,t}}}\alpha^\sharp + (\rho_*\tilde{A})(\wedge,\circ)\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp + (-1)^{k+1}(\alpha^\sharp)^{(t)} \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
& +(-1)^{k+1}((\rho_*\psi^\sharp) \circ \alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
= \; & (\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{Y_{s,t}}}\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp + (-1)^{k+1}((\alpha^\sharp)^{(t)} + (\rho_*\psi^\sharp) \circ \alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_A|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}s) \; = \; & \left(\mathrm{d}^A|_{P_X}(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp)\right)_\sharp \\
= \; & (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s + (-1)^{k+1}(\alpha^{(t)} + (\rho_*\psi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

(preuve de la troisième égalité) Calculons d'abord ceci :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{d}^A|_{P_X}(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp) \\
= \; & \mathrm{d}|_{P_X}(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp) + (\rho_* A)(\wedge,\circ)(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp) \\
= \; & \mathrm{d}|_{P_{Y_{s,t}}}(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp) + \mathrm{d}s^\sharp \wedge (\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp)^{(s)} + \mathrm{d}t^\sharp \wedge (\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp)^{(t)} \\
& +(\rho_*(\tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp))(\wedge,\circ)(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp) \\
= \; & \mathrm{d}|_{P_{Y_{s,t}}}(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp) + \mathrm{d}s^\sharp \wedge (\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp)^{(s)} \\
& +(\rho_*(\tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp))(\wedge,\circ)(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp) \\
= \; & (\mathrm{d}|_{P_{Y_{s,t}}}\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}t^\sharp + \mathrm{d}s^\sharp \wedge (\alpha^\sharp)^{(s)} \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
& +((\rho_*\tilde{A})(\wedge,\circ)\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}t^\sharp + (\rho_*\varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp)(\wedge,\circ)(\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
= \; & (\mathrm{d}|_{P_{Y_{s,t}}}\alpha^\sharp + (\rho_*\tilde{A})(\wedge,\circ)\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}t^\sharp + (-1)^k(\alpha^\sharp)^{(s)} \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
& +(-1)^k((\rho_*\varphi^\sharp) \circ \alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
= \; & (\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{Y_{s,t}}}\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}t^\sharp + (-1)^k((\alpha^\sharp)^{(s)} + (\rho_*\varphi^\sharp) \circ \alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_A|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}t) &= \Big(\mathrm{d}^A|_{P_X}(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp)\Big)_\sharp \\
&= (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^k(\alpha^{(s)} + (\rho_*\varphi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

(preuve de la quatrième égalité) Calculons d'abord ceci :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{d}^A|_{P_X}(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp) \\
= \; & \mathrm{d}|_{P_X}(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp) + (\rho_* A)(\wedge,\circ)(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp) \\
= \; & \mathrm{d}|_{P_{Y_{s,t}}}(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp) + \mathrm{d}s^\sharp \wedge (\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp)^{(s)} + \mathrm{d}t^\sharp \wedge (\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp)^{(t)} \\
& +(\rho_*(\tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp))(\wedge,\circ)(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp) \\
= \; & (\mathrm{d}|_{P_{Y_{s,t}}}\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp + ((\rho_*\tilde{A})(\wedge,\circ)\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
= \; & (\mathrm{d}|_{P_{Y_{s,t}}}\alpha^\sharp + (\rho_*\tilde{A})(\wedge,\circ)\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
= \; & (\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{Y_{s,t}}}\alpha^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_A|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) &= \Big(\mathrm{d}^A|_{P_X}(\alpha^\sharp \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp)\Big)_\sharp \\
&= (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

Proposition : Soit $\alpha \in \Omega^k(X;E)$, où $E = P \times_\rho V$, ne contenant ni de ds ni de dt. Alors :

$$\delta_{A,g}|_X\alpha = \delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_{s,t}}\alpha$$

$$\delta_{A,g}|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}s) = (\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s + (-1)^{nk+1}s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(s)} + (-1)^{k+1}(\rho_*\varphi) \circ \alpha$$

$$\delta_{A,g}|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}t) = (\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk+1}s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (-1)^{k+1}(\rho_*\psi) \circ \alpha$$

$$\begin{aligned}\delta_{A,g}|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) &= (\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\ &\quad +((-1)^{nk+1}s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(s)} + (-1)^{k+1}(\rho_*\varphi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}t \\ &\quad +((-1)^{nk}s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (-1)^{k}(\rho_*\psi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}s\end{aligned}$$

Preuve : Souvenons-nous que :

$$\star_g\alpha = (\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \star_g (\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) = \star_{\tilde{g}}\alpha$$

$$\star_g(\alpha \wedge \mathrm{d}s) = (-1)^{n-k}(\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \star_g (\alpha \wedge \mathrm{d}t) = (-1)^{n-k-1}(\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s$$

$$\delta_{A,g}|_X := (-1)^{nk+n+1}s_g \star_g \mathrm{d}_A|_X\star_g$$

$$\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_{s,t}} := (-1)^{(n-2)k+(n-2)+1}s_{\tilde{g}} \star_{\tilde{g}} \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}}\star_{\tilde{g}} = (-1)^{nk+n+1}s_{\tilde{g}} \star_{\tilde{g}} \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}}\star_{\tilde{g}}$$

$$\star_g^2 = (-1)^{nk+k}s_g \quad \text{et} \quad \star_{\tilde{g}}^2 = (-1)^{(n-2)k+k}s_{\tilde{g}} = (-1)^{nk+k}s_g$$

(preuve de la première égalité) Calculons :

$$\begin{aligned}\delta_{A,g}|_X\alpha &= (-1)^{nk+n+1}s_g \star_g \mathrm{d}_A|_X \star_g \alpha \\ &= (-1)^{nk+n+1}s_g \star_g \mathrm{d}_A|_X \big((\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t\big) \\ &= (-1)^{nk+n+1}s_g \star_{\tilde{g}} \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde{g}} \alpha \\ &= (-1)^{nk+n+1}(-1)^{nk+n+1}\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_{s,t}}\alpha \\ &= \delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_{s,t}}\alpha\end{aligned}$$

(preuve de la seconde égalité) Calculons :

$$
\begin{aligned}
& \delta_{A,g}|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}s) \\
= \;& (-1)^{n(k+1)+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A|_X \star_g (\alpha \wedge \mathrm{d}s) \\
= \;& (-1)^{nk+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A|_X \left((-1)^{n-k}(\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
= \;& (-1)^{nk+n+k+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A|_X \left((\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
= \;& (-1)^{nk+n+k+1} s_g \star_g \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde{g}} \alpha) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
& + (-1)^{nk+n+k+1} s_g \star_g \left((-1)^{n-2-k}((\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(s)} + (\rho_*\varphi) \circ (\star_{\tilde{g}}\alpha)) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t\right) \\
= \;& (-1)^{nk+n+k+1} s_g \left((-1)^{n-(n-2-k+1)-1}(\star_{\tilde{g}}\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde{g}} \alpha) \wedge \mathrm{d}s\right) \\
& + (-1)^{nk+1} s_g \star_g \left(((\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(s)} + (\rho_*\varphi) \circ (\star_{\tilde{g}}\alpha)) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t\right) \\
= \;& (-1)^{nk+n+1} s_g \left((\star_{\tilde{g}}\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde{g}} \alpha) \wedge \mathrm{d}s\right) \\
& + (-1)^{nk+1} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(s)} + (-1)^{nk+1} s_g (\rho_*\varphi) \circ (\star_{\tilde{g}}^2 \alpha) \\
= \;& (-1)^{nk+n+1} s_g \left((-1)^{nk+n+1} s_{\tilde{g}} (\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s\right) \\
& + (-1)^{nk+1} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(s)} + (-1)^{nk+1} s_g (\rho_*\varphi) \circ ((-1)^{(n-2)k+k} s_{\tilde{g}}\alpha) \\
= \;& (\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s + (-1)^{nk+1} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(s)} + (-1)^{k+1} (\rho_*\varphi) \circ \alpha
\end{aligned}
$$

(preuve de la troisième égalité) Calculons :

$$
\begin{aligned}
& \delta_{A,g}|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}t) \\
= \;& (-1)^{n(k+1)+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A|_X \star_g (\alpha \wedge \mathrm{d}t) \\
= \;& (-1)^{nk+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A|_X \left((-1)^{n-k-1}(\star_{\tilde g}\alpha) \wedge \mathrm{d}s\right) \\
= \;& (-1)^{nk+n+k} s_g \star_g \mathrm{d}_A|_X \left((\star_{\tilde g}\alpha) \wedge \mathrm{d}s\right) \\
= \;& (-1)^{nk+n+k} s_g \star_g \left((\mathrm{d}_{\tilde A}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde g} \alpha) \wedge \mathrm{d}s\right) \\
& +(-1)^{nk+n+k} s_g \star_g \left((-1)^{(n-2-k)+1}((\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)} + (\rho_*\psi) \circ (\star_{\tilde g}\alpha)) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t\right) \\
= \;& (-1)^{nk+n+k} s_g \left((-1)^{n-(n-2-k+1)}(\star_{\tilde g}\mathrm{d}_{\tilde A}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde g} \alpha) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
& +(-1)^{nk+1} s_g \star_g \left(((\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)} + (\rho_*\psi) \circ (\star_{\tilde g}\alpha)) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t\right) \\
= \;& (-1)^{nk+n+1} s_g \left((\star_{\tilde g}\mathrm{d}_{\tilde A}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde g} \alpha) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
& +(-1)^{nk+1} s_g \star_{\tilde g} (\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)} + (-1)^{nk+1} s_g (\rho_*\psi) \circ (\star_{\tilde g}^2\alpha) \\
= \;& (-1)^{nk+n+1} s_g \left((-1)^{nk+n+1} s_{\tilde g}(\delta_{\tilde A,\tilde g}|_{Y_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
& +(-1)^{nk+1} s_g \star_{\tilde g} (\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)} + (-1)^{nk+1} s_g (\rho_*\psi) \circ ((-1)^{(n-2)k+k} s_{\tilde g}\alpha) \\
= \;& (\delta_{\tilde A,\tilde g}|_{Y_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk+1} s_g \star_{\tilde g} (\star_{\tilde g}\alpha)^{(t)} + (-1)^{k+1}(\rho_*\psi) \circ \alpha
\end{aligned}
$$

(preuve de la quatrième égalité) Calculons :

$$
\begin{aligned}
& \delta_{A,g}|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) \\
= \;& (-1)^{n(k+2)+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A|_X \star_g (\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) \\
= \;& (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A|_X(\star_{\tilde{g}}\alpha) \\
= \;& (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde{g}} \alpha) \\
& +(-1)^{nk+n+1} s_g \star_g ((-1)^{n-2-k}((\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(s)} + (\rho_*\varphi) \circ (\star_{\tilde{g}}\alpha)) \wedge \mathrm{d}s) \\
& +(-1)^{nk+n+1} s_g \star_g ((-1)^{n-2-k}((\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (\rho_*\psi) \circ (\star_{\tilde{g}}\alpha)) \wedge \mathrm{d}t) \\
= \;& (-1)^{nk+n+1} s_g (\star_{\tilde{g}} \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_{s,t}} \star_{\tilde{g}} \alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
& +(-1)^{nk+k+1} s_g \star_g (((\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(s)} + (\rho_*\varphi) \circ (\star_{\tilde{g}}\alpha)) \wedge \mathrm{d}s) \\
& +(-1)^{nk+k+1} s_g \star_g (((\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (\rho_*\psi) \circ (\star_{\tilde{g}}\alpha)) \wedge \mathrm{d}t) \\
= \;& (\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
& +(-1)^{nk+k+1} s_g ((-1)^{n-(n-2-k)} \star_{\tilde{g}} ((\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(s)} + (\rho_*\varphi) \circ (\star_{\tilde{g}}\alpha)) \wedge \mathrm{d}t) \\
& +(-1)^{nk+k+1} s_g ((-1)^{n-(n-2-k)-1} \star_{\tilde{g}} ((\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (\rho_*\psi) \circ (\star_{\tilde{g}}\alpha)) \wedge \mathrm{d}s) \\
= \;& (\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
& +((-1)^{nk+1} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(s)} + (-1)^{nk+1} s_g (\rho_*\varphi) \circ (\star_{\tilde{g}}^2\alpha)) \wedge \mathrm{d}t \\
& +((-1)^{nk} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (-1)^{nk} s_g (\rho_*\psi) \circ (\star_{\tilde{g}}^2\alpha)) \wedge \mathrm{d}s \\
= \;& (\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
& +((-1)^{nk+1} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(s)} + (-1)^{nk+1} s_g (\rho_*\varphi) \circ ((-1)^{(n-2)k+k} s_{\tilde{g}}\alpha)) \wedge \mathrm{d}t \\
& +((-1)^{nk} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (-1)^{nk} s_g (\rho_*\psi) \circ ((-1)^{(n-2)k+k} s_{\tilde{g}}\alpha)) \wedge \mathrm{d}s \\
= \;& (\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
& +((-1)^{nk+1} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(s)} + (-1)^{k+1} (\rho_*\varphi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}t \\
& +((-1)^{nk} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (-1)^{k} (\rho_*\psi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

□

23.8 (Anti-)auto-dualité :

Proposition : Soit n tel que $(-1)^{n(n+1)/2}s_g = 1$ (i.e. telle que $\star_{\tilde{g}}^2 = 1$ sur les $(k = n/2)$-formes). Soit

$$\alpha = \beta + \gamma \wedge \mathrm{d}s + \mu \wedge \mathrm{d}t + \nu \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \in \Omega^{n/2}(X)$$

où $\beta \in \Omega^{n/2}(X)$, $\gamma, \mu \in \Omega^{n/2-1}(X)$ et $\nu \in \Omega^{n/2-2}(X)$ ne contiennent ni de ds ni de dt. Alors α est (anti-)auto-duale, i.e. $\star\alpha = \pm \star \alpha$ si et seulement si les deux équations suivantes sont satisfaites :

$$\star_{\tilde{g}}\beta = \pm\nu \quad \text{et} \quad \star_{\tilde{g}}\, \gamma = \pm(-1)^{k+1}\mu$$

Preuve : Considérons la suite de « si et seulement si » suivantes :

$$\star_g\alpha = \pm\alpha$$

$$\iff \star_g(\beta + \gamma \wedge \mathrm{d}s + \mu \wedge \mathrm{d}t + \nu \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) = \pm(\beta + \gamma \wedge \mathrm{d}s + \mu \wedge \mathrm{d}t + \nu \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t)$$

$$\iff \star_g\beta + \star_g(\gamma\wedge\mathrm{d}s) + \star_g(\mu\wedge\mathrm{d}t) + \star_g(\nu\wedge\mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}t) = \pm\beta\pm\gamma\wedge\mathrm{d}s\pm\mu\wedge\mathrm{d}t\pm\nu\wedge\mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}t$$

$$\iff \begin{array}{l}(\star_{\tilde{g}}\beta) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{n-(k-1)}(\star_{\tilde{g}}\gamma) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{n-(k-1)-1}(\star_{\tilde{g}}\mu) \wedge \mathrm{d}s + \star_{\tilde{g}}\nu \\ = \pm\beta \pm \gamma \wedge \mathrm{d}s \pm \mu \wedge \mathrm{d}t \pm \nu \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t\end{array}$$

$$\iff \begin{array}{l}(\star_{\tilde{g}}\beta) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{k+1}(\star_{\tilde{g}}\gamma) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{k}(\star_{\tilde{g}}\mu) \wedge \mathrm{d}s + \star_{\tilde{g}}\nu \\ = \pm\beta \pm \gamma \wedge \mathrm{d}s \pm \mu \wedge \mathrm{d}t \pm \nu \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t\end{array}$$

Ce qui est équivalent aux quatre égalités suivantes :

$$\star_{\tilde{g}}\beta = \pm\nu$$

$$(-1)^{k+1} \star_{\tilde{g}} \gamma = \pm\mu$$

$$(-1)^{k} \star_{\tilde{g}} \mu = \pm\gamma$$

$$\star_{\tilde{g}}\nu = \pm\beta$$

Ce qui est équivalent aux quatre égalités suivantes :

$$\star_{\tilde{g}}\beta = \pm\nu$$

$$\star_{\tilde{g}}\gamma = \pm(-1)^{k+1}\mu$$
$$\star_{\tilde{g}}\mu = \pm(-1)^{k}\gamma$$
$$\star_{\tilde{g}}\nu = \pm\beta$$

Ce qui est équivalent aux deux égalités suivantes :

$$\star_{\tilde{g}}\beta = \pm\nu \quad \text{et} \quad \star_{\tilde{g}}\,\gamma = \pm(-1)^{k+1}\mu$$

puisque $\star_g^2 = (-1)^{kn+k}s_g$, $\star_{\tilde{g}}^2 = (-1)^{k(n-2)+k}s_g = (-1)^{kn+k}s_g$ et $(-1)^{n(n+1)/2}s_g = 1$. □

Bref, les équations auto-duales et anti-auto-duales vérifient :

$$\star\alpha = \star\alpha \iff \star_{\tilde{g}}\beta = \nu \quad \text{et} \quad \star_{\tilde{g}}\,\gamma = (-1)^{k+1}\mu$$

$$\star\alpha = -\star\alpha \iff \star_{\tilde{g}}\beta = -\nu \quad \text{et} \quad \star_{\tilde{g}}\,\gamma = (-1)^{k}\mu$$

Troisième partie

Fonctionnelles et principe de moindre action (ébauche)

24 Théorie de Morse

24.1 Introduction :

Le but de cette section est de bien poser la théorie de Morse en dimension finie puis de la généraliser à la dimension infinie sur un espace affine. Cette section est une ébauche plus ou moins utile.

24.2 Hessien covariant :

Soit (M, g, f) une variété lisse riemannienne compacte de dimension n munie d'une fonction $f \in C^2(M;\mathbb{R})$. Par simplicité supposons $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$. La métrique g induit une connexion de Levi-Civita.

Remarque : Il faut distinguer la dérivée covariante d'une fonction :

$$\nabla f = \mathrm{d}f \in \Omega^1(M) \quad \text{où} \quad \nabla_\xi f = (\mathrm{d}f)(\xi) \quad \text{pour} \quad \xi \in TM$$

du champ vectoriel gradient (obtenu par g-musicalité dièse) :

$$\nabla f := (\mathrm{d}f)^g \in \mathfrak{X}(M)$$

Puisque le gradient $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ est utilisé en théorie de Morse, je n'utiliserai que ∇f pour dénoter le champ vectoriel gradient de f et que $\mathrm{d}f$ pour dénoter la dérivée covariante (i.e. la différentielle) de f.

Remarque : On peut considérer la dérivée covariante ∇ de $\mathrm{d}f \in \Omega^1(M)$ et de $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$:

$$H_f := \nabla(\mathrm{d}f) \in \Gamma^\infty(\odot^2 T^*M)$$
$$\tilde{H}_f := \nabla(\nabla f) \in \Gamma^\infty(T^*M \otimes TM)$$

Proposition : En coordonnées locales $(x^k)_k$ sur $U \subset M$, les tenseurs H_f et $\tilde{H}_f$ s'écrivent :

$$H_f|_U = \left(\partial_i \partial_j f - \Gamma^k_{i,j}(\partial_k f)\right) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

$$\tilde{H}_f|_U = \Big((\partial_i g^{k,j})(\partial_k f) + g^{k,j}(\partial_i\partial_k f) + (g^{l,k}\partial_l f)\Gamma^j_{i,k}\Big)\,\mathrm{d}x^i \otimes \partial_j$$

Preuve : Il se souvenir qu'en coordonnées locales, on a :

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{i,j}\partial_k \quad \text{et} \quad \nabla_{\partial_i}(\mathrm{d}x^j) = -\Gamma^j_{i,k}\mathrm{d}x^k$$

C'est-à-dire :

$$\nabla\partial_j = \Gamma^k_{i,j}\mathrm{d}x^i \otimes \partial_k \quad \text{et} \quad \nabla(\mathrm{d}x^i) = -\Gamma^i_{j,k}\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k$$

On calcule alors la première égalité :

$$\begin{aligned}
H_f|_U &= (\nabla(\mathrm{d}f))|_U \\
&= \nabla\big((\partial_i f)\mathrm{d}x^i\big) \\
&= (\partial_j\partial_i f)\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^i + (\partial_i f)\nabla(\mathrm{d}x^i) \\
&= (\partial_j\partial_k f)\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k - \Gamma^i_{j,k}(\partial_i f)\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \\
&= \Big(\partial_j\partial_k f - \Gamma^i_{j,k}(\partial_i f)\Big)\,\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \\
&= \Big(\partial_i\partial_j f - \Gamma^k_{i,j}(\partial_k f)\Big)\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j
\end{aligned}$$

On calcule ensuite la seconde :

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_f|_U &= (\nabla(\nabla f))|_U \\
&= (\nabla((\mathrm{d}f)^g))|_U \\
&= \nabla(((\partial_i f)\mathrm{d}x^i)^g) \\
&= \nabla(g^{i,j}(\partial_i f)\partial_j) \\
&= \partial_k(g^{i,j}(\partial_i f))\mathrm{d}x^k \otimes \partial_j + (g^{i,j}\partial_i f)\nabla(\partial_j) \\
&= \big((\partial_k g^{i,j})(\partial_i f) + g^{i,j}(\partial_k\partial_i f)\big)\,\mathrm{d}x^k \otimes \partial_j + (g^{i,j}\partial_i f)\Gamma^k_{l,j}\mathrm{d}x^l \otimes \partial_k \\
&= \Big((\partial_i g^{k,j})(\partial_k f) + g^{k,j}(\partial_i\partial_k f)\Big)\,\mathrm{d}x^i \otimes \partial_j + (g^{l,k}\partial_l f)\Gamma^j_{i,k}\mathrm{d}x^i \otimes \partial_j \\
&= \Big((\partial_i g^{k,j})(\partial_k f) + g^{k,j}(\partial_i\partial_k f) + (g^{l,k}\partial_l f)\Gamma^j_{i,k}\Big)\,\mathrm{d}x^i \otimes \partial_j
\end{aligned}$$

Proposition : Considérons $\tilde{g} = g^{ij}\partial_i \otimes \partial_j$. Alors le laplacien de Hodge $\Delta f = \delta\mathrm{d}f$ est égal à l'évaluation de $-H_f$ sur $\tilde{g}$:

$$\Delta f = -H_f(\tilde{g})$$

Preuve : J'ai montré plus haut que le laplacien de Hodge s'écrit localement comme :

$$\Delta f|_U = -g^{ij}\left(\partial_i\partial_j f - \Gamma^k_{ij}\partial_k f\right)$$

De même, je viens de montrer que le hessien covariant H_f de f s'écrit localement comme :

$$H_f|_U = \left(\partial_i\partial_j f - \Gamma^k_{i,j}\partial_k f\right) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

□

Remarque : On peut donc aussi dire que Δf est une sorte de g-trace de $-H_f$.

Proposition : $H_f(\,\cdot\,,\,\cdot\,) = g(\tilde{H}_f(\,\cdot\,),\,\cdot\,) = g(\,\cdot\,,\tilde{H}_f(\,\cdot\,))$. En particulier, H_f est symétrique bilinéaire et $\tilde{H}_f$ est g-auto-adjoint.

Preuve : La décomposition de H_f en coordonnées montre qu'il est symétrique. Il suit que si $\tilde{H}_f$ vérifie $H_f(\,\cdot\,,\,\cdot\,) = g(\tilde{H}_f(\,\cdot\,),\,\cdot\,)$, alors $\tilde{H}_f$ est g-auto-adjoint. Montrons que $H_f(\,\cdot\,,\,\cdot\,) = g(\tilde{H}_f(\,\cdot\,),\,\cdot\,)$ sur U en coordonnées :

$$\begin{aligned}
g(\tilde{H}_f(\,\cdot\,),\,\cdot\,)|_U &= \left((\partial_i g^{k,j})(\partial_k f) + g^{k,j}(\partial_i\partial_k f) + (g^{l,k}\partial_l f)\Gamma^j_{i,k}\right) \mathrm{d}x^i \otimes g(\partial_j,\,\cdot\,) \\
&= \left((\partial_i g^{k,m})(\partial_k f) + g^{k,m}(\partial_i\partial_k f) + (g^{l,k}\partial_l f)\Gamma^m_{i,k}\right) \mathrm{d}x^i \otimes g(\partial_m,\,\cdot\,) \\
&= \left((\partial_i g^{k,m})(\partial_k f) + g^{k,m}(\partial_i\partial_k f) + (g^{l,k}\partial_l f)\Gamma^m_{i,k}\right) \mathrm{d}x^i \otimes g_{m,j}\mathrm{d}x^j \\
&= \left(g_{m,j}(\partial_i g^{k,m})(\partial_k f) + g_{m,j}g^{k,m}(\partial_i\partial_k f) + (g^{l,k}\partial_l f)g_{m,j}\Gamma^m_{i,k}\right) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \\
&= \left(\partial_i\partial_j f + g_{m,j}g^{k,l}\Gamma^m_{i,l}(\partial_k f) - g^{k,m}(\partial_i g_{m,j})(\partial_k f)\right) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \\
&= \left(\partial_i\partial_j f + \left(g_{m,j}g^{k,l}\Gamma^m_{i,l} - g^{k,m}(\partial_i g_{m,j})\right)(\partial_k f)\right) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j
\end{aligned}$$

Pour montrer que $g(\tilde{H}_f(\,\cdot\,),\,\cdot\,) = H_f(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, il suffit alors de montrer que :

$$-\Gamma^k_{i,j} = g_{m,j}g^{k,l}\Gamma^m_{i,l} - g^{k,m}(\partial_i g_{m,j})$$

i.e. que :

$$g_{m,j}g^{k,l}\Gamma^m_{i,l} + \Gamma^k_{i,j} = g^{k,m}(\partial_i g_{m,j})$$

On sait que

$$\Gamma^i_{j,k} = \frac{1}{2}g^{i,m}(\partial_j g_{k,m} + \partial_k g_{j,m} - \partial_m g_{j,k})$$

L'égalité à démontrer est démontrée dans mes feuilles du 2017-02-28. □

Remarque : Le tenseur H_f est parfois dénoté $\mathrm{Hess}(f)$.

Remarque : Le tenseur H_f est dit *tenseur hessien* et le tenseur $\tilde{H}_f$ est dit *opérateur hessien*.

Remarque : Puisque $\tilde{H}_f$ est g-auto-adjoint, ses valeurs propres sont réelles. Il est donc légitime de parler du *signe* des valeurs propres de $\tilde{H}_f$ (ce qui ne serait pas le cas si on avait des valeurs propres imaginaires).

24.3 Fonction de Morse :

Soit (M, g, f) une variété lisse riemannienne compacte de dimension n munie d'une fonction $f \in C^2(M;\mathbb{R})$. Par simplicité supposons $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$.

Définition : Un *point critique* de f est un point $x \in M$ tel que $(\mathrm{d}f)|_x = 0$. On dénote l'ensemble des points critiques de f par

$$\mathrm{crit}(f) := \{x \in M | (\mathrm{d}f)|_x = 0\} \subset M$$

Remarque : $\mathrm{crit}(f)$ est un sous-ensemble de M qui n'est pas forcément discret. Il pourrait être composé de sous-variétés critiques, etc.

Proposition : Supposons que $\mathrm{crit}(f)$ est une sous-variété lisse de M. Alors pour tout $x \in \mathrm{crit}(f)$ on a

$$T_x\mathrm{crit}(f) = \ker(\tilde{H}_f|_x)$$

Preuve : Soit $x \in \mathrm{crit}(f)$. Considérons un chemin x_t en $\mathrm{crit}(f)$ tel que $x_0 = x$ et $\tau := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} x_t \in T_x\mathrm{crit}(f)$. Puisque $x_t \in \mathrm{crit}(f)$, alors $(\mathrm{d}f)|_{x_t} = 0$. Donc $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\mathrm{d}f)|_{x_t} = 0$. Donc $(\nabla_\tau(\mathrm{d}f))|_x = 0$. Donc $H_f|_x(\tau, \cdot) = 0$. Donc $\tau \in \ker \tilde{H}_f|_x$. Puisque tout vecteur tangent $\tau \in T_x\mathrm{crit}(f)$ était du type $\tau = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} x_t$ où $x_0 = x$, il suit que $T_x\mathrm{crit}(f) = \ker(\tilde{H}_f|_x)$. □

Définition : Un point critique $x \in \mathrm{crit}(f)$ est dit *non dégénéré* si la forme bilinéaire symétrique $H_f|_x$ est non dégénérée, i.e. si :

$$H_f(v, \cdot) \neq 0, \forall v \in (T_x M) \backslash \{0\}$$

Remarque : Cette dernière condition est équivalente à dire que $\tilde{H}_f|_x \in \mathrm{End}(T_x M)$ est non singulière, i.e. :

$$\ker(\tilde{H}_f|_x) = \{0\} \subset T_x M, \forall x \in \mathrm{crit}(f)$$

Dans ce cas, $\tilde{H}_f|_x$ est inversible et les valeurs propres de $\tilde{H}_f$ sont toutes non nulles. En particulier, par la dernière proposition, les points critiques non dégénérés sont isolés.

Définition : La fonction f est dite *fonction de Morse* si ses points critiques sont non dégénérés.

Remarque : Les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés.

Remarque : (*Lemme de Morse*) Autour de tout point critique $x_0 \in \mathrm{crit}(f)$ d'une fonction de Morse f il existe des coordonnées locales $(x^k)_{k=1,\dots,n}$, sur un voisinage $U \ni x_0$, centrées en x_0, i.e. $x^k(x_0) = 0, \forall k = 1, \dots, n$, telles que

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} a_k (x^k(x))^2, \forall x \in U$$

où $a_k \in \{-1, 1\},\ \forall k = 1, \dots, n$. Dans ces coordonnées, la forme quadratique

$$Q(v) := H_f|_{x_0}(v, v), \forall v \in T_{x_0} M$$

vaut :

$$Q(v) = \sum_{k=1}^{n} a_k (v^k)^2$$

pour $v = v^k \partial_k$. La relation entre Q et f est une simple série de Taylor. Le *lemme de Morse* est donc une généralisation du *théorème de classification des formes quadratiques* (ici non dégénérées).

24.4 Indices des points critiques :

Considérons une fonction de Morse f sur (M, g).

Définition : Soit $x \in \operatorname{crit}(f)$ un point critique d'une fonction de Morse $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$. L'*indice de Morse (absolu)* $\nu(x)$ de x peut être défini de manière équivalente comme :

- l'*indice d'inertie* de la forme quadratique obtenue Q décrite plus haut, i.e. est égal au nombres de a_k négatifs.
- le nombre de valeurs propres négatives comptées avec multiplicité de l'opérateur hessien en ce x, i.e. de $\tilde{H}_f|_x \in \operatorname{End}(T_x M)$.
- la dimension du sous-espace propre négatif de $\tilde{H}_f|_x$.
- la dimension du sous-espace vectoriel maximal sur lequel $H_f|_x$ est définie négative (i.e. strictement négative car f est Morse).

Remarque : $\nu(x)$ est parfois dénoté $\nu^-(x)$ ou encore $\operatorname{ind}(x)$.

Remarque : On peut aussi considérer $\mu(x)$ qui est le nombre de valeurs propres positives (comptées avec multiplicité) de $\tilde{H}_f|_x$. Puisque f est Morse,

$$n = \mu(x) + \nu(x)$$

car aucune valeur propre de $\tilde{H}_f|_x$ est nulle.

24.5 Champ vectoriel gradient, flot gradient et feuilletage :

Définition : Le champ vectoriel gradient de f relativement à la métrique g est par définition la musicalité g-dièse de $\mathrm{d}f$, i.e. :

$$\nabla f := (\mathrm{d}f)^g \in \mathfrak{X}(M)$$

Par hypothèse, M est compact. Donc $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ est complet. Il admet donc un *flot gradient ascendant* ϕ_+^t, i.e. un groupe de difféomorphismes à 1-paramètres de M. De la même manière, $-\nabla f$ admet un *flot gradient descendant* ϕ_-^t qui vérifie $\phi_-^t = \phi_+^{-t}$.

En voyant f comme fonction hauteur sur M, pour $t > 0$, le flot de ϕ_+^t fait « monter » les points non critiques de M alors que ϕ_-^t les fait « descendre ».

Les points fixes de $\phi_\pm^t$ (pour $t \neq 0$) sont les points critiques de f. Les orbites de $\phi_\pm^t$ définissent donc un feuilletage de $M \backslash \mathrm{crit}(f)$ dont les feuilles (i.e. les orbites de $\phi_\pm^t$) sont des *courbes gradient non paramétrées*.

24.6 Courbes gradient ascendantes et descendantes :

Définition : Une courbe gradient (paramétrée) ascendante de f est une application différentiable $\gamma : \mathbb{R} \to M$ telle que

$$\dot{\gamma}(t) = (\nabla f)(\gamma(t)), \forall t \in \mathbb{R}$$

De même, une courbe gradient (paramétrée) descendante de f est une application différentiable $\gamma : \mathbb{R} \to M$ telle que

$$\dot{\gamma}(t) = -(\nabla f)(\gamma(t)), \forall t \in \mathbb{R}$$

Remarque : L'image $\mathrm{im}(\gamma) = \gamma(\mathbb{R}) \subset M$ d'une courbe gradient (ascendante ou descendante) paramétrée γ est une courbe gradient non paramétrée (i.e. une feuille du feuilletage induit par les flots gradients $\phi_\pm^t$).

Remarque : Puisque M est compacte, ∇f est complet. Ainsi, les limites

$$\lim_{t \to \pm\infty} \gamma(t)$$

des courbes gradients paramétrées γ existent. Ces limites sont des points critiques de f. Ainsi, les courbes gradient relient asymptotiquement des points critiques de f.

24.7 Sous-variétés ascendantes et descendantes :

Définition : Soit $x \in \mathrm{crit}(f)$ d'une fonction de Morse f sur (M, g) compacte. Sa *sous-variété stable* est par définition

$$W^s(x, \pm\nabla f) := \{y \in M | \lim_{t \to +\infty} \phi_\pm^t(y) = x\}$$

Sa *sous-variété instable* est par définition

$$W^u(x, \pm\nabla f) := \{y \in M | \lim_{t\to-\infty} \phi^t_\pm(y) = x\}$$

Remarque : Puisque $\phi^t_\pm = \phi^{-t}_\mp$, on remarque que

$$W^s(x, \pm\nabla f) = W^u(x, \mp\nabla f)$$

Théorème : Soit $x \in \mathrm{crit}(f)$. Alors $W^s(x, \pm\nabla f)$ et $W^u(x, \pm\nabla f)$ sont des sous-variété plongée (probablement à bord) de M. De plus :

1. $W^s(x, -\nabla f) = W^u(x, \nabla f)$ est de dimension $\mu(x) = n - \nu(x)$,
2. $W^s(x, \nabla f) = W^u(x, -\nabla f)$ est de dimension $\nu(x) = n - \mu(x)$,
3. $T_xW^s(x, -\nabla f) = T_xW^u(x, \nabla f) \subset T_xM$ est le sous-espace vectoriel maximal de T_xM tel que $H_f|_x$ y est définie positive,
4. $T_xW^s(x, \nabla f) = T_xW^u(x, -\nabla f) \subset T_xM$ est le sous-espace vectoriel maximal de T_xM tel que $H_f|_x$ y est définie négative.

Preuve : TO DO ! ! ! (voir Audin et Damian, ou Palais, ou Smale, etc.) □

Proposition : $W^s(x, -\nabla f) = W^u(x, \nabla f)$ une boule ouverte de dimension $\mu(x) = n - \nu(x)$ et $W^u(x, -\nabla f) = W^s(x, \nabla f)$ est une boule ouverte de dimension $\nu(x) = n - \mu(x)$.

Preuve : TO DO ! ! ! □

Définition : La paire (f, g) est dite *Morse-Smale* si f est Morse et si de plus les sous-variétés instables et stables de toute paire de point critiques de f s'intersectent transversalement, i.e. si :

$$W^u(x_1, \pm\nabla f) \pitchfork W^s(x_2, \pm\nabla f), \forall x_1, x_2 \in \mathrm{crit}(f)$$

Remarque : La condition *Morse-Smale* est aussi dite *Morse-Palais*, *Palais-Smale* et *Morse-Palais-Smale*.

Remarque : Il existe un théorème qui dit qu'il existe des métriques g telles que (f, g) est Morse-Smale. En fait même qu'il existe beaucoup de telles métriques, c'est même dense dans l'espace des métriques.

Remarque : Si on prend un tore vertical avec fonction hauteur en $\mathbb{R}^2$ c'est pas Morse-Smale. En effet, la sous-variété instable du point de selle haut n'intersecte pas transversalement la sous-variété stable du point de selle du bas car l'intersection est un cercle, ce qui est de dimension 1 et non 2.

Notation : Soient $x_1, x_2 \in \mathrm{crit}(f)$. Posons :

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, \pm\nabla f) &:= W^u(x_1, \pm\nabla f) \cap W^s(x_2, \pm\nabla f) \\ &= \left\{ y \in M \middle| \lim_{t\to-\infty} \phi_\pm^t(y) = x_1,\ \lim_{t\to+\infty} \phi_\pm^t(y) = x_2 \right\} \end{aligned}$$

Proposition : $W(x_1, x_2, \pm\nabla f) = W(x_2, x_1, \mp\nabla f)$.

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, \pm\nabla f) &= W^u(x_1, \pm\nabla f) \cap W^s(x_2, \pm\nabla f) \\ &= W^s(x_1, \mp\nabla f) \cap W^u(x_2, \mp\nabla f) \\ &= W^u(x_2, \mp\nabla f) \cap W^s(x_1, \mp\nabla f) \\ &= W(x_2, x_1, \mp\nabla f) \end{aligned}$$

□

Remarque : Par définition, $W(x_1, x_2, \pm\nabla f)$ peut être vu comme l'ensemble des points $y \in M$ dont l'orbite par $\phi_\pm^t$ va asymptotiquement de x_1 à x_2. La dernière proposition est donc évidente.

Proposition : Soient $x_1, x_2 \in \mathrm{crit}(f)$. Alors

$$\mu(x_1) - \mu(x_2) = \nu(x_2) - \nu(x_1)$$

Preuve : $\mu(x_1) - \mu(x_2) = (n - \nu(x_1)) - (n - \nu(x_2)) = \nu(x_2) - \nu(x_1)$. □

Proposition : Soit f Morse-Smale sur (M, g) et $x_1, x_2 \in \mathrm{crit}(f)$ tels que $W(x_1, x_2, \nabla f) \neq \emptyset$. Alors :

$$0 \leq \dim\left(W(x_1, x_2, \nabla f)\right) = \mu(x_1) - \mu(x_2) = \nu(x_2) - \nu(x_1)$$

Preuve : *(prélude)* Soient $V_1, V_2 \subset V$ deux sous-espaces vectoriels réels transverses d'un espace vectoriel réel V, i.e. $V_1 \oplus V_2 = V$. Alors :

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim V$$

Ce qui implique $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V$. *(retournons à nos moutons)* Soient $x_1, x_2 \in \mathrm{crit}(f)$ pour f Morse-Smale sur (M, g). Pour tout $y \in W(x_1, x_2, \nabla f)$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \dim W(x_1, x_2, \nabla f) \\ &= \dim(W^u(x_1, \nabla f) \cap W^s(x_2, \nabla f)) \\ &= \dim T_y\, (W^u(x_1, \nabla f) \cap W^s(x_2, \nabla f)) \\ &= \dim \left(T_y W^u(x_1, \nabla f) \cap T_y W^s(x_2, \nabla f)\right) \\ &= \dim(T_y W^u(x_1, \nabla f)) + \dim(T_y W^s(x_2, \nabla f)) - n \\ &= \mu(x_1) + \nu(x_2) - n \\ &= \mu(x_1) + (n - \mu(x_2)) - n \\ &= \mu(x_1) - \mu(x_2) \\ &= \nu(x_2) - \nu(x_1) \end{aligned}$$

□

Proposition : Soit f Morse-Smale sur (M, g) et $x_1, x_2 \in \mathrm{crit}(f)$ tels que $W(x_1, x_2, -\nabla f) \neq \emptyset$. Alors :

$$0 \leq \dim\left(W(x_1, x_2, -\nabla f)\right) = \mu(x_2) - \mu(x_1) = \nu(x_1) - \nu(x_2)$$

Preuve : En utilisant la dernière proposition, on trouve directement :

$$\begin{aligned} \dim\left(W(x_1, x_2, -\nabla f)\right) &= \dim\left(W(x_2, x_1, \nabla f)\right) \\ &= \mu(x_2) - \mu(x_1) \\ &= \nu(x_1) - \nu(x_2) \end{aligned}$$

□

Proposition : Soit f Morse-Smale sur (M, g) et $x_1, x_2 \in \mathrm{crit}(f)$. Alors :

1. Si $\mu(x_1) - \mu(x_2) = \nu(x_2) - \nu(x_1) < 0$, alors forcément $W(x_1, x_2, \nabla f) = \emptyset$.
2. Si $\mu(x_2) - \mu(x_1) = \nu(x_1) - \nu(x_2) < 0$, alors forcément $W(x_1, x_2, -\nabla f) = \emptyset$.

Preuve : C'est la contraposée des deux dernières propositions. □

24.8 Espace de module de courbes gradient :

Définition : L'espace de module de courbes gradient paramétrées (ascendantes puis descendantes) reliant asymptotiquement x^- à x^+ en $\mathrm{crit}(f)$ est par définition :

$$\mathcal{M}(x^-,x^+,\nabla f) := \left\{\gamma : \mathbb{R} \to M \middle| \lim_{t\to\pm\infty} \gamma(t) = x^\pm,\ \dot{\gamma}(t) = (\nabla f)(\gamma(t))\right\}$$

$$\mathcal{M}(x^-,x^+,-\nabla f) := \left\{\gamma : \mathbb{R} \to M \middle| \lim_{t\to\pm\infty} \gamma(t) = x^\pm,\ \dot{\gamma}(t) = -(\nabla f)(\gamma(t))\right\}$$

De même, l'espace de module de courbes gradient (ascendantes puis descendantes) non paramétrées reliant asymptotiquement $x_1, x_2 \in \mathrm{crit}(f)$ est par définition :

$$\widehat{\mathcal{M}}(x^-,x^+,\nabla f) := \mathcal{M}(x^-,x^+,\nabla f)/\mathbb{R}$$

$$\widehat{\mathcal{M}}(x^-,x^+,-\nabla f) := \mathcal{M}(x^-,x^+,-\nabla f)/\mathbb{R}$$

Rappel : Une courbe gradient de $\pm\nabla f$ vérifie $\gamma(t) = \phi^t_\pm(\gamma(0))$. Ainsi,

Proposition : On a deux bijections

$$\mathcal{M}(x^-,x^+,\nabla f) \leftrightarrow W(x^-,x^+,\nabla f)$$

$$\mathcal{M}(x^-,x^+,-\nabla f) \leftrightarrow W(x^-,x^+,-\nabla f)$$

Données par dans un sens par :

$$\gamma \mapsto y := \gamma(0)$$

et dans l'autre par :

$$\gamma(t) := \phi^t_+(y) \hookleftarrow y \quad \text{ou} \quad \gamma(t) := \phi^t_-(y) \hookleftarrow y$$

Preuve : Par symétrie, il suffit de démontrer la première bijection. Par définition, les courbes gradient de ∇f vérifient $\gamma(t) = \phi^t_+(\gamma(0))$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(x^-,x^+,\nabla f) &= \left\{\gamma : \mathbb{R} \to M \middle| \lim_{t\to\pm\infty} \gamma(t) = x^\pm,\ \dot{\gamma}(t) = (\nabla f)(\gamma(t))\right\} \\
&= \left\{\gamma : \mathbb{R} \to M \middle| \lim_{t\to\pm\infty} \phi^t_+(\gamma(0)) = x^\pm,\ \gamma(t) = \phi^t_+(\gamma(0))\right\} \\
&= \textit{magie} \\
&= \left\{\gamma(0) \in M \middle| \lim_{t\to\pm\infty} \phi^t_+(\gamma(0)) = x^\pm\right\} \\
&= \left\{y \in M \middle| \lim_{t\to\pm\infty} \phi^t_+(y) = x^\pm\right\} \\
&= W(x^-,x^+,\nabla f)
\end{aligned}$$

où la *magie* découle du fait que l'équation de courbe gradient est une équation différentielle de degré 1, et donc que par un point x_0 ne passe qu'une seule courbe gradient $\gamma(t)$ telle que $\gamma(0) = x_0$. $\square$

Remarque : La dernière phrase est un peu bof... énoncer un théorème d'ÉDO qui a de l'allure. TO DO ! ! !

Remarque : Puisque $W(x^-, x^+, \pm\nabla f)$ est une sous-variété de M (et donc une variété), on peut voir $\mathcal{M}(x^-, x^+, \pm\nabla f)$ comme variété.

Proposition : Pourvu que $\mathcal{M}(x^-, x^+, \nabla f) \neq \emptyset$, on a :

$$\dim \mathcal{M}(x^-, x^+, \nabla f) = \mu(x^-) - \mu(x^+) = \nu(x^+) - \nu(x^-)$$

Preuve : La bijection

$$\mathcal{M}(x^-, x^+, \nabla f) \leftrightarrow W(x^-, x^+, \nabla f)$$

de la dernière proposition « induit une topologie » sur $\mathcal{M}(x^-, x^+, \nabla f)$ qui peut alors être vue comme variété « difféomorphe » à $W(x^-, x^+, \nabla f)$. Mais on a vu que

$$\dim W(x^-, x^+, \nabla f) = \mu(x^-) - \mu(x^+) = \nu(x^+) - \nu(x^-)$$

pourvu qu'il soit non vide. $\square$

Proposition : Pourvu que $\mathcal{M}(x^-, x^+, -\nabla f) \neq \emptyset$, on a :

$$\dim \mathcal{M}(x^-, x^+, -\nabla f) = \mu(x^+) - \mu(x^-) = \nu(x^-) - \nu(x^+)$$

Preuve : Même preuve que celle de la dernière proposition. $\square$

Remarque : Il faut voir $\mathcal{M}$ comme espaces d'applications $\gamma : \mathbb{R} \to M$ et $\widehat{\mathcal{M}}$ comme espace des feuilles du feuilletage gradient. Le modulo $\mathbb{R}$ de $\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\mathbb{R}$ découle du fait que les courbes gradients paramétrées vérifient $\gamma(t) = \phi_+^t(\gamma(0))$ et donc les feuilles (i.e. les orbites) sont des « γ modulo translation temporelle », i.e. on a un $\mathbb{R}$-fibré principal

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{M} &\twoheadrightarrow \widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto \operatorname{im}(\gamma) = \gamma(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

où $\gamma(\mathbb{R})$ est une feuille du feuilletage gradient.

Proposition : Pourvu que $\widehat{\mathcal{M}}(x^-,x^+,\nabla f) \neq \emptyset$, on a :

$$\dim \widehat{\mathcal{M}}(x^-,x^+,\nabla f) = \mu(x^-) - \mu(x^+) - 1 = \nu(x^+) - \nu(x^-) - 1$$

De même, pouvu que $\widehat{\mathcal{M}}(x^-,x^+,-\nabla f) \neq \emptyset$, on a :

$$\dim \widehat{\mathcal{M}}(x^-,x^+,-\nabla f) = \mu(x^+) - \mu(x^-) - 1 = \nu(x^-) - \nu(x^+) - 1$$

Preuve : Découle du fait que $\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\mathbb{R}$. □

Remarque : $\mathcal{M}$ et $\widehat{\mathcal{M}}$ sont généralement non compactes. En les compactifiant elles deviennent généralement à bord. La magie veut que le bord de $\mathcal{M}$ pour deux points critiques soit le $\mathcal{M}$ d'une autre paire de points critiques. (REVENIR LÀ-DESSUS !).

Définition : L'*indice de Morse relatif* entre x^- et x^+ est par définition

$$\mathrm{ind}(x^-,x^+,\nabla f) := \mu(x^-) - \mu(x^+) = \nu(x^+) - \nu(x^-)$$

$$\mathrm{ind}(x^-,x^+,-\nabla f) := \mu(x^+) - \mu(x^-) = \nu(x^-) - \nu(x^+)$$

Remarque : Sous cette notation, pourvu que les ensembles considérés suivants soient non vides, on a alors pour le gradient asendant ∇f :

$$\begin{aligned}
\dim(W(x^-,x^+,\nabla f)) &= \mathrm{ind}(x^-,x^+,\nabla f)\\
\dim(\mathcal{M}(x^-,x^+,\nabla f)) &= \mathrm{ind}(x^-,x^+,\nabla f)\\
\dim(\widehat{\mathcal{M}}(x^-,x^+,\nabla f)) &= \mathrm{ind}(x^-,x^+,\nabla f) - 1
\end{aligned}$$

et pour le gradient descendant $-\nabla f$:

$$\begin{aligned}
\dim(W(x^-,x^+,-\nabla f)) &= \mathrm{ind}(x^-,x^+,-\nabla f)\\
\dim(\mathcal{M}(x^-,x^+,-\nabla f)) &= \mathrm{ind}(x^-,x^+,-\nabla f)\\
\dim(\widehat{\mathcal{M}}(x^-,x^+,-\nabla f)) &= \mathrm{ind}(x^-,x^+,-\nabla f) - 1
\end{aligned}$$

Remarque : L'intérêt de l'indice de Morse relatif se retrouve en théorie de Floer (en dimension infinie l'indice de Morse absolu peut être infini alors que l'indice relatif est fini).

24.9 Linéarisation de l'équation de courbes gradient :

Voici une manière pour étudier la dimension de $\mathcal{M}(x^-, x^+, \pm\nabla f)$.

Définition : $A_t := \tilde{H}_f|_{\gamma(t)}$

Définition : $D_A^\pm := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mp A_t$

Proposition : $\dim \mathcal{M}(x^-, x^+, \pm\nabla f) = \dim\left(\ker D_A^\pm \cap W\right)$ où W est l'espace des $\tau \in \Gamma^\infty(\gamma^* TM)$ tels que $\lim_{t\to-\infty} \tau(t) = \lim_{t\to+\infty} \tau(t) = 0$.

Preuve : Considérons deux points critiques $x^-, x^+ \in \mathrm{crit}(f)$ tels que $\mathcal{M}(x^-, x^+, \pm\nabla f)$ soit non vide (soit pour $+\nabla f$ soit pour $-\nabla f$). Soit $\gamma \in \mathcal{M}(x^-, x^+, \pm\nabla f)$. Pour calculer la dimension de $\mathcal{M}(x^-, x^+, \pm\nabla f)$ il suffit de calculer $T_\gamma\mathcal{M}(x^-, x^+, \pm\nabla f)$. Considérons une courbe γ_s en $\mathcal{M}(x^-, x^+, \pm\nabla f)$ telle que

$$\gamma_0 = \gamma \in \mathcal{M}(x^-, x^+, \pm\nabla f) \quad \text{et} \quad \tau := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \gamma_s \in T_\gamma\mathcal{M}(x^-, x^+, \pm\nabla f)$$

Puisque $\gamma \in \mathcal{M}(x^-, x^+, \pm\nabla f)$, alors :

$$\lim_{t\to-\infty} \gamma(t) = x^-, \quad \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = x^+ \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}(t) = \pm(\nabla f)(\gamma(t))$$

Les deux premières conditions se traduisent par

$$\lim_{t\to\pm\infty} \tau(t) = 0$$

La dernière condition se traduit par :

$$\dot{\tau}(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (\pm(\nabla f)(\gamma_s(t))) = \pm(\nabla_{\tau(t)}(\nabla f))|_{\gamma(t)} = \pm\tilde{H}_f|_{\gamma(t)}(\tau(t))$$

i.e. par $\dot{\tau}(t) = \pm\tilde{H}_f|_{\gamma(t)}(\tau(t))$, i.e. par :

$$\dot{\tau}(t) = \pm A_t \tau(t)$$

i.e. par :

$$\dot{\tau}(t) \mp A_t \tau(t) = 0$$

i.e. par

$$\tau \in \ker(D_A^{\mp})$$

D'où :

$$\begin{aligned}
& \dim \mathcal{M}(x^-, x^+, \pm\nabla f) \\
= \ & \dim T_\gamma \mathcal{M}(x^-, x^+, \pm\nabla f) \\
= \ & \dim\{\tau \in \Gamma^\infty(\gamma^* TM) | \lim_{t\to-\infty} \tau(t) = \lim_{t\to+\infty} \tau(t) = 0, \tau \in \ker(D_A^{\mp})\} \\
= \ & \dim\left(\ker(D_A) \cap W\right)
\end{aligned}$$

où W est le sous-ensemble des τ tels que $\lim_{t\to-\infty} \tau(t) = \lim_{t\to+\infty} \tau(t) = 0$. □

Remarque : Il y a moyen de faire ça plus propre.

Remarque : Le procédé de passer au tangent de $\mathcal{M}(x^-, x^+, \pm\nabla f)$ est nommé *linéarisation*.

Définition : Un opérateur linéaire D est dit *Fredholm* si son noyau et son conoyau sont de dimension finie, i.e. si

$$\dim(\ker(D)) < \infty \quad \text{et} \quad \dim(\text{coker}(D)) = \text{codim}(\text{im}(D)) < \infty$$

Si D est Fredholm, son *indice Fredholm* est par définition

$$\text{ind}(D) := \dim(\ker(D)) - \dim(\text{coker}(D)) = \dim(\ker(D)) - \text{codim}(\text{im}(D))$$

Question : $D_A^{\pm}$ est-il Fredholm ? Est-il surjectif ? (si surjectif alors $\dim(\text{coker}(D_A)) = 0$). À partir de là, l'indice de Morse relatif s'interprète comme l'indice Fredholm de $D_A^{\pm}$.

Proposition : En dimension finie, D_A est surjectif si et seulement si f est Morse-Bott.

Preuve : Salamon et Robbin (1992) (p. 3). □

Proposition : En dimension infinie, D_A est surjectif si et seulement si f est Morse-Bott.

Preuve : Salamon et Robbin (1992) (p. 3). □

24.10 Flot spectral :

Remarque : $\tilde{H}_f|_{x^\pm} = \lim_{t\to\pm\infty} A_t$. L'indice de Morse relatif entre x^- et x^+ peut alors être vu comme étant le nombre de valeurs propres strictement négatives de A_t qui deviennent strictement positives moins le nombre de valeurs propres positives qui deviennent strictement négatives, comptées avec multiplicité.

Atiyah-Patodi-Singer : flot spectral de A_t = indice Fredholm de D_A.

24.11 Indice de Maslov :

Considérons le chemin de graphes

$$\Lambda_t : \Gamma_t := \Gamma_{A_t} := \{(v, A_t v) \in V \times V | v \in V\} < V \times V$$

Puisque $\tilde{H}_f$ est g-auto-adjoint, Γ_t est lagrangien en $V \times V$. On a alors un chemin de lagrangiennes en $V \times V$. Une valeur propre de $A_t = \tilde{H}_f|_{\gamma(t)}$ change de signe lorsque A_t devient singulière, i.e. lorsqu'elle intersecte le cycle de Maslov

$$\Sigma(\Lambda_{\text{hor}}) := \{\Lambda \in \mathcal{L}(V \times V) | \Lambda \cap \Lambda_{\text{hor}} \neq \{0\}\} \subset \mathcal{L}(V \times V)$$

de la lagrangienne horizontale

$$\Lambda_{\text{hor}} := \{(v, 0) | v \in V\} < V \times V$$

où $\mathcal{L}(V \times V)$ dénote l'ensemble des sous-espaces vectoriels lagrangiens de $V \times V$. C'est-à-dire, $\Sigma(\Lambda_{\text{hor}})$ est l'ensemble des lagrangiennes non transverses à la lagrangienne horizontale.

L'indice de Maslov de Λ_t peut être interprété comme le nombre de fois qu'il intersecte le cycle de Maslov $\Sigma(\Lambda_{\text{hor}})$. D'où :

Indice de Maslov de Λ_t = nombre de fois qu'il intercte $\Sigma(\Lambda_{\text{hor}})$ = le nombre de fois que A_t devient singulière = le nombre de fois qu'une valeur propre de A_t change de signe = le flot spectral de A_t = l'indice de Morse relatif entre x^- et x^+ = l'indice Fredholm de D_A.

À FAIRE : les deux versions $(v, \tilde{H}_f(v)) < V \times V$ et la version $(v, H_f(v, \cdot)) < V \times V^*$. Parler des structures symplectiques sur $V \times V$ (induite par g) et sur $V \times V^*$ (canonique). Montrer que les graphes sont lagrangiens.

À FAIRE : les détails de la théorie de Morse, de la théorie Fredholm, du flot spectral, de l'indice de Maslov etc. Ça pourrait être mieux écrit.

24.12 Homologie de Morse :

Le complexe de Morse est généré par les points critiques de f.

La différentielle ∂ dénombre le nombre de composantes connexes de $\widehat{\mathcal{M}}(x^-, x^+, -\nabla f)$ (on peut aussi faire avec $+\nabla f$).

La différentielle ∂ vérifie $\partial^2 = 0$ (preuve TO DO). Passer par la compactification de $\widehat{\mathcal{M}}$. La preuve passe par le bord de la compactification de $\widehat{\mathcal{M}}$. Les coins représentent du *bubbling*.

Si on utilise $-\nabla f$, la différentielle ∂ fait augmenter l'indice μ et diminuer l'indice ν. Si on utilise $+\nabla f$, la différentielle ∂ fait diminuer l'indice μ et augmenter l'indice ν.

L'homologie de Morse est l'homologie du complexe de Morse.

L'homologie de Morse est isomorphe à l'homologie usuelle de M (i.e. l'homologie singulière). (preuve TO DO)

25 Théorie de Morse-Bott

25.1 Introduction :

La théorie de Morse-Bott est une sorte de théorie de Morse lorsqu'il y a une action de groupe. Ici on considère des sous-variétés critiques.

Bref, une fonction Morse-Bott $f : M \to \mathbb{R}$ est telle que $\mathrm{crit}(f) \subset M$ est une sous-variété de M.

Ici $T_x\mathrm{crit}(f) = \ker(\tilde{H}_f|_x) \subset T_xM$.

Là on a plus $\mu(x)+\nu(x) = n$, mais plutôt $\mu(x)+\nu(x)+m = n$ où m est la dimension de la sous-variété critique. Aussi, $\mu(x)$ et $\nu(x)$ sont le nombre de valeurs propres positives et négatives du hessien restreint au fibré tangent normal à la sous-variété critique.

L'utilité des fonctions de Morse-Bott est qu'on peut prendre des fonctions qui ont des symétries (e.g. invariantes sous une action de groupe).

Etc.

Aussi : les fonctions de Morse minimalement dégénérées (e.g. celles qui sont la norme carrée d'une application moment) sont des fonctions de Morse-Kirwan. Écrire une section là-dessus car c'est plus près des fonctionnelles utilisées sur les espaces de connexions.

26 Homologie de Morse et homologie de Floer lagrangienne

26.1 Introduction :

Le but de cette section est de relier l'homologie de Morse à l'homologie de Floer d'intersections lagrangiennes. En considérant un triple Morse-Smale (Q, f, g) où f est Morse-Smale et g est une métrique riemannienne sur Q, l'idée est d'étudier les graphes lagrangiens $\Gamma_{\mathrm{d}f}$ et Γ_0 en la variété symplectique (M, ω) où $M := T^*Q$ et $\omega = \omega_{\text{can}} = \mathrm{d}\theta_{\text{can}}$ où $\theta_{\text{can}}|_\alpha := \alpha \circ \pi_*$ pour tout $\alpha \in T^*Q$ et $\pi : T^*Q \to Q$ la projection canonique du fibré cotangent. Ce faisant, les points critiques de f, i.e. là où $\mathrm{d}f$ est nulle sont les points d'intersections lagrangiens du graphe lagrangien $\Gamma_{\mathrm{d}f}$ et du graphe lagrangien Γ_0 de la section nulle. L'idée est alors de considérer des bandes J-holomorphes $u : [0,1] \times \mathbb{R} \to M$ (pour $J = J_{\text{can}}$) bordées par $\Gamma_{\mathrm{d}f}$ et Γ_0 qui sont verticales. Il faut alors montrer une correspondance entre l'éq. de CR (Cauchy-Riemann) et l'équation de courbes gradients. Ainsi, dénombrer des courbes gradient reliant asymptotiquement des points critiques revient à dénombrer des bandes J-holomorphes reliant asymptotiquement les points d'intersections lagrangiens.

En particulier, pour un triple Morse-Smale $(\mathcal{A}, g, f)$ où $\mathcal{A}$ est affine modélisé sur V, on considérons les graphes lagrangiens

$$\Gamma_0 = \{(A, 0) : A \in \mathcal{A}\} \subset T^*\mathcal{A}$$

$$\Gamma_{\mathrm{d}f} = \{(A, \mathrm{d}f|_A) : A \in \mathcal{A}\} \subset T^*\mathcal{A}$$

Le premier graphe est visiblement lagrangien. Le second l'est car la 1-forme $\mathrm{d}f$ est fermée. Les points critiques $\mathrm{crit}(f) \subset \mathcal{A}$ de f, i.e. les points où $\mathrm{d}f = 0$, sont précisément les points où $\Gamma_{\mathrm{d}f}$ intersecte Γ_0. C'est-à-dire, les points critiques de f sont en correspondance biunivoque avec les points d'intersections lagrangiens $\Gamma_0 \cap \Gamma_{\mathrm{d}f}$. Remarquons que les courbes A_t en $\mathcal{A}$ sont en correspondance biunivoque avec les surfaces verticales $u : [0,1] \times \mathbb{R}$ en $T^*\mathcal{A} = \mathcal{A} \times V^*$ bordées par les lagrangiennes Γ_0 et $\Gamma_{\mathrm{d}f}$ du type

$$u(s,t) = (A_t, s\mathrm{d}f|_{A_t})$$

La correspondance est donnée par :

$$A_t = \pi \circ u(s,t)$$

pour $\pi : T^*\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ la projection du fibré cotangent.

Remarque : Cette idée de relier l'homologie de Morse et l'homologie de Floer d'intersections lagrangiennes entre Γ_0 et $\Gamma_{\mathrm{d}f}$ est précisément ce que fait Andreas Floer en 1989 dans son article « *Witten's complex and infinite dimensional Morse theory* ». Je m'en inspirerai donc librement. Le but est ici de généraliser ça à la dimension infinie sur un espace de connexions.

26.2 Rappels de symplectique :

Soit (Q, f, g) un triple Morse-Smale. Posons $n := \dim Q$. Soit $M := T^*Q$ son fibré cotangent et $\pi : T^*Q \to Q$ la projection de fibré. Sur M repose une 1-forme canonique $\theta := \theta_{\mathrm{can}} \in \Omega^1(M)$ définie en chaque $\alpha \in M = T^*Q$ par $\theta|_\alpha := \alpha \circ \pi_*$. Cette dernière 1-forme (dite *canonique* ou encore *de Liouville* ou encore *tautologique*) induit une 2-forme symplectique (dite *canonique*) $\omega := \omega_{\mathrm{can}} \in \Omega^2(M)$ définie par $\omega := \mathrm{d}\theta$.

Proposition : La 1-forme canonique est tautologique au sens où $\alpha^*\theta_{\mathrm{can}} = \alpha$ pour tout $\alpha \in \Omega^1(Q)$ où α est vue comme application $\alpha : Q \to T^*Q$.

Preuve : $\alpha^*\theta_{\mathrm{can}} = \theta_{\mathrm{can}}|_\alpha \circ \alpha_* = \alpha \circ \pi_* \circ \alpha_* = \alpha \circ (\pi \circ \alpha)_* = \alpha \circ \mathrm{id}_Q = \alpha$. □

Considérons un système de coordonnées locales $(x^k)_k$ sur $U \subset Q$. Il induit une base $\{\mathrm{d}x^k\}_k$ de T^*U dont la base duale est $\{\partial_k\}_k$ de TU. Ceci induit à son tour un système de coordonnées locales (p_α, q^α) sur $\pi^{-1}(U) \subset M$ donné par :

$$q^k(\alpha) := \pi^* x^k = x^k \circ \pi(\alpha) \quad \text{et} \quad p_k(\alpha) := \alpha(\partial_k) \forall \alpha \in \pi^{-1}(U),\ \forall k = 1, ..., n$$

En ces coordonnées, θ et ω s'écrivent :

$$\theta|_{\pi^{-1}(U)} = \sum_{k=1}^{n} p_k \mathrm{d}q^k \quad \text{et} \quad \omega|_{\pi^{-1}(U)} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}p_k \wedge \mathrm{d}q^k$$

À partir d'ici je voudrait que les musicalités bémol et dièse riemanniennes (entre TQ et T^*Q) induites par la métrique g sur Q induise une structure J sur M. En jouant un peu je veux que la métrique induite

$$g_J(\,\cdot\,,\,\cdot\,) := \omega(\,\cdot\,, J\,\cdot\,)$$

sur M vérifie quelque chose comme

$$g_J(\,\cdot\,,\,\cdot\,) = (\pi^*g)(\,\cdot\,,\,\cdot\,) + (\pi^*g)(J\,\cdot\,, J\,\cdot\,)$$

Ceci donnerait aussi

$$\omega(\,\cdot\,,\,\cdot\,) = (\pi^*g)(J\,\cdot\,,\,\cdot\,) - (\pi^*g)(\,\cdot\,, J\,\cdot\,)$$

J'ai essayé en coordonnées Darboux canoniques p_k, q^k sur $U \subset M$ et j'arrive à quelque chose d'assez générique pour J, mais un cas qui semble marcher est

$$J = (g^{i,j} \circ \pi)\mathrm{d}p_i \otimes \frac{\partial}{\partial q^j} - (g_{i,j} \circ \pi)\mathrm{d}q^i \otimes \frac{\partial}{\partial p_j}$$

La musicalité bémol et dièse semble cachée à travers les coefficients $g_{i,j}$ et $g^{i,j}$ car $(\mathrm{d}x^i)^g = g^{i,j}\partial_j$ et $(\partial_i)^\flat = g_{i,j}\mathrm{d}x^j$. Bref, faire tout ça de manière géométrique sans coordonnées. Il y a des idées dans mes feuilles du 2017-03-13. Passons au cas particulier d'un espace affine.

26.3 Préliminaires sur un espace affine :

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine modélisé sur l'espace vectoriel V. Donnons à A une métrique riemannienne affine constante (plate) g. L'espace $\mathcal{A}$ étant affine, ses fibrés tangents et cotangents s'écrivent respectivement globalement

$$T\mathcal{A} = \mathcal{A} \times V \quad \text{et} \quad T^*\mathcal{A} = \mathcal{A} \times V^*$$

Dénotons les points de V par v et ceux de V^* par α. Les points de $T\mathcal{A}$ sont alors des paires $(A, v) \in A \times V$ et ceux de $T^*\mathcal{A}$ sont des paires $(A, \alpha) \in \mathcal{A} \times V^*$. Remarquons que

$$T_{(A,\alpha)}(T^*\mathcal{A}) = T_{(A,\alpha)}(\mathcal{A} \times V^*) = V \times V^*$$

Ainsi, tout vecteur tangent reposant en $T_{(A,\alpha)}(T^*\mathcal{A})$ est une paire (v,α). Considérons $\pi : T^*\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ la projection de fibré.

Proposition : $\pi(A,\alpha) = A$ pour tout $(A,\alpha) \in T^*\mathcal{A} = \mathcal{A} \times V^*$.

Preuve : Évident. □

Proposition : $\pi_*|_{(A,\alpha')}(v,\alpha) = v$.

Preuve : Évident. □

Proposition : $\theta_{\text{can}}|_{(A,\alpha')}(v,\alpha) = \alpha'(v)$ pour tout $(v,\alpha) \in T_{(A,\alpha')}(T^*\mathcal{A})$.

Preuve : La 1-forme canonique $\theta_{\text{can}} \in \Omega^1(T^*\mathcal{A})$ est donnée par $\theta_{\text{can}}|_{(A,\alpha)} = \alpha \circ \pi_*$. En utilisant la formule explicite pour π_* on trouve ce qu'on cherche. □

Proposition : $\omega_{\text{can}}|_{(A,\alpha)}((v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2)) = \alpha_1(v_2) - \alpha_2(v_1)$.

Preuve : Soient $(A,\alpha') \in T^*\mathcal{A}$ et $(v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2) \in T_{(A,\alpha')}(T^*\mathcal{A})$. Ces deux derniers vecteurs tangents induisent des champs vectoriels constants (aussi dénotés (v_1,α_1) et (v_2,α_2)) sur $T^*\mathcal{A}$ qui commutent donc sous le crochet de Lie $[\cdot,\cdot]$ (car constants). On calcule alors directement ω_{can} :

$$\begin{aligned}
& \omega_{\text{can}}|_{(A,\alpha')}((v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2)) \\
= \; & (v_1,\alpha_1)(\theta_{\text{can}}|_{(A,\alpha')}((v_2,\alpha_2))) - (v_2,\alpha_2)(\theta_{\text{can}}|_{(A,\alpha')}((v_1,\alpha_1))) \\
& -\theta_{\text{can}}|_{(A,\alpha')}([(v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2)]) \\
= \; & (v_1,\alpha_1)(\alpha'(v_2)) - (v_2,\alpha_2)(\alpha'(v_1)) \\
= \; & \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (\alpha' + s\alpha_1)(v_2) - \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (\alpha' + s\alpha_2)(v_1) \\
= \; & \alpha_1(v_2) - \alpha_2(v_1)
\end{aligned}$$

i.e. :

$$\omega_{\text{can}}((v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2)) = \alpha_1(v_2) - \alpha_2(v_1)$$

□

Remarque : ω_{can} est donc constante sur $T^*\mathcal{A}$. Elle est donc bien fermée. Mais la fermeture découle aussi de $\mathrm{d}\omega_{\text{can}} = \mathrm{d}^2\theta_{\text{can}} = 0$).

Définition : En utilisant la correspondance $T_{(A,\alpha)}(T^*\mathcal{A}) = V \times V^*$ les g-musicalités bémol et dièse induisent une structure presque-complexe J_g constante sur $T^*\mathcal{A}$:

$$J_g(v,\alpha) := (\alpha^g, -v^\flat)$$

Remarque : Cette dernière structure J_g (que j'écrirai plus simplement J) induit une métrique constante g_J sur $T^*\mathcal{A}$:

$$g_J(\,\cdot\,,\,\cdot\,) := \omega(\,\cdot\,, J\,\cdot\,)$$

Proposition : $g_J((v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2)) = g(v_1,v_2) + g(\alpha_1^g,\alpha_2^g)$.

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
g_J((v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2)) &= \omega((v_1,\alpha_1),J(v_2,\alpha_2)) \\
&= \omega((v_1,\alpha_1),(\alpha_2^g,-v_2^\sharp)) \\
&= \alpha_1(\alpha_2^g) - (-v_2^\flat)(v_1) \\
&= \alpha_1(\alpha_2^g) + (v_2^\flat)(v_1) \\
&= g(\alpha_1^g,\alpha_2^g) + g(v_1,v_2) \\
&= g(v_1,v_2) + g(\alpha_1^g,\alpha_2^g)
\end{aligned}$$

i.e. :

$$g_J((v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2)) = g(v_1,v_2) + g(\alpha_1^g,\alpha_2^g)$$

□

Proposition : On a bien $g_J = (\pi^*g)(\,\cdot\,,\,\cdot\,) + (\pi^*g)(J\,\cdot\,,J\,\cdot\,)$.

Preuve : Calcul direct :

$$\begin{aligned}
& (\pi^*g)((v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2)) + (\pi^*g)(J(v_1,\alpha_1),J(v_2,\alpha_2)) \\
= \; & (\pi^*g)((v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2)) + (\pi^*g)((\alpha_1^g,v_1^\flat),(\alpha_2^g,v_2^\flat)) \\
= \; & g(\pi_*(v_1,\alpha_1),\pi_*(v_2,\alpha_2)) + g(\pi_*(\alpha_1^g,v_1^\flat),\pi_*(\alpha_2^g,v_2^\flat)) \\
= \; & g(v_1,v_2) + g(\alpha_1^g,\alpha_2^g) \\
= \; & g_J((v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2))
\end{aligned}$$

□

Définition : J est dite *ω-dominée* si $g_J := \omega(\,\cdot\,, J\,\cdot\,)$ est une métrique riemannienne définie positive. J est dite *ω-compatible* si elle est ω-dominée et si $\omega(J\,\cdot\,, J\,\cdot\,) = \omega$.

Proposition : J est ω-compatible.

Preuve : La dominance découle du fait que $g_J((v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2)) = g(v_1,v_2) + g(\alpha_1^g, \alpha_2^g)$ et du fait que g est une métrique riemannienne. La compatibilité découle du fait que

$$\begin{aligned}
\omega(J(v_1,\alpha_1), J(v_2,\alpha_2)) &= \omega((\alpha_1^g, -v_1^\flat),(\alpha_2^g, -v_2^\flat)) \\
&= (-v_1^\flat)(\alpha_2^g) - (-v_2^\flat)(\alpha_1^g) \\
&= (v_2^\flat)(\alpha_1^g) - (v_1^\flat)(\alpha_2^g) \\
&= \alpha_1(v_2) - \alpha_2(v_1) \\
&= \omega((\alpha_1, v_1),(\alpha_2, v_2))
\end{aligned}$$

□

Définition : La distribution horizontale sur $T^*\mathcal{A}$ est les vecteurs tangents de type $(v,0) \in V \times V^*$ et la distribution verticale sur $T^*\mathcal{A}$ est les vecteurs tangents de type $(0,\alpha) \in V \times V^*$.

Proposition : Les distribution horizontales et verticales sont g_J-orthogonales.

Preuve : $g_J((v_1,0),(0,\alpha_2)) = g(v_1,0) + g(0,\alpha_2^g) = 0 + 0 = 0$. □

Proposition : J envoie les vecteurs horizontaux à des vecteurs verticaux et vice-versa.

Preuve : $J(v,0) = (0,-v^\flat)$ et $J(0,\alpha) = (\alpha^g, 0)$. □

Définition : Le *champ vectoriel hamiltonien* $X_H \in \mathfrak{X}(T^*\mathcal{A})$ relativement à ω de l'hamiltonien $H \in C^\infty(T^*\mathcal{A};\mathbb{R})$ est défini implicitement par $-\mathrm{d}H = \omega(X_H, \cdot\,)$, i.e. par $\mathrm{d}H = \omega(\,\cdot\,, X_H)$. Le *champ vectoriel gradient* ∇^{g_J} relativement à g_J de H est défini par implicitement $\mathrm{d}H = g_J(\nabla^{g_J} H, \,\cdot\,) = (\nabla^{g_J} H)^\flat$, i.e. explicitement par $\nabla^{g_J} H = (\mathrm{d}H)^{g_J}$.

Proposition : $X_H = J\nabla^{g_J} H$

Preuve : Cette égalité découle de la non dégénérescence de ω et de :

$$\omega(\,\cdot\,, X_H) = \mathrm{d}H = g_J(\,\cdot\,, \nabla^{g_J} H) = \omega(\,\cdot\,, J\nabla^{g_J} H)$$

□

Remarque : À partir de maintenant considérons l'hamiltonien $H := \pi^* f = f \circ \pi$ pour $f \in C^\infty(\mathcal{A}; \mathbb{R})$.

Proposition : La fonction H est verticalement constante car $H = \pi^* f$.

Preuve : Évident. □

Proposition : $\mathrm{d}H = (\mathrm{d}f)_\pi \circ \pi_*$.

Preuve : $\mathrm{d}H = \mathrm{d}(\pi^* f) = \pi^*(\mathrm{d}f) = (\mathrm{d}f)_\pi \circ \pi_*$. □

Proposition : $\mathrm{d}H(0, \alpha) = 0$ pour tout $(0, \alpha) \in V \times V^*$.

Preuve : $\mathrm{d}H(0, \alpha) = (\mathrm{d}f)_\pi \circ \pi_*(0, \alpha) = (\mathrm{d}f)_\pi(0) = 0$. □

Proposition : $\nabla^{g_J} H$ est horizontal.

Preuve : On sait que les distributions horizontales et verticales sont g_J-orthogonales. Pour montrer que $\nabla^{g_J} H$ est horizontal il suffit de montrer qu'il est orthogonal à tout vecteur vertical. Ce qu'on vérifie directement :

$$g_J(\nabla^{g_J} H, (0, \alpha)) = \mathrm{d}H(0, \alpha) = (\mathrm{d}f)_\pi \circ \pi_*(0, \alpha) = (\mathrm{d}f)_\pi(0) = 0$$

□

Proposition : $X_H = J\nabla^{g_J} H$ est vertical.

Preuve : Découle du fait que J envoie l'horizontal au vertical et vice-versa (et du fait que $\nabla^{g_J} H$ est horizontal). □

Corollaire : $\pi_* X_H = 0$.

Preuve : π_* tue les vecteurs verticaux (et X_H est vertical). □

Proposition : $\pi_*\nabla^{g_J}H = (\nabla^g f)_\pi$.

Preuve : Calculons d'abord ceci :

$$\begin{aligned}
g((\nabla^g f)_\pi, \pi_* \cdot) &= (\mathrm{d}f)_\pi \circ \pi_* \\
&= \pi^*(\mathrm{d}f) \\
&= \mathrm{d}(\pi^* f) \\
&= \mathrm{d}H \\
&= g_J(\nabla^{g_J}H, \cdot) \\
&= g(\pi_*\nabla^{g_J}H, \pi_* \cdot) + g(\pi_* J\nabla^{g_J}H, \pi_* J \cdot) \\
&= g(\pi_*\nabla^{g_J}H, \pi_* \cdot) + g(\pi_* X_H, \pi_* J \cdot) \\
&= g(\pi_*\nabla^{g_J}H, \pi_* \cdot) + g(0, \pi_* J \cdot) \\
&= g(\pi_*\nabla^{g_J}H, \pi_* \cdot)
\end{aligned}$$

D'où $g((\nabla^g f)_\pi, \pi_* \cdot) = g(\pi_*\nabla^{g_J}H, \pi_* \cdot)$. Puisque π_* est surjective et puisque g est non dégénérée, on conclut que

$$\pi_*\nabla^{g_J}H = (\nabla^g f)_\pi$$

C'est-à-dire, le champ vectoriel horizontal $\nabla^{g_J}H$ se projète au champ vectoriel $\nabla^g f$. □

Proposition : X_H et $\nabla^{g_J}H$ sont verticalement constants.

Preuve : Découle du fait que $H = \pi^* f$ est verticalement constant et que J et g_J sont aussi verticalement constants (car constants car g est constante sur $\mathcal{A}$). □

Proposition : $\nabla^{g_J}H$ et X_H sont explicitement donnés par :

$$\nabla^{g_J}H = ((\nabla^g f)_\pi, 0) \quad \text{et} \quad X_H = (0, -(\mathrm{d}f)|_\pi)$$

Preuve : En utilisant le fait que $\pi_*\nabla^{g_J}H = (\nabla^g f)_\pi$ ainsi que la décomposition $T_\alpha(T^*\mathcal{A}) = V \times V^*$, les champs vectoriels horizontaux $\nabla^{g_J}H$ et verticaux $X_H = J\nabla^{g_J}H$ verticalement constants s'écrivent explicitement comme :

$$\nabla^{g_J}H = ((\nabla^g f)_\pi, 0)$$

$$X_H = J\nabla^{g_J}H = J((\nabla^g f)_\pi, 0) = (0, -(\nabla^g f)_\pi^\flat) = (0, -(\mathrm{d}f)|_\pi)$$

□

Proposition : Le flot hamiltonien ϕ_H^s de $H := \pi^* f$ est explicitement donné par

$$\phi_H^s(A,\alpha) = (A, \alpha - s(\mathrm{d}f)|_A), \forall (A,\alpha) \in T^*\mathcal{A} = \mathcal{A} \times V^*$$

Preuve : Découle du fait que $X_H|_{(A,\alpha)} = (0, -(\mathrm{d}f)|_A)$ et du fait que X_H est vertical et est verticalement constant. □

Proposition : Le push-forward $(\phi_H^s)_*$ de $(v,\alpha) \in T_{(A,\alpha')}(T^*\mathcal{A}) = V \times V^*$ est donné par :

$$(\phi_H^s)_*|_{(A,\alpha')}(v,\alpha) = (v, \alpha - sH_f|_A(v,\cdot)) \in T_{\phi_H^s(A,\alpha')}(T^*\mathcal{A})$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned} (\phi_H^s)_*|_{(A,\alpha')}(v,\alpha) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} \phi_H^s(A+\lambda v, \alpha' + \lambda\alpha) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} (A+\lambda v, \alpha' + \lambda\alpha - s(\mathrm{d}f)|_{A+\lambda v}) \\ &= (v, \alpha - sH_f|_A(v,\cdot)) \in T_{\phi_H^s(A,\alpha')}(T^*\mathcal{A}) \end{aligned}$$

□

Corollaire : $(\phi_H^s)_*|_{(A,\alpha')}(0,\alpha) = (0,\alpha) \in T_{\phi_H^s(A,\alpha')}(T^*\mathcal{A})$

Preuve : Découle de la dernière proposition pour $v = 0$. □

Remarque : Les deux égalités $\nabla^{g_J} H = ((\nabla^g f)_\pi, 0)$ et $X_H = (0, -(\mathrm{d}f)|_\pi)$ expriment clairement l'idée que X_H et $\nabla^{g_J} H$ sont verticalement constants.

Proposition : Le crochet de Lie $[\nabla^{g_J} H, X_H]$ est explicitement donné par :

$$[\nabla^{g_J} H, X_H] = -(0, H_f|_{\pi(\alpha)}((\nabla^g f)_{\pi(\alpha)}, \cdot))$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
[\nabla^{g_J} H, X_H]|_\alpha &= ((\nabla^{g_J} H)X_H - X_H(\nabla^{g_J} H))\,|_\alpha \\
&= ((\nabla^{g_J} H)X_H)|_\alpha - 0 \\
&= ((\nabla^{g_J} H)X_H)|_\alpha \\
&= (((\nabla^g f)_\pi, 0)(0, -(\mathrm{d}f)|_\pi))|_\alpha \\
&= (0, -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (\mathrm{d}f)_{\pi(\alpha)+s(\nabla^g f)_{\pi(\alpha)}}) \\
&= -(0, H_f|_{\pi(\alpha)}((\nabla^g f)_{\pi(\alpha)}, \cdot))
\end{aligned}$$

où H_f est le tenseur hessien de f et n'est pas $H := \pi^* f$. □

Remarque : C'est normal que $[\nabla^{g_J} H, X_H] = -(0, H_f|_{\pi(\alpha)}((\nabla^g f)_{\pi(\alpha)}, \cdot))$. En effet, en coordonnées affines euclidiennes (i.e. t.q. $g_{i,j} = \delta_{i,j}$), la correspondance $T_\alpha(T^*\mathcal{A}) = V \times V^*$ est $\frac{\partial}{\partial q^k} \mapsto \frac{\partial}{\partial x^k}$ et $\frac{\partial}{\partial p_k} \mapsto \mathrm{d}x^k$. Ainsi pour $g_{i,j} = \delta_{i,j}$

$$\nabla^{g_J} H = \frac{\partial H}{\partial q^k}\frac{\partial}{\partial q^k} \quad \text{et} \quad X_H = -\frac{\partial H}{\partial q^k}\frac{\partial}{\partial p_k}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
[\nabla^{g_J} H, X_H] &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial H}{\partial q^j}\frac{\partial}{\partial p_j}\right) - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial H}{\partial q^j}\frac{\partial}{\partial q^j}\right) \\
&= -\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial^2 H}{\partial q^i \partial q^j}\frac{\partial}{\partial p_j}
\end{aligned}$$

ce qui correspond exactement à $-H_f(\nabla f, \cdot)$.

Remarque : Souvenons-nous que la distribution générée par X_H et $\nabla^{g_J} H$ est intégrable sur u si et seulement si il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que :

$$[\nabla^{g_J} H, X_H]_{u(s,t)} = aX_H|_{u(s,t)} + b\nabla^{g_J} H|_{u(s,t)}$$

Par la dernière proposition, ce sera le cas si et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ telles que :

$$-(0, H_f|_{\pi(u(s,t))}((\nabla^g f)_{\pi(u(s,t))}, \cdot)) = -a(0, (\mathrm{d}f)|_\pi(u(s,t))) + b((\nabla^g f)_{\pi(u(s,t))}, 0)$$

En prenant $b = 0$, il faut dès lors qu'il existe une constante réelle $a \in \mathbb{R}$ telle que :

$$H_f|_{\pi(u(s,t))}((\nabla^g f)_{\pi(u(s,t))}, \cdot) = a(\mathrm{d}f)|_{\pi(u(s,t))}$$

i.e. telle que :

$$\tilde{H}_f|_{\pi(u(s,t))}((\nabla^g f)_{\pi(u(s,t))}) = a(\nabla^g f)|_{\pi(u(s,t))}$$

Puisque $\nabla^g f$ n'est génériquement pas un vecteur propre de l'opérateur hessien $\tilde{H}_f$, il suit que la distribution générée par X_H et $\nabla^{g_J} H$ n'est génériquement pas intégrable. L'idée de départ aurait été de considérer une surface $u : [0,1] \times \mathbb{R} \to T^*\mathcal{A}$ telle que $u^{(s)} + Ju^{(t)} = 0$ pour $u^{(s)} = -X_H$ et $u^{(t)} = \nabla^{g_J} H$. Mais une telle surface n'existe pas puisque la distribution générée par X_H et $\nabla^{g_J} H$ n'est pas intégrable. La solution à ce problème réside en l'idée de Floer dans son article (1989, *Witten's complex...*) appliqué au cas affine. Au lieu d'utiliser J dans $\overline{\partial}$ il utilise une famille de structures presque-complexes J_s.

Définition : La structure presque-complexe J donnée plus haut sur $T^*\mathcal{A}$, qui vérifie $J(v,\alpha) := (\alpha^g, -v^\flat)$, induit une famille de structure presque-complexes sur $T^*\mathcal{A}$ donnée par

$$J_s := (\phi_H^{-s})_* \circ J \circ (\phi_H^s)_*$$

où ϕ_H^s est le flot hamiltonien de $H := \pi^* f \in C^\infty(T^*\mathcal{A}; \mathbb{R})$.

Remarque : Floer pose plutôt $J_t := (\phi_H^t)_* \circ J \circ (\phi_H^{-t})_*$.

Proposition : J_s est une famille de structures presque-complexes ω-dominées, i.e. $g_{J_s} := \omega(\,\cdot\,, J_s \,\cdot\,)$ est une famille de métriques riemanniennes.

Preuve : En utilisant le fait que J est ω-compatible et le fait que le flot hamiltonien ϕ_H^s préserve ω et le fait que ω est constante, on calcule directement :

$$\begin{aligned} \omega(\,\cdot\,, J_s \,\cdot\,) &= \omega(\,\cdot\,, (\phi_H^{-s})_* \circ J \circ (\phi_H^s)_* \,\cdot\,) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

À TERMINER ! ! ! □

Proposition : La famille de structures presque-complexes J_s est explicitement donnée en chaque $(v,\alpha) \in T_{(A,\alpha')}(T^*\mathcal{A})$ par :

$$J_s|_{(A,\alpha')}(v,\alpha) = (\alpha^g - s\tilde{H}_f|_A(v), v^\flat + sH_f|_A(\alpha^g - s\tilde{H}_f|_A(v), \,\cdot\,)) \in T^*_{(A,\alpha')}\mathcal{A}$$

Preuve : En se souvenant que $(\phi_H^s)_*|_{(A,\alpha')}(v,\alpha) = (v, \alpha - sH_f|_A(v,\cdot)) \in T_{\phi_H^s(A,\alpha')}(T^*\mathcal{A})$, on calcule directement :

$$\begin{aligned} J_s|_{(A,\alpha')}(v,\alpha) &= (\phi_H^{-s})_* \circ J \circ (\phi_H^s)_*|_{(A,\alpha')}(v,\alpha) \\ &= (\phi_H^{-s})_* \circ J|_{\phi_H^s(A,\alpha')}(v, \alpha - sH_f|_A(v,\cdot)) \\ &= (\phi_H^{-s})_*|_{\phi_H^s(A,\alpha')}(\alpha^g - s\tilde{H}_f|_A(v), v^\flat) \\ &= (\alpha^g - s\tilde{H}_f|_A(v), v^\flat + sH_f|_A(\alpha^g - s\tilde{H}_f|_A(v),\cdot)) \in T^*_{(A,\alpha')}\mathcal{A} \end{aligned}$$

□

Définition : Considérons la surface $u : [0,1]\times\mathbb{R} \to T^*\mathcal{A}$ donnée par :

$$u(s,t) := \phi_H^{-s}(A_t, 0) = (A_t, s(\mathrm{d}f)|_{A_t}), \forall (s,t) \in [0,1]\times\mathbb{R}$$

Remarque : La surface $u(s,t)$ vérifie $\lim_{t\to\pm\infty} u(s,t) = (A^\pm, 0)$ où $A^\pm := \lim_{t\to\pm\infty} A_t \in \mathrm{crit}(f)$. Elle vérifie aussi $u(0,t) \in \Gamma_0$ et $u(1,t) \in \Gamma_{\mathrm{d}f}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Elle a donc des conditions aux bords lagrangiennes et relie asymptotiquement deux points critiques de f (i.e. deux points d'intersections lagrangiens des graphes lagrangiens Γ_0 et $\Gamma_{\mathrm{d}f}$).

Définition : $\overline{\partial}_\pm u := u^{(s)} \pm J_s u^{(t)}$.

Remarque : Floer prend plutôt $\overline{\partial} u = u^{(s)} + J_t u^{(t)}$ (car mes $(s,t) \in [0,1]\times\mathbb{R}$ sont permutés par rapport à Floer $(s,t) \in \mathbb{R}\times[0,1]$).

Proposition : $A_t \pm (\nabla^g f)(A_t) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{\partial} u = 0$.

Preuve : Soit A_t une courbe en $\mathcal{A}$ et $u(s,t) := \phi_H^{-s}(A_t, 0)$ une surface en $T^*\mathcal{A}$. Alors :

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_\pm u &= u^{(s)} \pm J_s u^{(t)} \\ &= (\phi_H^{-s}(A_t,0))^{(s)} \pm (\phi_H^{-s})_* \circ J \circ (\phi_H^s)_* (\phi_H^{-s}(A_t,0))^{(t)} \\ &= -X_H \circ (\phi_H^{-s}(A_t,0)) \pm (\phi_H^{-s})_* \circ J \circ (\phi_H^s)_*(\phi_H^{-s})_*(\dot{A}_t, 0) \\ &= -X_H \circ (A_t, s(\mathrm{d}f)|_{A_t}) \pm (\phi_H^{-s})_* \circ J \circ (\dot{A}_t, 0) \\ &= -(0, -(\mathrm{d}f)|_{A_t}) \pm (\phi_H^{-s})_* \circ (0, (\dot{A}_t)^\flat) \\ &= (0, (\mathrm{d}f)|_{A_t}) \pm (\phi_H^{-s})_* \circ (0, (\dot{A}_t)^\flat) \\ &= (0, (\mathrm{d}f)|_{A_t}) \pm (0, (\dot{A}_t)^\flat) \\ &= (0, (\mathrm{d}f)|_{A_t} \pm (\dot{A}_t)^\flat) \end{aligned}$$

En musicalisant le dernier terme, on remarque que :

$$\overline{\partial}_\pm u = 0 \iff A_t \pm (\nabla^g f)(A_t) = 0$$

□

26.4 Bonus :

La linéarisation de l'éq. de courbes gradient est

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tau_t = \tilde{H}_f|_{A_t}\tau_t$$

La linéarisation de l'éq. de CR est : quoi ? Considérons une perturbation de $u(s,t)$, i.e. un $\tau_{s,t}$ vectoriel le long de $u(s,t)$ (i.e. une section de $u^*(TM)$). Soit u_λ une famille de solutions de l'éq. de CR t.q. $u_0 = u$. On a $\tau_{s,t}$ qui est $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} u_\lambda(s,t) = \tau_{s,t}$. Alors en dérivant l'équation de CR $u^{(s)} + Ju^{(t)} = 0$ (pour J constant) p.r. à λ en $\lambda = 0$ on trouve :

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} (u_\lambda^{(s)} + Ju_\lambda^{(t)}) = \tau_{s,t}^{(s)} + J\tau_{s,t}^{(t)}$$

Donc

$$\tau_{s,t}^{(s)} + J\tau_{s,t}^{(t)} = 0$$

est la linéarisation de l'éq. CR. Et là je veux comparer la dimension du noyau de l'opérateur linéarisé de CR et celui de l'opérateur linéarisé de courbes gradient.

Remarque : L'aire symplectique de la courbe J_s-holomorphe $u(s,t) = (A_t, s\mathrm{d}f|_{A_t})$ où A_t est une courbe gradient de f (et qui est bordée par Γ_0 et $\Gamma_{\mathrm{d}f}$) et de toute autre surface J-holom. u' ayant bords en Γ_0 et $\Gamma_{\mathrm{d}f}$ est la même ! En effet, la fermeture de ω et le thm. de Stokes nous dit que si on déplace u à u' les aires sympl. seront les mêmes car Γ_0 et $\Gamma_{\mathrm{d}f}$ sont lagrangiennes ! En effet, u collé à une surface sur Γ_0 collé à u' collé à une surface en $\Gamma_{\mathrm{d}f}$ collé à u donne une sphère S^2 qui est forcément d'aire symplectique nulle car S^2 s'homotope à un point car on est en $M = T^*\mathcal{A}$ qui a groupe d'homotopie $\pi_2(M)$ trivial (remarquons que Floer a montré que l'homologie de Morse = homologie lagrangienne dans le cas π_2 nul).

Proposition : Soient $A^{\pm} := \lim_{t\to\pm\infty} A_t$. Alors l'aire symplectique de $u(s,t) := \phi_H^{-s}(A_t, 0) = (A_t, s(\mathrm{d}f)|_{A_t})$ est donnée par :

$$\omega(u) = f(A^+) - f(A^-)$$

Preuve : (*première preuve*) En utilisant les faits suivants :

1. conditions aux bords lagrangiennes de u
2. $\theta_{\mathrm{can}}|_{\Gamma_0} = 0 \circ \pi_* = 0$
3. $(\mathrm{d}f)^*\theta_{\mathrm{can}} = \mathrm{d}f$ (car θ_{can} est la 1-forme tautologique)
4. f est continue (car C^∞)

on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\omega(u) &= \int_{u([0,1]\times\mathbb{R})} \mathrm{d}\theta_{\mathrm{can}} \\
&= \int_{\partial u([0,1]\times\mathbb{R})} \theta_{\mathrm{can}} \\
&= \int_{u(\{1\}\times\mathbb{R}) \,\sqcup\, u(\{0\}\times\mathbb{R})} \theta_{\mathrm{can}} \\
&= \int_{u(\{1\}\times\mathbb{R})\subset\Gamma_{\mathrm{d}f}} \theta_{\mathrm{can}} - \int_{u(\{0\}\times\mathbb{R})\subset\Gamma_0} \theta_{\mathrm{can}} \\
&= \int_{u(\{1\}\times\mathbb{R})\subset\Gamma_{\mathrm{d}f}} \theta_{\mathrm{can}} \\
&= \int_{A_{\mathbb{R}}} (\mathrm{d}f)^*\theta_{\mathrm{can}} \\
&= \int_{A_{\mathbb{R}}} \mathrm{d}f \\
&= \lim_{t\to+\infty} f(A_t) - \lim_{t\to-\infty} f(A_t) \\
&= f\left(\lim_{t\to+\infty} A_t\right) - f\left(\lim_{t\to-\infty} A_t\right) \\
&= f(A^+) - f(A^-)
\end{aligned}$$

□

Preuve : *(seconde preuve)* En utilisant les faits suivants :

1. $u(s,t) = (A_t, s(\mathrm{d}f)|_{A_t})$

2. $u(s,t)^{(s)} = (0, (\mathrm{d}f)|_{A_t})$
3. $u(s,t)^{(t)} = (\dot{A}_t, sH_f|_{A_t}(\dot{A}, \cdot))$
4. $\omega((v_1,\alpha_1),(v_2,\alpha_2)) = \alpha_1(v_2) - \alpha_2(v_1)$

on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\omega(u) &= \int_{u([0,1]\times\mathbb{R})} \omega \\
&= \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} u^*\omega \\
&= \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \omega(u(s,t)^{(s)}, u(s,t)^{(t)})\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \omega((0,(\mathrm{d}f)|_{A_t}), (\dot{A}_t, sH_f|_{A_t}(\dot{A}, \cdot)))\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \big((\mathrm{d}f)|_{A_t}(\dot{A}_t) - H_f|_{A_t}(\dot{A}, 0)\big)\,\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} (\mathrm{d}f)|_{A_t}(\dot{A}_t)\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{d}f)|_{A_t}(\dot{A}_t)\mathrm{d}t \\
&= f(A^+) - f(A^-)
\end{aligned}$$

□

Remarque : : Pour $f = S_{\mathrm{CS}}$, on remarque alors que l'aire de courbes J-holomorphes correspondants à courbes gradient de CS (i.e. instantons) est donnée par $S_{\mathrm{CS}}(A^+) - S_{\mathrm{CS}}(A^-)$ et donc par la classe de Pontrjagin $\int_X F_A \wedge^\kappa F_A$ et donc (car instanton) par l'énergie de Yang-Mills $S_{\mathrm{YM}}(A)$! ! ! (du moins dans le cas $\psi = 0$ il me semble).

POUR LA SUITE : montrer que la suite de ce que fait Floer dans son (1989,*Witten's complex...*) pour bien avoir un isomorphisme entre l'homologie de Morse et l'homologie de Floer lagrangienne.

27 Analyse fonctionnelle et principe de moindre action :

27.1 Introduction :

Le but de cette section est de bien poser les bases d'analyse fonctionnelle pour bien poser le *principe de moindre action*. En particulier, lorsque je considérerai la *théorie de Yang-Mills à bord*. Je tenterai de relier cette théorie avec une « théorie de Morse » en dimension infinie (i.e. la théorie de Floer pour homologie de Floer d'instantons etc.).

27.2 1-formes différentielles et feuilletage :

Soit $\alpha \in \Omega^1(M;V)$ une 1-forme différentielle sur une variété M à valeurs en un espace vectoriel V.

Proposition : $\xi := \ker\alpha$ est intégrable si et seulement si $(\mathrm{d}\alpha)|_\xi = 0$.

Preuve : Il suffit de se souvenir que pour $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ on a l'identité

$$(\mathrm{d}\alpha)(X_1, X_2) = X_1\alpha(X_2) - X_2\alpha(X_1) - \alpha([X_1, X_2])$$

$(\Rightarrow)$: Supposons ξ intégrable. Soient $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M;\xi)$, i.e. champs vectoriels sur M reposant en la distribution ξ, quelconques. Puisque ξ est intégrable, on a $[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M;\xi)$. Donc $X_1, X_2, [X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(M;\xi)$. L'égalité $(\mathrm{d}\alpha)|_\xi = 0$ découle directement de :

$$(\mathrm{d}\alpha)(X_1, X_2) = X_1\alpha(X_2) - X_2\alpha(X_1) - \alpha([X_1, X_2]) = X_1(0) - X_2(0) - 0 = 0$$

$(\Leftarrow)$: Supposons $(\mathrm{d}\alpha)|_\xi = 0$. Soient $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M;\xi)$ quelconques. Alors l'égalité $(\mathrm{d}\alpha)(X_1, X_2) = X_1\alpha(X_2) - X_2\alpha(X_1) - \alpha([X_1, X_2])$ implique directement $0 = 0 - 00\alpha([X_1, X_2])$. D'où $[X_1, X_2]$ repose en $\ker\alpha$, i.e. en ξ. D'où ξ intégrable. □

Corollaire : Si $\mathrm{d}\alpha = 0$ alors $\xi = \ker\alpha$ est intégrable.

Remarque : Si α est non seulement fermée mais exacte, les feuilles du feuilletage de ξ sont les courbes de niveaux d'un $f \in C^\infty(M;V)$ quelconque vérifiant $\alpha = \mathrm{d}f$.

27.3 Théorie de Morse sur un espace affine :

Soit $f \in C^\infty(M;\mathbb{R})$ une fonction lisse réelle sur un espace affine (M,g) muni d'une métrique riemannienne constante (i.e. invariante par translations) qui est donc plate.

Proposition : Le tenseur (affine) hessien H_f de f s'écrit en coordonnées affines comme :

$$H_f = (\partial_i\partial_j f)\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

Preuve : Découle de la formule

$$H_f|_U = \left(\partial_i\partial_j f - \Gamma^k_{i,j}\partial_k f\right)\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

pour $\Gamma^k_{i,j} = 0$ car g est constante. □

Remarque : On peut alors écrire plus simplement :

$$H_f|_x(X_x,Y_x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x+sX_x+tY_x) \quad \text{pour tout} \quad X_x,Y_x \in T_xM$$

Remarque : H_f est un *tenseur* bien défini au sens affine ! En effet, il est géométriquement bien défini sous changements de coordonnées affines. En effet, donnons à M affine des coordonnées affines $(x^1,...,x^n)$. Tout autre système de coordonnées affines s'écrit $(y^1,...,y^n)$ pour $y^j = R^j_i x^i + v^j$ pour $R \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ et $v^j \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, $\mathrm{d}y^j = R^j_i \mathrm{d}x^i$ et on montre directement que le tenseur affine hessien H_f est bien défini :

$$\begin{aligned}
H_f &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} f\right) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\right) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial y^k} R^k_j\right) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \\
&= \frac{\partial}{\partial y^k}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \mathrm{d}x^i \otimes (R^k_j \mathrm{d}x^j) \\
&= \frac{\partial}{\partial y^k}\left(\frac{\partial f}{\partial y^l}\frac{\partial y^l}{\partial x^i}\right) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}y^k \\
&= \frac{\partial}{\partial y^k}\left(\frac{\partial f}{\partial y^l} R^l_i\right) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}y^k \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial}{\partial y^k} f\right) (R^l_i \mathrm{d}x^i) \otimes \mathrm{d}y^k \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y^l}\frac{\partial}{\partial y^k} f\right) \mathrm{d}y^l \otimes \mathrm{d}y^k \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^j} f\right) \mathrm{d}y^i \otimes \mathrm{d}y^j
\end{aligned}$$

Le changement de coordonnées affines laisse donc invariant la manière d'exprimer H_f. □

Remarque : Voici une autre manière équivalence de voir les choses. Soient $X_x, Y_x \in T_x M$. On pose deux champs vectoriels constants $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ par $X|_x := X_x$, $Y|_x := Y_x$. Puisqu'ils sont constants il commutent, i.e. $[X, Y] = 0$. Il suit que

$$H_f|_x(X_x, Y_x) = (XYf)|_x = (YXf)|_x$$

Remarque : Tout comme H_f est un tenseur affine (bilinéaire symétrique), l'opérateur $\tilde{H}_f$ est un tenseur affine (g-auto-adjoint).

Remarque : En théorie de Yang-Mills à bord, on ne considère pas tant les points critiques de S_{YM} que les points où S_{YM} est laissée inchangée par variations infinitésimales nulles sur le bord. Cette théorie plus générale se fait à l'aide d'une distribution $\xi = \ker\alpha$. Ce que je développe à l'instant.

27.4 Points critiques et pseudo-critiques sur un espace affine :

Soit $S : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse sur un espace affine $\mathcal{A}$ modélisé sur un espace vectoriel V. Soit W un autre espace vectoriel. Considérons une 1-forme différentielle $\alpha \in \Omega^1(M; W)$ sur $\mathcal{A}$ à valeurs vectorielles. Elle induit une distribution

$$\xi := \ker\alpha \subset T\mathcal{A}$$

sur $\mathcal{A}$.

Définition : Les *points critiques* de S sont les $A \in \mathcal{A}$ tels que $\mathrm{d}S|_A = 0$. Les *points pseudo-critiques* sont les $A \in \mathcal{A}$ tels que $\xi|_A \subset \ker \mathrm{d}S|_A$. On dénote l'ensemble des points critiques de S par $\mathrm{crit}(S) \subset \mathcal{A}$. On dénote l'ensemble des points pseudo-critiques de S par $\mathrm{crit}(S, \alpha) \subset \mathcal{A}$.

Remarque : $\mathrm{crit}(S, \alpha)$ est relié à la théorie de Morse-Bott : les points critiques sont remplacés par des variétés critiques. REVENIR LÀ-DESSUS.

Proposition : $\mathrm{crit}(S) \subset \mathrm{crit}(S, \alpha)$. Si de plus $\alpha = 0$, alors $\mathrm{crit}(S, \alpha) = \mathrm{crit}(S)$.

Preuve : Soit $A \in \mathrm{crit}(S)$. Alors $\xi_A \subset T_A\mathcal{A} = \ker \mathrm{d}S|_A$, i.e. $\xi_A \subset \ker \mathrm{d}S|_A$. D'où $A \in \mathrm{crit}(S, \alpha)$. Ensuite, si $\alpha = 0$, alors $\xi = T\mathcal{A}$. □

Remarque : Donnons à $\mathcal{A}$ une métrique riemannienne constante g. Considérons la proposition suivante :

Proposition : Soient deux sous-espaces vectoriels $V_1, V_2 \subset V$ d'un espace vectoriel V muni d'un produit scalaire g. Alors :

$$V_1 \subset V_2 \iff V_2^\perp \subset V_1^\perp$$

Preuve : ($\Rightarrow$:) Supposons $V_1 \subset V_2$. Soit $v \in V_2^\perp$ quelconque non nul. Puisque g est non dégénérée, ceci implique $v \notin V_2$. Mais V_1 est un sous-ensemble de V_2

donc $v \notin V_1$. Puisque g est non dégénérée, ceci implique $v \in V_1^\perp$. Ce qu'on voulait démontrer. ($\Leftarrow$:) Supposons $V_2^\perp \subset V_1^\perp$. Soit $v \in \mathcal{V}_1$ quelconque. Puisque g est non dégénérée, il suit que $v \notin V_1^\perp$. Mais $V_2^\perp$ est un sous-ensemble de $V_1^\perp$. Donc $v \notin V_2^\perp$. Mais g est non dégénérée. Donc $v \in V_2$. Ce qu'on voulait démontrer. □

Proposition : $\operatorname{crit}(S,\alpha) = \{A \in \mathcal{A} : \nabla S|_A \in \xi_A^\perp\}$.

Preuve : Souvenons-nous que le le gradient de S est défini par $\nabla S := (\mathrm{d}S)^g$, i.e. par g-musicalité dièse de $\mathrm{d}S$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\operatorname{crit}(S,\alpha) &= \{A \in \mathcal{A} : \xi_A \subset \ker \mathrm{d}S|_A\} \\
&= \{A \in \mathcal{A} : \mathrm{d}S|_A(v) = 0, \forall v \in \xi_A\} \\
&= \{A \in \mathcal{A} : g((\mathrm{d}S|_A)^g, v) = 0, \forall v \in \xi_A\} \\
&= \{A \in \mathcal{A} : g(\nabla S|_A, v) = 0, \forall v \in \xi_A\} \\
&= \{A \in \mathcal{A} : \nabla S|_A \in \xi_A^\perp\}
\end{aligned}$$

□

Remarque : Ainsi, l'étude des points pseudo-critiques peut se ramener à chercher là où le gradient de S repose en la distribution $\xi^\perp$.

Remarque : Le cas qui nous intéressera (Yang-Mills) est celui où ξ est une distribution intégrable provenant de $\alpha = \mathrm{d}f$ exacte. Les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}$ de la distribution $\xi = \ker \alpha$ sont alors les courbes de niveaux de $f : \mathcal{A} \to V$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ considéré ne sera pas un feuilletage quelconque. Ce sera un feuilletage affine ! i.e. les feuilles sont des sous-espaces affines de l'espace affine $\mathcal{A}$. De même, la distribution $\xi^\perp$ induit un feuilletage affine $\mathcal{F}^\perp$. La recherche de points pseudo-critiques de S se ramène alors à la recherche de points où ∇S est tangent à une feuille affine du feuilletage affine $\mathcal{F}^\perp$.

Remarque : Avant d'aller plus loin, il importe de remarquer ceci : l'espace affine de connexions $\mathcal{A}_X$ est de dimension infinie. En dimension infinie il faut faire attention. En effet, le perpendiculaire du perpendiculaire d'un sous-espace vectoriel n'est pas toujours égal à ce même espace vectoriel ! Par exemple : considérons l'espace vectoriel $V = C^\infty([0,1];\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $g(f_1, f_2) = \int_0^1 f_1(x) f_2(x) \mathrm{d}x$. Considérons le sous-espace vectoriel $W := \{f \in V | f(0) = f(1) = 0\} \subset V$. Dans ce cas $W^\perp = \{0\}$. En effet soit $f_1 \in W^\perp$ quelconque. Il y a deux possibilités : (1) f_1 n'est pas uniformément nulle sur $]0,1[$ et (2) f_1 est uniformément nulle sur $]0,1[$. Supposons (1) vrai. Dans ce cas, il existe $f_2 \in W$ tel que $g(f_1, f_2) \neq 0$. Ce qui contredit le fait que $f_1 \in W^\perp$. Donc le cas (1) est faux. Il suit que f_1 est uniformément nulle sur $]0,1[$. Mais f_1 est lisse. Donc $f_1(0) = f_1(1) = 0$. Donc $f_1(x) = 0$ sur tout $[0,1]$. Puisque f_1 était quelconque en $W^\perp$, il suit que $W^\perp = \{0\}$. Donc $(W^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = V$. D'où $V \neq W$ et $V = (W^\perp)^\perp$. Il suit que $(W^\perp)^\perp \neq W$. Ce qui est contre-intuitif. Où est le problème ? Il semblerait que le problème vienne du fait que $V = C^\infty([0,1];\mathbb{R})$ n'est pas un espace de Hilbert, i.e. qu'il n'est pas complet.

Remarque : La dernière remarque nous mène à devoir développer la théorie de l'analyse fonctionnelle. En particulier, l'espace de Hilbert à considérer sera la complétion de l'espace vectoriel V sur lequel est modélisé notre espace affine de connexions.

Remarque : EN FAIT : j'ai ajouté une section sur l'analyse fonctionnelle au tout début du document. Bref, mettre les choses ici à jour. TO DO ! ! !

27.5 Principe de moindre action :

Donné une fonctionnelle, le principe de moindre action dit qu'on considères les extrémales d'une fonctionnelle d'action. Ces extrémales sont obtenues en considérant les variations infinitésimales nulles aux bords qui laissent invariante la fonctionnelle d'action. C'est-à-dire, on considère les points pseudo-critiques de la fonctionnelle. Ici la distribution ξ sur $\mathcal{A}_X$ est les $\tau^\sharp$ tels que τ est nul sur les bords de la variété X considérée. Les équations d'Euler-Lagrange apparaissent justement quand on considère les variations par des τ en ξ (i.e. nulles sur le bord).

Remarque : Pour plus de détails, voir le pdf "Fonct HJ" sur la fonctionnelle d'Hamilton-Jacobi.

Remarque : Ici je n'ai nullement parlé d'analyse fonctionnelle. TO DO ! ! !

Quatrième partie

Théorie de Yang-Mills et de Chern-Simons

28 Théorie de Yang-Mills :

28.1 Introduction :

Le but de cette section est de développer la théorie de Yang-Mills sur une 4-variété riemannienne (avec ou sans bord) orientable (X^4, g) munie d'un SU(2)-fibré principal $P_X \to X$.

28.2 Forme bilinéaire κ pour le fibré $\mathrm{Ad}P_X$:

Rappel : La *forme de Killing* sur $\mathfrak{su}(2)$ est :

$$\begin{aligned} K : \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) &\to \mathbb{R} \\ (\xi_1, \xi_2) &\mapsto \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\xi_1} \circ \mathrm{ad}_{\xi_2}) \end{aligned}$$

Proposition : Le fibré $\mathrm{Ad}P_X$ est naturellement muni d'une forme bilinéaire non dégénérée définie positive

$$\kappa \in \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_X^* \otimes \mathrm{Ad}P_X^*)$$

Preuve : Considérons l'application

$$\kappa^\sharp : P_X \to \mathfrak{su}(2)^* \otimes \mathfrak{su}(2)^*; \quad \kappa^\sharp := -K$$

Puisque K est non dégénérée (car $\mathfrak{su}(2)$ semi-simple) et définie négative, alors $\kappa^\sharp = -K$ est non dégénérée et définie positive. Puisque K est Ad-invariante, alors $\kappa^\sharp$ aussi et est donc une 0-forme basique, i.e. :

$$\kappa^\sharp \in \Omega^0_{\mathrm{Ad}^* \otimes \mathrm{Ad}^*, \mathrm{hor}}(P_X; \mathfrak{su}(2)^* \otimes \mathfrak{su}(2)^*)$$

Cette 0-forme basique descend donc à une section

$$\kappa := (\kappa^\sharp)_\sharp \in \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_X^* \otimes \mathrm{Ad}P_X^*)$$

qui est aussi bilinéaire non dégénérée et définie positive. □

Proposition : $\mathrm{d}_A \kappa = 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}_X$.

Preuve : $\mathrm{d}^A \kappa^\sharp = (\mathrm{d}\kappa^\sharp)_{\mathrm{hor}} = (\mathrm{d}(-K))_{\mathrm{hor}} = (0)_{\mathrm{hor}} = 0$. □

28.3 Fonctionnelle de Yang-Mills :

Définition : La *fonctionnelle de Yang-Mills* est définie par

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{YM}} : \mathcal{A}_X &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \frac{1}{2}(F_A, F_A)_{g,\kappa} = \frac{1}{2}\int_X F_A \wedge^\kappa \star_g F_A \end{aligned}$$

Remarque : J'écrirai souvent plus simplement $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_g$ au lieu de $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{g,\kappa}$ puisque κ est *assez* canonique et vérifie $\mathrm{d}_A\kappa = 0$ pour toute connexion $A \in \mathcal{A}_X$.

Remarque : κ est défini positif et défini par $\kappa^\sharp = -K$ où K est la forme de Killing (qui est définie négative sur $\mathfrak{su}(2)$). Il suit que $\forall A \in \mathcal{A}, S_{\mathrm{YM}}(A) \geq 0$. Si le fibré P est trivial et que s_α est une section trivialisante globale, on a alors :

$$S_{\mathrm{YM}}(A) = \frac{1}{2}\int_X (F_A)_\alpha \wedge^{\kappa_\alpha} \star_g (F_A)_\alpha = -2\int_X \mathrm{Tr}((F_A)_\alpha(\wedge, \circ) \star_g (F_A)_\alpha)$$

Proposition : La fonctionnelle de Yang-Mills S_{YM} est invariante sous l'action du groupe de jauge $\mathcal{G}_X$.

Preuve : Puisque $F_A \in \Omega^2(X; \mathrm{Ad}P_X)$, on a vu plus haut que la courbure se transforme comme $F_{(\Lambda^{-1})^*A} = \mathrm{Ad}_\lambda \circ F_A$ pour l'action à gauche par $\Lambda \in \mathcal{G}_X$. Mais κ est induit par la forme de Killing K qui est Ad-invariante. Donc la fonctionnelle de Yang-Mills S_{YM} est invariante sous le groupe de jauge $\mathcal{G}_X$. □

28.4 Variations de la courbure :

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}_X$, $\tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}_X$ et $t \in \mathbb{R}$ un paramètre réel. Alors :

$$F^\sharp_{A+t\tau^\sharp} = F^\sharp_A + t\mathrm{d}^A\tau^\sharp + \frac{t^2}{2}[\tau^\sharp \wedge \tau^\sharp]$$

Preuve : En se souvenant de l'égalité $F_A^\sharp = \mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A \wedge A]$, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
F^\sharp_{A+t\tau^\sharp} &= \mathrm{d}(A+t\tau^\sharp) + \frac{1}{2}[(A+t\tau^\sharp)\wedge(A+t\tau^\sharp)] \\
&= \mathrm{d}A + t\mathrm{d}\tau^\sharp + \frac{1}{2}[A\wedge A] + \frac{t}{2}[A\wedge\tau^\sharp] + \frac{t}{2}[\tau^\sharp\wedge A] + \frac{t^2}{2}[\tau^\sharp\wedge\tau^\sharp] \\
&= F_A + t\mathrm{d}\tau^\sharp + t[A\wedge\tau^\sharp] + \frac{t^2}{2}[\tau^\sharp\wedge\tau^\sharp] \\
&= F_A + t\mathrm{d}^A\tau^\sharp + \frac{t^2}{2}[\tau^\sharp\wedge\tau^\sharp]
\end{aligned}$$

□

Corollaire : Soit $A \in \mathcal{A}_X$, $\tau \in \Omega^1(X;\mathrm{Ad}P_X)$ et $t \in \mathbb{R}$ un paramètre réel. Alors :

$$F_{A+t\tau^\sharp} = F_A + t\mathrm{d}_A\tau + \frac{t^2}{2}[\tau\wedge\tau]$$

28.5 Différentielle dS_{YM} de la fonctionnelle de YM :

Proposition : La différentielle de la fonctionnelle de Yang-Mills est donnée en tout $A \in \mathcal{A}_X$ par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S_{\mathrm{YM}}|_A : T_A\mathcal{A}_X &\to \mathbb{R} \\
\tau^\sharp &\mapsto \mathrm{d}S_{\mathrm{YM}}|_A(\tau^\sharp) = (\tau, \delta_A F_A)_g + \int_{\partial X} \tau \wedge^\kappa \star_g F_A
\end{aligned}$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S_{\mathrm{YM}}|_A(\tau^\sharp) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} S_{\mathrm{YM}}(A+\lambda\tau^\sharp) \\
&= \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} (F_{A+\lambda\tau^\sharp}, F_{A+\lambda\tau^\sharp})_g \\
&= \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} (F_A+\lambda\mathrm{d}_A\tau+\frac{\lambda^2}{2}[\tau\wedge\tau], F_A+\lambda\mathrm{d}_A\tau+\frac{\lambda^2}{2}[\tau\wedge\tau])_g \\
&= \frac{1}{2}\big((\mathrm{d}_A\tau, F_A)_g+(F_A,\mathrm{d}_A\tau)_g\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(2(\mathrm{d}_A\tau, F_A)_g\big) \\
&= (\mathrm{d}_A\tau, F_A)_g \\
&= (\tau, \delta_A F_A)_g + \int_{\partial X}\tau\wedge^\kappa \star_g F_A
\end{aligned}$$

□

Proposition : $(F_A,[F_A,\upsilon])_{g,\kappa}=0,\ \forall A\in\mathcal{A}_X,\ \forall\upsilon\in\Omega^0(X;\mathrm{Ad}P_X)$.

Preuve : Il suffit de se souvenir que $K([\xi_1,\xi_2],\xi_3)=K(\xi_1,[\xi_2,\xi_3])$ pour tout $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathfrak{g}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
(F_A,[F_A,\upsilon])_{g,\kappa} &= \int_X F_A\wedge^\kappa\star_g([F_A,\upsilon]) \\
&= \int_X F_A\wedge^\kappa([\star_g F_A,\upsilon]) \\
&= -\int_X F_A\wedge^\kappa([\upsilon,\star_g F_A]) \\
&= -\int_X [F_A,\upsilon]\wedge^\kappa\star_g F_A \\
&= -([F_A,\upsilon],F_A)_{g,\kappa} \\
&= -(F_A,[F_A,\upsilon])_{g,\kappa}
\end{aligned}$$

D'où $(F_A,[F_A,\upsilon])_{g,\kappa}=-(F_A,[F_A,\upsilon])_{g,\kappa}$. D'où $(F_A,[F_A,\upsilon])_{g,\kappa}=0$. □

Remarque : La dernière proposition nous donne une seconde preuve du fait que S_{YM} est $\mathcal{G}_X$-invariante en termes de transformations de jauges infinitésimales :

Preuve : *(preuve alternative de la $\mathcal{G}_X$-invariance de S_{YM})* Soit $A \in \mathcal{A}_X$. Soit Λ_t un groupe de transformations de jauges à 1-paramètre. Soit $A^{\Lambda_t} := (\Lambda^{-1})^* A$ donné par l'action à gauche de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{A}$. Alors $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} A^{\Lambda_t} = -\mathrm{d}^A \upsilon^\sharp$ pour $\upsilon^\sharp = A(\Upsilon)$ où $\Upsilon := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Lambda_t$. Pour υ quelconque, on montre alors que S_{YM} est $\mathcal{G}_X$-invariante d'un point de vue infinitésimal :

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} S_{\text{YM}}(A) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} S_{\text{YM}}(A^{\Lambda_t}) \\
&= \mathrm{d}S_{\text{YM}}|_A \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} A^{\Lambda_t} \right) \\
&= (F_A, \mathrm{d}_A(-\mathrm{d}_A \upsilon))_{g,\kappa} \\
&= -(F_A, (\mathrm{d}_A)^2 \upsilon)_{g,\kappa} \\
&= -(F_A, [F_A, \upsilon])_{g,\kappa} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

28.6 Hessien $H_{S_{\text{YM}}}$ et $\tilde{H}_{S_{\text{YM}}}$:

Puisque S_{YM} est définie sur un espace affine, on peut définir le *tenseur affine hessien* $H_{S_{\text{YM}}} \in \Gamma^\infty(\odot^2 T^* \mathcal{A}_X)$.

Proposition : Le tenseur affine hessien $H_{S_{\text{YM}}} \in \Gamma^\infty(\odot^2 T^* \mathcal{A}_X)$ de $S_{\text{YM}} \in C^\infty(\mathcal{A}_X; \mathbb{R})$ est donné en $A \in \mathcal{A}_X$ par :

$$H_{S_{\text{YM}}}|_A(\tau_1^\sharp, \tau_1^\sharp) = (\mathrm{d}_A \tau_1, \mathrm{d}_A \tau_2)_g + ([\tau_1 \wedge \tau_2], F_A)$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
H_{S_{\text{YM}}}|_A(\tau_1^\sharp,\tau_1^\sharp) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0}\left(\mathrm{d}S_{\text{YM}}(\tau_1^\sharp)\right)\Big|_{A+s\tau_2^\sharp} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0}(\mathrm{d}_{A+s\tau_2^\sharp}\tau_1, F_{A+s\tau_2^\sharp})_g \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0}(\mathrm{d}_A\tau_1 + s[\tau_2\wedge\tau_1], F_A + s\mathrm{d}_A\tau_2 + \frac{s^2}{2}[\tau_2\wedge\tau_2])_g \\
&= (\mathrm{d}_A\tau_1, \mathrm{d}_A\tau_2)_g + ([\tau_2\wedge\tau_1], F_A)_g \\
&= (\mathrm{d}_A\tau_1, \mathrm{d}_A\tau_2)_g + ([\tau_1\wedge\tau_2], F_A)_g
\end{aligned}$$

□

Remarque : Il convient alors de se demander à quoi ressemble $\tilde{H}_{S_{\text{YM}}}$. Souvenons-nous qu'il est défini implicitement par :

$$H_{S_{\text{YM}}}(\cdot,\cdot) = (\tilde{H}_{S_{\text{YM}}}(\cdot),\cdot)_g$$

Si nous n'avions pas le terme $([\tau_1\wedge\tau_2], F_A)_g$ et si $\partial X = \emptyset$, on trouverait directement $\delta_A\mathrm{d}_A$ pour $\tilde{H}_{S_{\text{YM}}}|_A$. Bref, on ne peut pas avoir $\tilde{H}_{S_{\text{YM}}}$ explicitement. Il faudra donc travailler avec $H_{S_{\text{YM}}}$.

28.7 Les dérivées ${S_{\text{YM}}}^{(k)}$:

Notation : Écrivons ${S_{\text{YM}}}^{(k)} \in \Gamma^\infty(\odot^k T^*\mathcal{A})$ défini pour tout $k \in \mathbb{N} := \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0,1,2,...\}$ par :

$${S_{\text{YM}}}^{(k)}|_A(\tau_1^\sharp,...,\tau_k^\sharp) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_1}\bigg|_{s_1=0}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_k}\bigg|_{s_k=0} S_{\text{YM}}(A+s_1\tau_1^\sharp+\cdots+s_k\tau_k^\sharp)$$

Proposition : Les dérivées ${S_{\mathrm{YM}}}^{(k)}$ de S_{YM} sont données par :

$$\begin{aligned}
{S_{\mathrm{YM}}}^{(0)}(A) &= S_{\mathrm{YM}}(A) = \frac{1}{2}(F_A, F_A)_g \\
{S_{\mathrm{YM}}}^{(1)}|_A(\tau^\sharp) &= \mathrm{d}S_{\mathrm{YM}}|_A(\tau^\sharp) = (F_A, \mathrm{d}_A\tau)_g \\
{S_{\mathrm{YM}}}^{(2)}|_A(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp) &= H_{S_{\mathrm{YM}}}|_A(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp) = (\mathrm{d}_A\tau_1, \mathrm{d}_A\tau_2)_g + ([\tau_1 \wedge \tau_2], F_A)_g \\
{S_{\mathrm{YM}}}^{(3)}|_A(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp, \tau_3^\sharp) &= (\mathrm{d}_A\tau_1, [\tau_2 \wedge \tau_3])_g + (\mathrm{d}_A\tau_2, [\tau_1 \wedge \tau_3])_g + (\mathrm{d}_A\tau_3, [\tau_1 \wedge \tau_2])_g \\
{S_{\mathrm{YM}}}^{(4)}|_A(\tau_1^\sharp, ..., \tau_4^\sharp) &= ([\tau_1 \wedge \tau_2], [\tau_3 \wedge \tau_4])_g + ([\tau_1 \wedge \tau_3], [\tau_2 \wedge \tau_4])_g + ([\tau_1 \wedge \tau_4], [\tau_2 \wedge \tau_3])_g \\
{S_{\mathrm{YM}}}^{(k)}|_A(\tau_1^\sharp, ..., \tau_k^\sharp) &= 0, \forall k \geq 5
\end{aligned}$$

Preuve : La zéroième première égalité est triviale. La première est déjà calculée. La seconde aussi. Calculons la troisième :

$$\begin{aligned}
{S_{\mathrm{YM}}}^{(3)}|_A(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp, \tau_3^\sharp) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} {S_{\mathrm{YM}}}^{(2)}|_{A+s\tau_1^\sharp}(\tau_2^\sharp, \tau_3^\sharp) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left(\mathrm{d}_{A+s\tau_1^\sharp}\tau_2, \mathrm{d}_{A+s\tau_1^\sharp}\tau_3\right)_g + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left([\tau_2 \wedge \tau_3], F_{A+s\tau_1^\sharp}\right)_g \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (\mathrm{d}_A\tau_2 + s[\tau_1 \wedge \tau_2], \mathrm{d}_A\tau_3 + s[\tau_1 \wedge \tau_3])_g \\
&\quad + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left([\tau_2 \wedge \tau_3], F_A + s\mathrm{d}_A\tau_1 + \frac{1}{2}s^2[\tau_1 \wedge \tau_1]\right)_g \\
&= (\mathrm{d}_A\tau_2, [\tau_1 \wedge \tau_3])_g + ([\tau_1 \wedge \tau_2], \mathrm{d}_A\tau_3)_g + ([\tau_2 \wedge \tau_3], \mathrm{d}_A\tau_1)_g \\
&= (\mathrm{d}_A\tau_1, [\tau_2 \wedge \tau_3])_g + (\mathrm{d}_A\tau_2, [\tau_1 \wedge \tau_3])_g + (\mathrm{d}_A\tau_3, [\tau_1 \wedge \tau_2])_g
\end{aligned}$$

Calculons la quatrième :

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{YM}}{}^{(4)}|_A(\tau_1^\sharp, ..., \tau_4^\sharp) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} S^{(3)}|_{A+s\tau_1^\sharp}(\tau_2^\sharp, \tau_3^\sharp, \tau_4^\sharp) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left(\mathrm{d}_{A+s\tau_1^\sharp}\tau_2, [\tau_3 \wedge \tau_4]\right)_g + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left(\mathrm{d}_{A+s\tau_1^\sharp}\tau_3, [\tau_2 \wedge \tau_4]\right)_g \\
&\quad + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left(\mathrm{d}_{A+s\tau_1^\sharp}\tau_4, [\tau_2 \wedge \tau_3]\right)_g \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (\mathrm{d}_A\tau_2 + s[\tau_1 \wedge \tau_2], [\tau_3 \wedge \tau_4])_g \\
&\quad + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (\mathrm{d}_A\tau_3 + s[\tau_1 \wedge \tau_3], [\tau_2 \wedge \tau_4])_g \\
&\quad + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (\mathrm{d}_A\tau_4 + s[\tau_1 \wedge \tau_4], [\tau_2 \wedge \tau_3])_g \\
&= ([\tau_1 \wedge \tau_2], [\tau_3 \wedge \tau_4])_g + ([\tau_1 \wedge \tau_3], [\tau_2 \wedge \tau_4])_g \\
&\quad + ([\tau_1 \wedge \tau_4], [\tau_2 \wedge \tau_3])_g
\end{aligned}
$$

La dernière égalité découle du fait que $S_{\mathrm{YM}}{}^{(4)}$ est indépendante de A et donc constante sur $\mathcal{A}_X$.

Remarque : La série de Taylor de S_{YM} est précisément :

$$
S_{\mathrm{YM}}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S_{\mathrm{YM}}{}^{(k)}|_{A_0}(\tau^\sharp, ..., \tau^\sharp)
$$

où $\tau^\sharp = A - A_0 \in T_{A_0}\mathcal{A}_X$. Ici la somme se termine à $k = 4$ et les $S_{\mathrm{YM}}{}^k$ sont donnés dans la dernière proposition. Remarquons aussi que cette série de Taylor aurait pu être calculée directement en écrivant :

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{YM}}(A) &= \frac{1}{2}(F_A, F_A)_g \\
&= \frac{1}{2}(F_{A_0+\tau^\sharp}, F_{A_0+\tau^\sharp})_g \\
&= \frac{1}{2}(F_{A_0} + \mathrm{d}_{A_0}\tau + \frac{1}{2}[\tau \wedge \tau], F_{A_0} + \mathrm{d}_{A_0}\tau + \frac{1}{2}[\tau \wedge \tau])_g \\
&= \ldots \\
&= S_{\mathrm{YM}}(A_0) + S_{\mathrm{YM}}{}^{(1)}|_{A_0}(\tau^\sharp) + \frac{1}{2}S_{\mathrm{YM}}{}^{(2)}|_{A_0}(\tau^\sharp, \tau^\sharp) \\
&\quad + \frac{1}{6}S_{\mathrm{YM}}{}^{(3)}|_{A_0}(\tau^\sharp, \tau^\sharp, \tau^\sharp) + \frac{1}{24}S_{\mathrm{YM}}{}^{(4)}|_{A_0}(\tau^\sharp, \tau^\sharp, \tau^\sharp, \tau^\sharp)
\end{aligned}$$

pour :

$$S_{\mathrm{YM}}{}^{(3)}|_{A_0}(\tau^\sharp, \tau^\sharp, \tau^\sharp) = 3(\mathrm{d}_{A_0}\tau, [\tau \wedge \tau])_g$$

$$S_{\mathrm{YM}}{}^{(4)}|_{A_0}(\tau^\sharp, \tau^\sharp, \tau^\sharp, \tau^\sharp) = 3([\tau \wedge \tau], [\tau \wedge \tau])$$

28.8 Équations de Yang-Mills :

Proposition : L'équation d'Euler-Lagrange correspondante à la fonctionnelle de Yang-Mills est

$$\delta_A F_A = 0$$

Preuve : L'équation d'Euler-Lagrange décrit les points pseudo-critiques de S_{YM}, i.e. les $A \in \mathcal{A}_X$ tels que $\xi_A \subset \ker \mathrm{d}S_{\mathrm{YM}}|_A$ pour $\xi_A := \{\tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}_X : \tau|_{\partial X} = 0\} \subset T_A\mathcal{A}_X$. Pour tout $A \in \mathrm{crit}(S_{\mathrm{YM}}, \xi)$ et tout $\tau^\sharp \in \xi$, on a :

$$0 = \mathrm{d}S_{\mathrm{YM}}|_A(\tau^\sharp) = (\tau, \delta_A F_A)_g + \int_{\partial X} \tau \wedge^\kappa \star_g F_A = (\tau, \delta_A F_A)_{g,\kappa}$$

Puisque τ est quelconque en ξ_A et puisque $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_g$ est non dégénérée, l'équation d'Euler-Lagrange de S_{YM} est $\delta_A F_A = 0$. □

Définition : L'équation d'Euler-Lagrange $\delta_A F_A = 0$ de la fonctionnelle de Yang-Mills S_{YM} est dite *équation de Yang-Mills*. Les connexions $A \in \mathcal{A}_X$ vérifiant l'équation de Yang-Mills $\delta_A F_A = 0$ sont dites *connexions de Yang-Mills*. On dénote l'ensemble de ces connexions de Yang-Mills par $\mathcal{A}_X^{\mathrm{YM}}$. C'est-à-dire :

$$\mathcal{A}_X^{\mathrm{YM}} := \mathrm{crit}(S_{\mathrm{YM}}, \xi)$$

Remarque : Il aussi commun de dire que les deux équations $\delta_A F_A = 0$ et $\mathrm{d}_A F_A = 0$ forment *les* équations de Yang-Mills. La seconde identité est trivialement vérifiée : c'est l'équation de Bianchi.

Remarque : Puisque S_{YM} est $\mathcal{G}_X$-invariante, si $A \in \mathcal{A}_X$ est une connexion de Yang-Mills, A^Λ l'est aussi. Ainsi, la $\mathcal{G}_X$-action de groupe sur $\mathcal{A}_X$ envoie $\mathcal{A}_X^{\mathrm{YM}}$ sur lui-même. On peut alors définir le quotient

$$\mathcal{M}_X^{\mathrm{YM}} := \mathcal{A}_X^{\mathrm{YM}} / \mathcal{G}_X$$

parfois dénommé *espace des solutions classiques*.

Définition : Soit $\mathcal{A}_{X,\partial X}^{\mathrm{YM}} := \{A \in \mathcal{A}_X^{\mathrm{YM}} : (\star_g F_A)|_{\partial X} = 0\} \subset \mathcal{A}_X^{\mathrm{YM}}$.

Remarque : Si X est sans bord, $\mathcal{A}_{X,\partial X}^{\mathrm{YM}} = \mathcal{A}_X^{\mathrm{YM}}$.

Remarque : Soit $A \in \mathcal{A}_X^{\mathrm{YM}}$. Bien que $\mathrm{d}S_{\mathrm{YM}}|_A(\tau^\sharp) = 0$ pour tout $\tau^\sharp|_{\partial=0}$, ça n'est pas forcément vrai pour un τ quelconque. Néanmoins, pour tout $A \in \mathcal{A}_{X,\partial X}^{\mathrm{YM}}$ et tout τ (pas forcément nul sur ∂X) on a $\mathrm{d}S_{\mathrm{YM}}|_A(\tau^\sharp) = 0$. C'est-à-dire :

$$\mathcal{A}_{X,\partial X}^{\mathrm{YM}} \subset \mathrm{crit}(S_{\mathrm{YM}}) \subset \mathrm{crit}(S_{\mathrm{YM}}, \xi) = \mathcal{A}_X^{\mathrm{YM}}$$

La question se pose néanmoins à savoir exactement ce que vaut $\mathrm{crit}(S_{\mathrm{YM}})$ si $\partial X \neq \emptyset$.

28.9 Instantons :

Définition : Un *instanton* (resp. *anti-instanton*) est une connexion $A \in \mathcal{A}_X$ d'énergie finie, i.e. $S_{\mathrm{YM}}(A) < +\infty$, dont la courbure est auto-duale (resp. anti-auto-duale), i.e. $\star_g F_A = F_A$ (resp. $\star_g F_A = -F_A$). On dénote l'ensemble des instantons par $\mathcal{A}_X^+$ et celui des anti-instantons par $\mathcal{A}_X^-$.

Proposition : $\mathcal{A}_X^\pm \subset \mathcal{A}_X^{\mathrm{YM}}$.

Preuve : Découle du fait que $\delta_A = (-1)^{nk+n+1} s \star_g \mathrm{d}_A \star_g$. □

Remarque : Dès maintenant, je dirai *instanton* au lieu de *anti-instanton* et oublierai les *véritables instantons auto-duaux*, i.e. me concentrerai sur ceux anti-auto-duaux $A \in \mathcal{A}_X^-$.

Définition : $\mathcal{A}_{X,\partial X}^- := \{A \in \mathcal{A}_X^- | (\star_g F_A)|_{\partial X} = 0\}$.

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}^\pm$. Alors

$$(\star_g F_A)|_{\partial X} = 0 \iff F_A|_{\partial X} = 0$$

Preuve : Découle du fait que $\star_g F_A = -F_A$. □

Proposition : Le groupe de jauge envoie $\mathcal{A}_X^\pm$ en lui-même. De même, le groupe de jauge envoie $\mathcal{A}_{X,\partial X}^\pm$ en lui-même.

Preuve : Montrons d'abord que le groupe de jauge envoie $\mathcal{A}_X^\pm$ en lui-même, c'est-à-dire que $\mathcal{G}_X$ préserve l'équation ASD. Soit $\Lambda \in \mathcal{G}_X$ quelconque. Souvenons-nous que $F_{A^\Lambda} = \mathrm{Ad}_\lambda F_A$ où λ correspond à Λ. Puisque $\star_g$ n'agit que sur l'aspect « forme différentielle » de F_A, il découle la suite de si et seulement si suivante :

$$\star_g F_A = -F_A \iff \star_g (\mathrm{Ad}_\lambda F_A) = \mathrm{Ad}_\lambda F_A \iff \star_g F_{A^\Lambda} = -F_{A^\Lambda}$$

D'où le fait que $\mathcal{G}_X$ envoie $\mathcal{A}_X^\pm$ en lui-même. Ensuite, montrons que $\mathcal{G}_X$ envoie $\mathcal{A}_{X,\partial X}^\pm$ en lui-même. On vient de voir que $\mathcal{G}_X$ préserve l'équation ASD. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{G}_X$ préserve la condition au bord. Ceci découle du fait que $\star_g$ n'agit que sur l'aspect « forme différentielle » de F_A alors que Ad_λ n'agit que sur l'aspect « section de fibré $\mathrm{Ad}P_X$ » de F_A et donc que $\star_g$ et Ad_λ commutent :

$$(\star_g F_{A^\Lambda})|_{\partial X} = (\star_g(\mathrm{Ad}_\lambda F_A))|_{\partial X} = (\mathrm{Ad}_\lambda \star_g F_A)|_{\partial X} = (-\mathrm{Ad}_\lambda F_A)|_{\partial X} = \mathrm{Ad}_\lambda(0)|_{\partial X} = 0$$

□

28.10 Flot de Yang-Mills en dimension 4 :

Considérons la fonctionnelle de Yang-Mills en dimension 4 sur (X^4, g) riemannien orientable :

$$S_{\mathrm{YM}}(A) := \int_X F_A \wedge^\kappa \star_g F_A$$

Proposition : Si X est sans bord, i.e. $\partial X = \emptyset$, alors le champ vectoriel gradient $\nabla S_{\text{YM}} \in \mathfrak{X}(\mathcal{A}_X)$ de S_{YM} est donné en $A \in \mathcal{A}_X$ par :

$$(\nabla S_{\text{YM}})|_A = \delta_A F_A$$

Preuve : Donnons à $\mathcal{A}_X$ la métrique $\hat{g}$ définie en chaque $A \in \mathcal{A}_X$ par :

$$\begin{aligned} \hat{g}|_A : T_A\mathcal{A}_X \times T_A\mathcal{A}_X &\to \mathbb{R} \\ (\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp) &\mapsto \hat{g}(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp) := (\tau_1, \tau_2)_g \end{aligned}$$

On a vu plus haut que pour tout $\tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}_X$:

$$\mathrm{d}S_{\text{YM}}(\tau^\sharp)|_A = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0} S_{\text{YM}}(A + \lambda\tau^\sharp) = (\tau, \delta_A F_A)_g = (\delta_A F_A, \tau)_g$$

D'où :

$$(\mathrm{d}S_{\text{YM}})|_A(\,\cdot\,) = (\delta_A F_A, (\,\cdot\,)_\sharp)_g = \hat{g}((\delta_A F_A)^\sharp, \,\cdot\,) = \Big((\delta_A F_A)^\sharp\Big)^\flat$$

D'où :

$$\nabla S_{\text{YM}}|_A = ((\mathrm{d}S_{\text{YM}})|_A)^{\hat{g}} = \left(\Big((\delta_A F_A)^\sharp\Big)^\flat\right)^{\hat{g}} = (\delta_A F_A)^\sharp$$

□

Corollaire : Pour X sans bord, la courbe de connexions A_λ en $\mathcal{A}_X$ est un courbe intégrale du gradient descendant de S_{YM} si et seulement si

$$(\dot{A}_\lambda)_\sharp = -\delta_{A_\lambda} F_{A_\lambda}$$

Remarque : Je paramétrise par λ car s et t sont réservés pour la décomposition de $A \in \mathcal{A}_X$ pour $X = \Sigma \times [0,1] \times \mathbb{R}$.

Remarque : Si X a un bord on trouve

$$\mathrm{d}S_{\text{YM}}(\tau^\sharp)|_A = (\mathrm{d}_A\tau, F_A)_g = (\tau, \delta_A F_A)_g + \int_{\partial X} \tau \wedge^\kappa \star_g F_A$$

Le dernier terme m'empêche d'expliciter ∇S_{YM}. Néanmoins, je ne veux ∇S_{YM} que sur les connexions avec conditions aux bords $F_A|_{\partial X} = (\star_g F_A)\,|_{\partial X} = 0$. Dans ce cas, le dernier terme meurt. Par conséquent, comme dans le cas sans bord, le gradient de

S_{YM} est aussi $(\nabla S_{\text{YM}})|_A = (\delta_A F_A)^\sharp$. On conclut alors qu'un chemin de connexions A_λ en $\mathcal{A}_X$ vérifiant $F_{A_\lambda}|_{\partial X} = \left(\star_g F_{A_\lambda}\right)|_{\partial X} = 0$ pour tout λ est une courbe intégrale du gradient descendant de S_{YM} si et seulement si $(\dot{A}_\lambda)_\sharp = -\delta_{A_\lambda} F_{A_\lambda}$.

Remarque : Bref, bien qu'on a pas ∇S_{YM} dans le cas général, bien des cas particuliers nous donnent ∇S_{YM}.

==========

À FAIRE : dans le cas $\star_g F_A$ (ou F_A) nulle au bord, regarder si le gradient ∇S_{YM} préserve la nullité de $\star_g F_A$ (ou F_A) au bord.

Question : Il semble que les courbes intégrales du gradient descendant de S_{YM} tendent asymptotiquement vers une connexion de Yang-Mills, i.e.

$$\lim_{\lambda\to\infty} \delta_{A_\lambda} F_{A_\lambda} = 0$$

Comment pourrais-je m'assurer de converger à un instanton ? i.e. m'assurer que :

$$\lim_{\lambda\to\infty} (1+\star_g) F_{A_\lambda} = 0$$

Seraient-ce les conditions aux bords $F_{A_\lambda}|_{\partial X} = \left(\star_g F_{A_\lambda}\right)|_{\partial X} = 0$, $\forall \lambda \in [0,+\infty[$, qui forceraient la convergence à un instanton et non une connexion de Yang-Mills quelconque ?

AUSSI : (linéarisation) les instantons sont des courbes gradients de CS. Donc la dimension de l'espace des des instantons (i.e. des courbes gradients) reliant deux connexions plates est l'espace des perturbations $\tau^\sharp$ tels que $\star_g \mathrm{d}_A \tau = -\mathrm{d}_A \tau$ pour τ nul à $t \to \pm\infty$. ($\star_g \mathrm{d}_A \tau = -\mathrm{d}_A \tau$ est la linéarisation de l'éq. ASD $(1+\star_g)F_{A_\lambda}$).

29 Décomposition simple de Yang-Mills :

29.1 Introduction :

Soit (X^4, g) une 4-variété riemannienne lisse orientable munie d'un $\mathrm{SU}(2)$-fibré principal trivial $\pi_X : P_X \to X$. Le but de cette section est d'étudier une décomposition simple de la théorie de Yang-Mills pour les deux décompositions suivantes :

$$X^4 = Y^3 \times \mathbb{R}$$

$$X^4 = Y^3 \times [0, 1]$$

ou encore $X^4 = Y^3 \times \mathbb{R}$ où Y a un bord. Ceci reliera la théorie de Yang-Mills $S_{\mathrm{YM}}(A)$ sur X à la théorie de Yang-Mills-Higgs $S_{\mathrm{YMH}}(A_t, \psi_t)$ sur Y et formalisera ainsi l'adage « *les tranches d'instantons sont des monopoles magnétiques* ».

La prochaine section s'attaquera à la décomposition double de la théorie de Yang-Mills, ce qui sera un premier pas à l'appréhension de la conjecture d'Atiyah-Floer.

Remarque : La décomposition $X^4 = Y^3 \times [0, 1]$ est un cobordisme trivial. Il semble possible de changer la fonction *temps* $t : X \to \mathbb{R}$ par une fonction de Morse $f : X \to \mathbb{R}$. Ainsi, la direction $\partial_t := (\mathrm{d}t)^g$ serait changée par le champ gradient $\nabla f = (\mathrm{d}f)^g$. Les variétés Y_t deviendraient alors des tranches $f^{-1}(t)$. Une paire de pantalon scindant Y_t en deux parties correspondrait alors à l'écrasement (dégénérescence de g_t) de Y le long d'un scindement de Heegaard $\Sigma \hookrightarrow Y$, i.e. un *bubbling* de Y.

29.2 Le lieu :

Soit (X^4, g) une 4-variété lisse riemannienne orientable où $X = Y \times \mathbb{R}$ est muni d'un SU(2)-fibré principal (forcément trivial) $\pi_X : P_X \to X$ qui se décompose comme $P_X = P_Y \times \mathbb{R}$ où $\pi_Y : P_Y \to Y$ est un SU(2)-fibré principal trivial. Posons

$$Y_t := Y \times \{t\} \quad \text{et} \quad P_{Y_t} := P_Y \times \{t\}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Considérons les familles d'inclusions

$$\iota_t : Y \hookrightarrow X \quad \iota_t^\sharp : P_Y \hookrightarrow P_X$$

définies par $\iota_t(y) = (y, t)$ pour $y \in Y$, $t \in \mathbb{R}$ et $\iota_t^\sharp(a) = (a, t)$ pour $a \in P_Y$ et $t \in \mathbb{R}$. Elles vérifient

$$\iota_t(Y) = Y_t \quad \text{et} \quad \iota_t^\sharp(P_Y) = P_{Y_t}$$

Considérons $s_{\alpha,Y}$ une section (globale) du fibré P_Y. Elle induit une section (globale) $s_{\alpha,X}$ du fibré P_X par $s_{\alpha,X}(y, t) := (s_{\alpha,Y}(y), t)$ pour tout $(y, t) \in X$.

Proposition : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a deux diagrammes qui commutent :

$$\iota_t^\sharp \circ s_{\alpha,Y} = s_{\alpha,X} \circ \iota_t$$

$$\iota_t \circ \pi_Y = \pi_X \circ \iota_t^\sharp$$

Preuve : D'abord la première égalité. Soit $y \in Y$ quelconque. Alors

$$\iota_t^\sharp(s_{\alpha,Y}(y)) = (s_{\alpha,Y}(y), t) = s_{\alpha,X}(y, t) = s_{\alpha,X}(\iota_t(y))$$

Ensuite la seconde égalité. Soit $a \in P_Y$ quelconque. Alors

$$\iota_t(\pi_Y(a)) = (\pi_Y(a), t) = \pi_X(a, t) = \pi_X(\iota_t^\sharp(a))$$

□

Supposons que la métrique g sur X se décompose comme $g = \tilde{g} + \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t$ de telle sorte que $\tilde{g}|_{Y_t}$ soit une métrique riemannienne pour Y_t. Posons $g_t := (\iota_t)^*\tilde{g}$, c'est une famille de métriques riemanniennes sur Y.

29.3 Un champ vectoriel sur X et un sur P_X :

Posons

$$\partial_t := (\mathrm{d}t)^g \in \mathfrak{X}(X)$$
$$t^\sharp := \pi_X^* t = t \circ \pi \in C^\infty(P_X; \mathbb{R})$$

Posons $\partial_t^\sharp \in \mathfrak{X}(P_X)$ défini comme

$$\partial_t^\sharp|_{(s_{\alpha,X})\cdot g} := (\Phi_g)_*(s_{\alpha,X})_*(\partial_t)$$

Remarque : $\partial_t^\sharp$ est indépendant du $s_{\alpha,Y}$ choisi.

Proposition : $(\pi_X)_*\partial_t^\sharp = \partial_t$.

Preuve : Soit $a \in P_X$ quelconque. Alors il existe $x \in X$ et $g \in G$ tel que $a = (s_{\alpha,X}(x)) \cdot g$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
(\pi_X)_*(\partial_t^\sharp|_a) &= (\pi_X)_*(\partial_t^\sharp|_{(s_{\alpha,X}(x))\cdot g}) \\
&= (\pi_X)_*(\Phi_g)_*(s_{\alpha,X})_*(\partial_t) \\
&= (\pi_X \circ \Phi_g \circ s_{\alpha,X})_*\partial_t \\
&= (\pi_X \circ s_{\alpha,X})_*\partial_t \\
&= (\mathrm{id}_X)_*\partial_t \\
&= \partial_t
\end{aligned}$$

□

Corollaire : $\mathrm{d}t^\sharp(\partial_t^\sharp) = 1$.

Preuve : $\mathrm{d}t^\sharp(\partial_t^\sharp) = (\mathrm{d}\pi_X^* t)(\partial_t^\sharp) = (\pi_X^*(\mathrm{d}t))(\partial_t^\sharp) = \mathrm{d}t((\pi_X)_*\partial_t^\sharp) = \mathrm{d}t(\partial_t) = 1.$ □

29.4 Décomposition des connexions :

Soit $A \in \mathcal{A}_X$ une connexion quelconque sur P_X. On pose

$$\psi^\sharp := A(\partial_t^\sharp)$$

$$\tilde{A} := A - \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$$

Ainsi, la connexion A se décompose comme

$$A = \tilde{A} + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$$

Proposition : $\psi^\sharp$ est Ad-équivariante.

Preuve : Découle de la Ad-équivariance de A et de la G-invariance de $\partial_t^\sharp$. □

Proposition : $\tilde{A}(\partial_t^\sharp) = 0$.

Preuve : $\tilde{A}(\partial_t^\sharp) = A(\partial_t^\sharp) - \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp(\partial_t^\sharp) = \psi^\sharp - \psi^\sharp = 0$. □

Posons

$$A_t := (\iota_t^\sharp)^* \tilde{A} \in \mathcal{A}_{P_Y}$$

$$\psi_t^\sharp := (\iota_t^\sharp)^* \psi^\sharp$$

Ici, A_t est une famille de connexions sur Y et $\psi_t := (\psi_t^\sharp)_\sharp$ est une famille de sections en $\Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_Y)$.

Remarque : Sous la décomposition qui précède, il y a donc une correspondence biunivoque

$$\mathcal{A}_X \leftrightarrow \{\tilde{u} : \mathbb{R} \to \mathcal{A}_Y \times \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_Y)\}$$

où $\tilde{u}(t) = (u(t), \psi_t)$ pour $u(t) = A_t$. Remarquons que cette décomposition est indépendante du choix de section s_α sur Y.

29.5 Forme de courbure :

La forme de courbure de $A \in \mathcal{A}_X$ est par définition $F_A^\sharp := \mathrm{d}^A A$. Sous la décomposition $A = \tilde{A} + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$, bien que $\tilde{A}$ ne soit pas une forme de connexion sur P_X, elle en est une sur chaque tranche P_{Y_t}. On peut alors lui associer une 2-forme $F_{\tilde{A}}^\sharp \in \Omega^2_{\mathrm{Ad,hor}}(X; \mathfrak{su}(2))$ telle que sa restriction à chaque P_{Y_t} est la forme de courbure de $\tilde{A}$ sur P_{Y_t} :

$$F_{\tilde{A}}^\sharp|_{P_{Y_t}} := F_{\tilde{A}|_{Y_t}}^\sharp$$

De même, on peut définir la dérivée covariante extérieure $\mathrm{d}^{\tilde{A}}$ tranche par tranche :

$$\mathrm{d}^{\tilde{A}}(\,\cdot\,)|_{P_{Y_t}} := \mathrm{d}^{\tilde{A}|_{P_{Y_t}}}(\,\cdot\,|_{P_{Y_t}})$$

Soit $\tilde{A}^{(t^\sharp)}$ la dérivée de $\tilde{A}$ dans la direction $\mathbb{R}$ de $P_X = P_Y \times \mathbb{R}$. J'écrirai plus simplement $\tilde{A}^{(t)}$ sans le dièse.

Proposition : Soit $F_A^\sharp \in \Omega^2_{\mathrm{Ad,hor}}(P_X;\mathfrak{su}(2))$ la forme de courbure de $A \in \mathcal{A}_X$. Alors sous la décomposition $A = \tilde{A} + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$, la forme de courbure se décompose comme :

$$F_A^\sharp = F_{\tilde{A}}^\sharp + (\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{Y_t}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \in \Omega^2_{\mathrm{Ad,hor}}(P_X;\mathfrak{g})$$

Preuve : La décomposition $P_X = P_Y \times \mathbb{R}$ induit une décomposition $\mathrm{d}|_{P_X} = \mathrm{d}|_{P_{Y_t}} + \mathrm{d}|_{\mathbb{R}}$ de la différentielle extérieure, où $\mathrm{d}|_{P_{Y_t}}$ est la différentielle extérieure le long de la tranche P_{Y_t} et où $\mathrm{d}|_{\mathbb{R}}$ est la différentielle le long de $\mathbb{R}$ (du paramètre t). En utilisant la décomposition $A = \tilde{A} + \psi^\sharp \mathrm{d}t$, ainsi que l'équation structurelle d'Élie Cartan une première puis une seconde fois, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
& F_A \\
= \;& \mathrm{d}|_{P_X} A + \frac{1}{2}[A \wedge A] \\
= \;& \mathrm{d}|_{P_X}(\tilde{A} + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) + \frac{1}{2}[(\tilde{A} + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) \wedge (\tilde{A} + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp)] \\
= \;& \mathrm{d}|_{P_X}\tilde{A} + \mathrm{d}|_{P_X}(\psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) \\
& + \frac{1}{2}[\tilde{A} \wedge \tilde{A}] + \frac{1}{2}[\tilde{A} \wedge \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp] + \frac{1}{2}[\psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp \wedge \tilde{A}] + \frac{1}{2}[\psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp \wedge \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp] \\
= \;& (\mathrm{d}|_{P_{Y_t}} + \mathrm{d}|_{\mathbb{R}})\tilde{A} + (\mathrm{d}|_{P_{Y_t}} + \mathrm{d}|_{\mathbb{R}})(\psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) + \frac{1}{2}[\tilde{A} \wedge \tilde{A}] + [\tilde{A} \wedge \mathrm{d}t^\sharp, \psi^\sharp] \\
= \;& \mathrm{d}|_{P_{Y_t}}\tilde{A} + \mathrm{d}|_{\mathbb{R}}\tilde{A} + (\mathrm{d}|_{P_{Y_t}}\psi^\sharp) \wedge \mathrm{d}t^\sharp + \frac{1}{2}[\tilde{A} \wedge \tilde{A}] + [\tilde{A}, \psi^\sharp] \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
= \;& F_{\tilde{A}}^\sharp + \mathrm{d}t^\sharp \wedge \tilde{A}^{(t)} + (\mathrm{d}|_{P_{Y_t}}\psi^\sharp) \wedge \mathrm{d}t^\sharp + [\tilde{A}, \psi^\sharp] \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
= \;& F_{\tilde{A}}^\sharp + (\mathrm{d}|_{P_{Y_t}}\psi^\sharp + [\tilde{A}, \psi^\sharp] - \tilde{A}^{(t)}) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
= \;& F_{\tilde{A}}^\sharp + (\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{Y_t}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \wedge \mathrm{d}t^\sharp
\end{aligned}$$

□

Corollaire : $F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t \in \Omega^2(X;\mathrm{Ad}P_X)$.

Remarque : Dans le cas particulier où la famille de connexions $A_t := (\iota_t^\sharp)^*\tilde{A}$ sur P_Y provient d'une isotopie de jauge induite par $\upsilon_t^\sharp := -\psi_t^\sharp$, i.e. $\dot{A}_t = -\mathrm{d}^{A_t}\upsilon_t^\sharp = \mathrm{d}^{A_t}\psi_t^\sharp$, on remarque que le second terme de la décomposition de la courbure meurt. Le second terme du split de la courbure représente donc une restriction à ce que A_t soit obtenu d'une isotopie de jauge induite par $\upsilon_t^\sharp = -\psi_t^\sharp$.

29.6 Fonctionnelle de YM :

La fonctionnelle de Yang-Mills S_{YM} en $A \in \mathcal{A}_X$ est $S_{\mathrm{YM}}(A) = \frac{1}{2}(F_A, F_A)_g$. À quoi ressemble-t-elle sous la dernière décomposition de la courbure ?

Proposition : La fonctionnelle de Yang-Mills se décompose comme :

$$S_{\mathrm{YM}}(A) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(F_{A_t}, F_{A_t})_{g_t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp, \mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp)_{g_t}\mathrm{d}t$$

Preuve : D'abord, la forme de courbure s'exprime comme :

$$F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t \in \Omega^2(X; \mathrm{Ad}P_X)$$

où $F_{\tilde{A}}$ ne contient pas de $\mathrm{d}t$. Par les résultats de la section sur la décomposition simple de la théorie de Hodge, on trouve alors :

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{YM}}(A) &= \frac{1}{2}(F_A, F_A)_g \\
&= \frac{1}{2}(F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t, F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t)_g \\
&= \frac{1}{2}(F_{\tilde{A}}, F_{\tilde{A}}) + \frac{1}{2}((\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t, (\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t)_g \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(F_{\tilde{A}}|_{Y_t}, F_{\tilde{A}}|_{Y_t})_{\tilde{g}|_{Y_t}}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}((\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)|_{Y_t}, (\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)|_{Y_t})_{\tilde{g}|_{Y_t}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(F_{A_t}, F_{A_t})_{g_t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp, \mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp)_{g_t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

29.7 Équation (1) de YM ($\mathrm{d}_A F_A = 0$) :

Rappel : Les équations de Yang-Mills sont

$$\mathrm{d}_A F_A = 0 \quad \text{et} \quad \delta_A F_A = 0$$

À quoi ressemblent-elles sous la décomposition $A = \tilde{A} + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$?

Proposition : L'équation de Bianchi $\mathrm{d}_A F_A = 0$ se décompose comme :

$$\left(F^\sharp_{\tilde{A}}\right)^{(t)} = \mathrm{d}^{\tilde{A}} \tilde{A}^{(t)}$$

Preuve : Soit $A \in \mathcal{A}_X$ que l'on décompose comme $A = \tilde{A} + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$. Il suffit de regarder comment se décompose l'équation de Bianchi en haut $\mathrm{d}^A F^\sharp_A$. On vient de voir que la courbure se décompose donc comme $F^\sharp_A = F^\sharp_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}^{\tilde{A}} \psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \wedge \mathrm{d}t^\sharp$.

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathrm{d}^A F_A^\sharp \\
&= \mathrm{d}^A \left(F_{\tilde{A}}^\sharp + (\mathrm{d}^{\tilde{A}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \right) \\
&= \mathrm{d}^A F_{\tilde{A}}^\sharp + \mathrm{d}^A \left((\mathrm{d}^{\tilde{A}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \right) \\
&= \mathrm{d}|_{P_X} F_{\tilde{A}}^\sharp + [A \wedge F_{\tilde{A}}^\sharp] \\
&\quad + \mathrm{d}|_{P_X} \left((\mathrm{d}^{\tilde{A}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \right) + [A \wedge \left((\mathrm{d}^{\tilde{A}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \right)] \\
&= \mathrm{d}|_{P_{Y_t}} F_{\tilde{A}}^\sharp + \mathrm{d}t^\sharp \wedge \left(F_{\tilde{A}}^\sharp \right)^{(t)} + [(\tilde{A} + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) \wedge F_{\tilde{A}}^\sharp] \\
&\quad + \left(\mathrm{d}|_{P_{Y_t}} (\mathrm{d}^{\tilde{A}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \right) \\
&\quad + [(\tilde{A} + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) \wedge \left((\mathrm{d}^{\tilde{A}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \right)] \\
&= \mathrm{d}|_{P_{Y_t}} F_{\tilde{A}}^\sharp + \mathrm{d}t^\sharp \wedge \left(F_{\tilde{A}}^\sharp \right)^{(t)} + [\tilde{A} \wedge F_{\tilde{A}}^\sharp] + [(\psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) \wedge F_{\tilde{A}}^\sharp] \\
&\quad + \left(\mathrm{d}|_{P_{Y_t}} (\mathrm{d}^{\tilde{A}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \right) \\
&\quad + [\tilde{A} \wedge \left((\mathrm{d}^{\tilde{A}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \right)] + [(\psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) \wedge \left((\mathrm{d}^{\tilde{A}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \right)] \\
&= \mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{Y_t}} F_{\tilde{A}}^\sharp + \mathrm{d}t^\sharp \wedge \left(F_{\tilde{A}}^\sharp \right)^{(t)} + [\psi^\sharp, F_{\tilde{A}}^\sharp] \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
&\quad + \left(\mathrm{d}|_{P_{Y_t}} (\mathrm{d}^{\tilde{A}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \right) \wedge \mathrm{d}t^\sharp + [\tilde{A} \wedge \left(\mathrm{d}^{\tilde{A}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)} \right)] \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
&= \mathrm{d}t^\sharp \wedge \left(F_{\tilde{A}}^\sharp \right)^{(t)} + [\psi^\sharp, F_{\tilde{A}}^\sharp] \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
&\quad + \left(\mathrm{d}|_{P_{Y_t}} (\mathrm{d}^{\tilde{A}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) + [\tilde{A} \wedge \left(\mathrm{d}^{\tilde{A}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)} \right)] \right) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
&= \mathrm{d}t^\sharp \wedge \left(F_{\tilde{A}}^\sharp \right)^{(t)} + [\psi^\sharp, F_{\tilde{A}}^\sharp] \wedge \mathrm{d}t^\sharp + \left(\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{Y_t}} (\mathrm{d}^{\tilde{A}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \right) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
&= \left(F_{\tilde{A}}^\sharp \right)^{(t)} \wedge \mathrm{d}t^\sharp + [\psi^\sharp, F_{\tilde{A}}^\sharp] \wedge \mathrm{d}t^\sharp + \left(\mathrm{d}^{\tilde{A}}\mathrm{d}^{\tilde{A}}\psi^\sharp - \mathrm{d}^{\tilde{A}}\tilde{A}^{(t)} \right) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
&= \left(\left(F_{\tilde{A}}^\sharp \right)^{(t)} - [F_{\tilde{A}}^\sharp, \psi^\sharp] + [F_{\tilde{A}}^\sharp, \psi^\sharp] - \mathrm{d}^{\tilde{A}}\tilde{A}^{(t)} \right) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
&= \left(\left(F_{\tilde{A}}^\sharp \right)^{(t)} - \mathrm{d}^{\tilde{A}}\tilde{A}^{(t)} \right) \wedge \mathrm{d}t^\sharp
\end{aligned}
$$

D'où $\left(F^{\sharp}_{\tilde{A}}\right)^{(t)} = \mathrm{d}^{\tilde{A}}\tilde{A}^{(t)}$. □

Preuve : *(preuve alternative)* On a vu dans la section sur la décomposition simple de la théorie de Hodge que pour tout $\alpha \in \Omega^k(X;E)$ ne contenant pas de $\mathrm{d}t$ on a les deux égalités :

$$\mathrm{d}_A|_X\alpha = \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\alpha + (-1)^k(\alpha^{(t)} + (\rho_*\psi)\circ\alpha)\wedge \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}_A|_X(\alpha\wedge \mathrm{d}t) = (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\alpha)\wedge \mathrm{d}t$$

On sait que la décomposition simple de la forme de courbure est :

$$F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}t$$

On calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{d}_A|_X F_A \\
&= \mathrm{d}_A|_X\left(F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}t\right) \\
&= \mathrm{d}_A|_X F_{\tilde{A}} + \mathrm{d}_A|_X\left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}t\right) \\
&= \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}F_{\tilde{A}} + (F^{(t)}_{\tilde{A}} + [\psi, F_{\tilde{A}}])\wedge \mathrm{d}t + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp))\wedge \mathrm{d}t \\
&= (F^{(t)}_{\tilde{A}} + [\psi, F_{\tilde{A}}] + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t})(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t})\psi - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}(\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}t \\
&= (F^{(t)}_{\tilde{A}} + [\psi, F_{\tilde{A}}] + [F_{\tilde{A}}, \psi] - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}(\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}t \\
&= (F^{(t)}_{\tilde{A}} + [\psi, F_{\tilde{A}}] - [\psi, F_{\tilde{A}}] - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}(\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}t \\
&= (F^{(t)}_{\tilde{A}} - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}(\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Puisque $F^{(t)}_{\tilde{A}} - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}(\tilde{A}^{(t)})_\sharp$ est sans $\mathrm{d}t$, on conclut que $F^{(t)}_{\tilde{A}} - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}(\tilde{A}^{(t)})_\sharp = 0$, i.e. que $F^{(t)}_{\tilde{A}} = \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}(\tilde{A}^{(t)})_\sharp$. □

Corollaire : La seconde équation de Bianchi $\mathrm{d}_A F_A = 0$ se décompose comme

$$\left(F_{\tilde{A}}\right)^{(t)} = \mathrm{d}_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}^{(t)}\right)_\sharp$$

En particulier, on peut écrire ça sur Y :

$$\left(F_{A_t}\right)^{(t)} = \mathrm{d}_{A_t}\left(A_t^{(t)}\right)_\sharp$$

Remarque : Cette équation est triviale en utilisant l'identité de Bianchi sur P_Y :

$$\begin{aligned}\left(F^\sharp_{A_t}\right)^{(t)} - \mathrm{d}^{A_t}A_t^{(t)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{d}A_t + \frac{1}{2}[A_t \wedge A_t]\right) - \mathrm{d}A_t^{(t)} - [A_t \wedge A_t^{(t)}] \\ &= \mathrm{d}A_t^{(t)} + \frac{1}{2}[A_t^{(t)} \wedge A_t] + \frac{1}{2}[A_t \wedge A_t^{(t)}] - \mathrm{d}A_t^{(t)} - [A_t \wedge A_t^{(t)}] \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc la première équation de Yang-Mills ne nous apporte aucune nouvelle information (i.e. Bianchi sur X n'apporte rien de plus que Bianchi sur Y). Bref, on a une identité qui pourrait donc nous servir plus tard :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{A_t} = \mathrm{d}_{A_t}(A_t^{(t)})_\sharp$$

29.8 Équation (2) de YM ($\delta_A F_A = 0$) :

Proposition : $\mathrm{d}_A|_X(\,\cdot\,) = \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}(\,\cdot\,) + \mathrm{d}t \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\,\cdot\,) + (\rho_*\psi\mathrm{d}t)(\wedge, \circ)(\,\cdot\,)$.

Preuve : On calcule directement sur P_X :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^A|_{P_X}(\,\cdot\,) &= \mathrm{d}|_{P_X}(\,\cdot\,) + (\rho_*A)(\wedge, \circ)(\,\cdot\,) \\ &= \mathrm{d}|_{P_{Y_t}}(\,\cdot\,) + \mathrm{d}t^\sharp \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^\sharp}(\,\cdot\,) + (\rho_*\tilde{A})(\wedge, \circ)(\,\cdot\,) + (\rho_*\psi^\sharp\mathrm{d}t^\sharp)(\wedge, \circ) \\ &= \mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{Y_t}}(\,\cdot\,) + \mathrm{d}t^\sharp \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^\sharp}(\,\cdot\,) + (\rho_*\psi^\sharp\mathrm{d}t^\sharp)(\wedge, \circ)\end{aligned}$$

□

Remarque : La dernière proposition semble déjà démontrée dans la section sur la décomposition simple de la théorie de Hodge. Mais gardons-là pour avoir plusieurs preuves au cas où.

Proposition : La décomposition simple $A = \tilde{A} + \psi^\sharp\mathrm{d}t^\sharp$ de la codifférentielle de la courbure $\delta_A F_A$ sur $X^4 = Y^3 \times \mathbb{R}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\delta_A|_X F_A &= \delta_{\tilde{A}}|_{Y_t}F_{\tilde{A}} + \left(\delta_{\tilde{A}}|_{Y_t}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right) \wedge \mathrm{d}t \\ &\quad + \star_{\tilde{g}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right) + \left[\psi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp\right]\end{aligned}$$

Preuve : Souvenons-nous que $\delta_A = (-1)^{nk+n+1} s_g \star_g \mathrm{d}_A \star_g$. La décomposition simple de la courbure est donnée par $F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t$. Aussi, pour une k-forme α sans $\mathrm{d}t$ sur une 4-variété $X^4 = Y^4 \times \mathbb{R}$, on a $\star_g \alpha = (\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t$ et $\star_g(\alpha \wedge \mathrm{d}t) = (-1)^{k+1} \star_{\tilde{g}} \alpha$. On calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
\delta_A|_X F_A &= -\star_g \mathrm{d}_A|_X \star_g \left(F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&= -\star_g \mathrm{d}_A|_X \left(\star_g F_{\tilde{A}}\right) - \star_g \mathrm{d}_A \star_g \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&= -\star_g \mathrm{d}_A|_X \left(\star_{\tilde{g}} F_{\tilde{A}} \wedge \mathrm{d}t\right) - \star_g \mathrm{d}_A|_X \left(\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right) \\
&= -\star_g \left(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t} \left(\star_{\tilde{g}} F_{\tilde{A}} \wedge \mathrm{d}t\right) + \mathrm{d}t \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\star_{\tilde{g}} F_{\tilde{A}} \wedge \mathrm{d}t\right) + (\mathrm{Ad}_*\psi \mathrm{d}t)(\wedge, \circ)\left(\star_{\tilde{g}} F_{\tilde{A}} \wedge \mathrm{d}t\right)\right) \\
&\quad - \star_g \left(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t} \left(\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right) + \mathrm{d}t \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right)\right) \\
&\quad - \star_g \left((\mathrm{Ad}_*\psi \mathrm{d}t)(\wedge, \circ)\left(\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right)\right) \\
&= -\star_g \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t} \star_{\tilde{g}} F_{\tilde{A}}) \wedge \mathrm{d}t\right) - \star_g \left(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t} \star_{\tilde{g}} (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right) \\
&\quad - \star_g \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right) \wedge \mathrm{d}t\right) + \star_g \left(\left[\psi, \star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right] \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&= \star_{\tilde{g}} \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t} \star_{\tilde{g}} F_{\tilde{A}} - \left(\star_{\tilde{g}} \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t} \star_{\tilde{g}} (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right) \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right) - \star_{\tilde{g}} \left[\psi, \star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right] \\
&= \delta_{\tilde{A}}|_{Y_t} F_{\tilde{A}} + \left(\delta_{\tilde{A}}|_{Y_t}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right) \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right) - \left[\psi, \star_{\tilde{g}}^2(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right] \\
&= \delta_{\tilde{A}}|_{Y_t} F_{\tilde{A}} + \left(\delta_{\tilde{A}}|_{Y_t}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right) \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right) + \left[\psi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp\right]
\end{aligned}$$

□

Preuve : *(preuve alternative)* On a vu plus haut dans la section sur la décomposition simple de la théorie de Hodge que la décomposition simple que la codifférentielle covariante est donnée sur tout $\alpha \in \Omega^k(X; E)$ sans $\mathrm{d}t$ par :

$$\delta_{A,g}|_X \alpha = \delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_t} \alpha$$

$\delta_{A,g}|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}t) = \left(\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_t}\alpha\right) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk+k+1} s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (-1)^{k+1}(\rho_*\psi) \circ (\alpha)$

Ainsi pour $n = 4$, $k = 1$ dans la seconde moitié et $s_g = 1$, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\delta_A|_X F_A &= \delta_A|_X \left(F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&= \delta_A|_X F_{\tilde{A}} + \delta_A|_X \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&= \delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_t} F_{\tilde{A}} + \left(\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{Y_t}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right) \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad + \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp))^{(t)} + [\psi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp]
\end{aligned}$$

□

Corollaire : La décomposition simple de la seconde équation de Yang-Mills $\delta_A F_A = 0$ est donnée sur chaque tranche Y_t par les deux équations suivantes :

$$0 = \delta_{\tilde{A}}|_{Y_t}\left(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp\right)$$

$$0 = \delta_{\tilde{A}}|_{Y_t} F_{\tilde{A}} + \star_{\tilde{g}}\left(\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right)^{(t)} + \left[\psi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{Y_t}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp\right]$$

Proposition : Les deux dernières équations se réécrivent sur Y comme :

$$0 = \delta_{A_t,g_t}\left(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp\right)$$

$$\delta_{A_t,g_t} F_{A_t} = - \star_{g_t}\left(\star_{g_t}(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp)\right)^{(t)} - \left[\psi_t, \mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp\right]$$

Preuve : Il suffit de tirer chaque objet à Y via $\iota_t : Y \hookrightarrow X$. □

Remarque : En utilisant $\Delta_{A_t,g_t} = \delta_{A_t,g_t}\mathrm{d}_{A_t}$ sur les 0-formes, les deux dernières équations s'écrivent :

$$\Delta_{A_t,g_t}\psi_t = \delta_{A_t,g_t}(A_t^{(t)})_\sharp$$

$$\delta_{A_t,g_t} F_{A_t} = - \star_{g_t}\left(\star_{g_t}(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp)\right)^{(t)} - \left[\psi_t, \mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp\right]$$

Proposition : Si g_t est constante en t, disons $g_t = g_0$, alors les deux équations sur Y se réécrivent :

$$\Delta_{A_t,g_0}\psi_t = \delta_{A_t}(A_t^{(t)})_\sharp$$

$$\delta_{A_t} F_{A_t} = \mathrm{d}_{A_t}\psi_t^{(t)} - \left(A_t^{(t,t)}\right)_\sharp + \left[\mathrm{d}_{A_t}\psi_t, \psi_t\right]$$

Preuve : La première équation reste la même. Regardons la seconde :

$$\begin{aligned}
\delta_{A_t}F_{A_t} &= -\star_{g_0}\left(\star_{g_0}(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t-(A_t^{(t)})_\sharp)\right)^{(t)}-\left[\psi_t,\mathrm{d}_{A_t}\psi_t-(A_t^{(t)})_\sharp\right]\\
&= -\left(\star_{g_0}^2(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t-(A_t^{(t)})_\sharp)\right)^{(t)}-\left[\psi_t,\mathrm{d}_{A_t}\psi_t-(A_t^{(t)})_\sharp\right]\\
&= \left(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t-(A_t^{(t)})_\sharp\right)^{(t)}-\left[\psi_t,\mathrm{d}_{A_t}\psi_t-(A_t^{(t)})_\sharp\right]\\
&= \left(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t\right)^{(t)}-(A_t^{(t,t)})_\sharp-\left[\psi_t,\mathrm{d}_{A_t}\psi_t\right]+\left[\psi_t,(A_t^{(t)})_\sharp\right]\\
&= \mathrm{d}_{A_t}\psi_t^{(t)}+\left[(A_t^{(t)})_\sharp,\psi_t\right]-(A_t^{(t,t)})_\sharp-\left[\psi_t,\mathrm{d}_{A_t}\psi_t\right]+\left[\psi_t,(A_t^{(t)})_\sharp\right]\\
&= \mathrm{d}_{A_t}\psi_t^{(t)}-\left(A_t^{(t,t)}\right)_\sharp+\left[\mathrm{d}_{A_t}\psi_t,\psi_t\right]
\end{aligned}$$

□

Proposition : Si g_t, A_t et ψ_t sont constants en t, disons $A_t = A_0$, $g_t = g_0$ et $\psi_t = \psi_0$, alors les deux équations sur Y sont les équations de Yang-Mills-Higgs en dimension 3 :

$$\Delta_{A_0}\psi_0 = 0$$

$$\delta_{A_0}F_{A_0} = \left[\mathrm{d}_{A_0}\psi_0,\psi_0\right]$$

où ψ_0 joue ici le rôle de champ de Higgs.

Preuve : Découle de la dernière proposition avec A_t et ψ_t constants en t. □

Remarque : Ici il est question du Higgs des mathématiciens (e.g. Taubes) où ψ est à valeurs en le fibré $\mathrm{Ad}P = P\times_{\mathrm{Ad}}\mathfrak{g}$ et non le Higgs des physiciens à valeurs en le fibré $E = P\times_{\rho_0}\mathbb{C}^2$ pour $\rho_0 : \mathrm{GL}(2;\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$ la représentation fondamentale.

Remarque : La dernière proposition est naturelle au sens où la décomposition simple de S_{YM} pour A_t, φ_t et g_t constants en t est essentiellement l'intégrale d'action de Yang-Mills-Higgs (multipliée par un facteur indéterminé mais constant) :

$$
\begin{array}{rcl}
S_{\mathrm{YM}}(A) & = & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(F_{A_t},F_{A_t})_{g_t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t-(A_t^{(t)})_\sharp,\mathrm{d}_{A_t}\psi_t-(A_t^{(t)})_\sharp)_{g_t}\mathrm{d}t \\
& = & \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2}(F_{A_0},F_{A_0})_{g_0}+\frac{1}{2}(\mathrm{d}_{A_0}\psi_0,\mathrm{d}_{A_0}\psi_0)_{g_0}\right)\mathrm{d}t \\
& = & \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2}(F_{A_0},F_{A_0})_{g_0}+\frac{1}{2}(\mathrm{d}_{A_0}\psi_0,\mathrm{d}_{A_0}\psi_0)_{g_0}\right)\mathrm{d}t \\
" = " & & \left(\frac{1}{2}(F_{A_0},F_{A_0})_{g_0}+\frac{1}{2}(\mathrm{d}_{A_0}\psi_0,\mathrm{d}_{A_0}\psi_0)_{g_0}\right)\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}t \\
" = " & & \frac{1}{2}(F_{A_0},F_{A_0})_{g_0}+\frac{1}{2}(\mathrm{d}_{A_0}\psi_0,\mathrm{d}_{A_0}\psi_0)_{g_0} \\
& = & S_{\mathrm{YMH}}(A_0,\psi_0)
\end{array}
$$

29.9 Instantons :

Proposition : L'équation des instantons (anti-)auto-duaux $\star_g F_A = \pm F_A$ se décompose comme :

$$\star_{\tilde{g}}F_{\tilde{A}} = \pm(\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)$$

Preuve : Souvenons-nous que $\alpha = \beta + \gamma \wedge \mathrm{d}t$ vérifie $\star_g\alpha = \pm\alpha$ si et seulement si

$$\star_g\alpha = \pm\alpha \iff \star_{\tilde{g}}\beta = \pm\gamma$$

La décomposition simple $F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t$ de la courbure nous indique qu'en prenant $\alpha = F_A$, $\beta = F_{\tilde{A}}$ et $\gamma = \mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp$ on trouve le *si et seulement si* suivant :

$$\star_g F_A = \pm F_A \iff \star_{\tilde{g}}F_{\tilde{A}} = \pm(\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)$$

□

Remarque : En tirant les objets à Y via $\iota_t : Y \hookrightarrow X$, les instantons auto-duaux et anti-auto-duaux vérifient sur Y respectivement :

$$\star_g F_A = F_A \iff \star_{g_t}F_{A_t} = \mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp$$

$$\star_g F_A = -F_A \iff \star_{g_t} F_{A_t} = -\mathrm{d}_{A_t}\psi_t + (A_t^{(t)})_\sharp$$

Remarque : Si $g_t = g_0$ est constant, les instantons auto-duaux et anti-auto-duaux vérifient :

$$\star_g F_A = F_A \iff \star_{g_0} F_{A_t} = \mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp$$

$$\star_g F_A = -F_A \iff \star_{g_0} F_{A_t} = -\mathrm{d}_{A_t}\psi_t + (A_t^{(t)})_\sharp$$

Remarque : Si $A_t = A_0$, $\psi_t = \psi_0$ et $g_t = g_0$ sont constants, les instantons auto-duaux et anti-auto-duaux vérifient :

$$\star_g F_A = F_A \iff \star_{g_0} F_{A_0} = \mathrm{d}_{A_0}\psi_0$$

$$\star_g F_A = -F_A \iff \star_{g_0} F_{A_0} = -\mathrm{d}_{A_0}\psi_0$$

Puisque $\dim Y = 3$, $\star_{g_0}^2 = (-1)^{nk+k} s_g = (-1)^{3k+k} = 1$, l'égalité $\star_{g_0} F_{A_0} = \mathrm{d}_{A_0}\psi_0$ se réécrit

$$F_{A_0} = \star_{g_0}\mathrm{d}_{A_0}\psi_0$$

Cette équation est l'*équation de Bogomolny pour les monopoles magnétiques*. Les monopoles magnétiques correspondent donc à des instantons auto-duaux indépendants du temps.

Résumons. Alors que la décomposition simple des équations de Yang-Mills « indépendantes du temps » sont les équations de Yang-Mills-Higgs, la décomposition simple d'instantons auto-duaux « indépendants du temps » sont des monopoles magnétiques. En particulier, les monopoles magnétiques sont une solution particulière des équations de Yang-Mills-Higgs en dimension 3.

Proposition : La décomposition simple de l'équation de Yang-Mills évaluée sur la décomposition simple d'un instanton AD/ASD est :

$$S_{\mathrm{YM}}(A) = 2\int_{\mathbb{R}} S_{\mathrm{YM}^3}(A_t, g_t)\mathrm{d}t$$

où S_{YM^3} est la fonctionnelle de Yang-Mills en dimension 3.

Preuve : La décomposition simple de la fonctionnelle de Yang-Mills est :

$$S_{\mathrm{YM}}(A) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (F_{A_t}, F_{A_t})_{g_t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp, \mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp)_{g_t}\mathrm{d}t$$

La décomposition simple d'instantons AD/ASD est :

$$\star_{g_t} F_{A_t} = \pm(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp)$$

Donc l'évaluation de S_{YM} décomposée simplement évaluée sur un instanton AD/ASD décomposé simplement est :

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{YM}}(A) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (F_{A_t}, F_{A_t})_{g_t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp, \mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp)_{g_t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (F_{A_t}, F_{A_t})_{g_t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\pm \star_{g_t} F_{A_t}, \pm \star_{g_t} F_{A_t})_{g_t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (F_{A_t}, F_{A_t})_{g_t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\star_{g_t} F_{A_t}, \star_{g_t} F_{A_t})_{g_t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (F_{A_t}, F_{A_t})_{g_t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (F_{A_t}, F_{A_t})_{g_t}\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} (F_{A_t}, F_{A_t})_{g_t}\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} S_{\mathrm{YM}^3}(A_t, g_t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

où S_{YM^3} est la fonctionnelle de Yang-Mills en dimension 3. □

29.10 Vérification ASD dans YM :

Proposition : L'équation ASD en décomposition simple vérifie l'équation de YM en décomposition simple.

Preuve : On a vu que la décomposition simple de l'équation de YM $\delta_A|_X F_A = 0$ est donnée par les deux équations

$$\Delta_{A_t,g_t}\psi_t = \delta_{A_t,g_t}(A_t^{(t)})_\sharp$$

$$\delta_{A_t} F_{A_t} = - \star_{g_t} \left(\star_{g_t}(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp)\right)^{(t)} - \left[\psi_t, \mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp\right]$$

où $\Delta_{A_t} = \delta_{A_t}\mathrm{d}_{A_t}$ sur les 0-formes. On a aussi vu que la décomposition simple de l'équation ASD $\star_g F_A = -F_A$ est donnée par l'équation

$$\star_{g_t} F_{A_t} = -\mathrm{d}_{A_t}\psi_t + (A_t^{(t)})_\sharp$$

En lui appliquant δ_{A_t,g_t}, on trouve :

$$\delta_{A_t,g_t} \star_{g_t} F_{A_t} = -\delta_{A_t,g_t} \mathrm{d}_{A_t}\psi_t + \delta_{A_t,g_t}(A_t^{(t)})_\sharp$$

où $\delta_{A_t,g_t} \star_{g_t} F_{A_t} \cong \star_{g_t}\mathrm{d}_{A_t} \star_{g_t}^2 F_{A_t} \cong \star_{g_t}\mathrm{d}_{A_t}F_{A_t} = 0$. D'où

$$\Delta_{A_t,g_t}\psi_t = \delta_{A_t,g_t}(A_t^{(t)})_\sharp$$

qui est la première égalité recherchée. Montrons maintenant que l'égalité

$$\delta_{A_t}F_{A_t} = -\star_{g_t}\left(\star_{g_t}(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp)\right)^{(t)} - \left[\psi_t, \mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp\right]$$

découle de

$$\star_{g_t}F_{A_t} = -\mathrm{d}_{A_t}\psi_t + (A_t^{(t)})_\sharp$$

Supposons $\star_{g_t}F_{A_t} = -\mathrm{d}_{A_t}\psi_t + (A_t^{(t)})_\sharp$ vrai. Alors :

$$\begin{aligned}
& -\star_{g_t}\left(\star_{g_t}(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp)\right)^{(t)} - \left[\psi_t, \mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp\right] \\
= \; & -\star_{g_t}\left(\star_{g_t}(-\star_{g_t} F_{A_t})\right)^{(t)} - \left[\psi_t, -\star_{g_t} F_{A_t}\right] \\
= \; & \star_{g_t}\left(\star_{g_t}^2 F_{A_t}\right)^{(t)} + \left[\psi_t, \star_{g_t}F_{A_t}\right] \\
= \; & \star_{g_t}\left(F_{A_t}\right)^{(t)} + \star_{g_t}\left[\psi_t, F_{A_t}\right] \\
= \; & \star_{g_t}\left(\mathrm{d}_{A_t}\left(A_t^{(t)}\right)_\sharp\right) - \star_{g_t}\left[F_{A_t}, \psi_t\right] \\
= \; & \star_{g_t}\mathrm{d}_{A_t}\left(A_t^{(t)}\right)_\sharp - \star_{g_t}\mathrm{d}_{A_t}\mathrm{d}_{A_t}\psi_t \\
= \; & \star_{g_t}\mathrm{d}_{A_t}\left(\left(A_t^{(t)}\right)_\sharp - \mathrm{d}_{A_t}\psi_t\right) \\
= \; & \star_{g_t}\mathrm{d}_{A_t}\left(-\star_{g_t} F_{A_t}\right) \\
= \; & -\star_{g_t}\mathrm{d}_{A_t}\star_{g_t} F_{A_t} \\
= \; & \delta_{A_t,g_t}F_{A_t}
\end{aligned}$$

ce qui démontre que l'on retrouve bien la seconde égalité. □

29.11 Action de $\mathcal{G}_X$ sur (A_t, ψ_t) :

On a vu qu'à une connexion $A \in \mathcal{A}_X$ correspond une paire (A_t, ψ_t) où A_t est une famille de connexions sur P_Y et où ψ_t est une famille de sections en $\Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_Y)$. En faisant agir $\mathcal{G}_X$ sur $\mathcal{A}_X$, par la gauche ou par la droite, on obtient une action de $\mathcal{G}_X$ sur la décomposition (A_t, ψ_t).

Proposition : Soit $A = \tilde{A} + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$ selon la décomposition usuelle. Soit $\Lambda \in \mathcal{G}_X$. Il lui correspond $\lambda^\sharp \in C_\iota^\infty(P_X; \mathrm{SU}(2))$. Alors les actions à gauche et à droite de $\mathcal{G}_X$ sur $\mathcal{A}_X$ via la décomposition simple donne :

$$\Lambda \cdot A = (\Lambda^{-1})^* A = \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \tilde{A} - (\mathrm{d}|_{P_{Y_t}} \lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1} + \left(\mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \psi^\sharp - (\lambda^\sharp)^{(t)} (\lambda^\sharp)^{-1} \right) \mathrm{d}t^\sharp$$

$$A \cdot \Lambda = \Lambda^* A = \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} \tilde{A} + (\lambda^\sharp)^{-1} (\mathrm{d}|_{P_{Y_t}} \lambda^\sharp) + \left(\mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} \psi^\sharp + (\lambda^\sharp)^{-1} (\lambda^\sharp)^{(t)} \right) \mathrm{d}t^\sharp$$

Preuve : Pour l'action à gauche $\Lambda \cdot A = (\Lambda^{-1})^* A = \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} A - (\mathrm{d}\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1}$, où ici d est $\mathrm{d}|_{P_X}$, on trouve :

$$\begin{aligned}
(\Lambda^{-1})^* A &= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} A - (\mathrm{d}|_{P_X} \lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1} \\
&= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} (\tilde{A} + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) - (\mathrm{d}|_{P_{Y_t}} \lambda^\sharp + \mathrm{d}t^\sharp \wedge (\lambda^\sharp)^{(t)})(\lambda^\sharp)^{-1} \\
&= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \tilde{A} + (\mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \psi^\sharp) \mathrm{d}t^\sharp - (\mathrm{d}|_{P_{Y_t}} \lambda^\sharp + \mathrm{d}t^\sharp \wedge (\lambda^\sharp)^{(t)})(\lambda^\sharp)^{-1} \\
&= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \tilde{A} - (\mathrm{d}|_{P_{Y_t}} \lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1} + \left(\mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \psi^\sharp - (\lambda^\sharp)^{(t)} (\lambda^\sharp)^{-1} \right) \mathrm{d}t^\sharp
\end{aligned}$$

De la même manière, pour l'action à droite $A \cdot \Lambda = \Lambda^* A = \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} A + (\lambda^\sharp)^{-1} (\mathrm{d}\lambda^\sharp)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\Lambda^* A &= \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} A + (\lambda^\sharp)^{-1} (\mathrm{d}\lambda^\sharp) \\
&= \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} (\tilde{A} + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) + (\lambda^\sharp)^{-1} (\mathrm{d}|_{P_{Y_t}} \lambda^\sharp + \mathrm{d}t^\sharp \wedge (\lambda^\sharp)^{(t)}) \\
&= \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} \tilde{A} + (\mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} \psi^\sharp) \mathrm{d}t^\sharp + (\lambda^\sharp)^{-1} (\mathrm{d}|_{P_{Y_t}} \lambda^\sharp + \mathrm{d}t^\sharp \wedge (\lambda^\sharp)^{(t)}) \\
&= \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} \tilde{A} + (\lambda^\sharp)^{-1} (\mathrm{d}|_{P_{Y_t}} \lambda^\sharp) + \left(\mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} \psi^\sharp + (\lambda^\sharp)^{-1} (\lambda^\sharp)^{(t)} \right) \mathrm{d}t^\sharp
\end{aligned}$$

□

Remarque : Soit $\Lambda \in \mathcal{G}_X$. Il lui correspond $\lambda^\sharp$ sur P_X. Considérons la famille $\lambda_t^\sharp := (\iota_t^\sharp)^* \lambda^\sharp$. Il lui correspond la famille $\lambda_t := (\lambda_t^\sharp)_\sharp$. À cette famille correspond $\upsilon_t :=$

$\lambda_t^{(t)}\lambda_t^{-1}$. On a en particulier $\mathrm{Ad}_{\lambda_t^{-1}}\upsilon_t = \lambda_t^{-1}\lambda_t^{(t)}$. Aussi, à la famille λ_t correspond une famille de transformations de jauge Λ_t de P_Y. Il suit que les décompositions simples des actions à gauche $\Lambda \cdot A$ et à droite de $A \cdot \Lambda$ sont données par :

$$\Lambda \cdot A = \Lambda \cdot (A_t, \psi_t) = (\Lambda_t \cdot A_t, \mathrm{Ad}_{\lambda_t}\psi_t - \upsilon_t)$$

$$A \cdot \Lambda = (A_t, \psi_t) \cdot \Lambda = (A_t \cdot \Lambda_t, \mathrm{Ad}_{\lambda_t^{-1}}\psi_t + \mathrm{Ad}_{\lambda_t^{-1}}\upsilon_t)$$

où, tel qu'attendu,

$$\Lambda_t \cdot A_t = \mathrm{Ad}_{\lambda_t^\sharp} A_t - (\mathrm{d}\lambda_t^\sharp)(\lambda_t^\sharp)^{-1}$$

$$A_t \cdot \Lambda_t = \mathrm{Ad}_{(\lambda_t^\sharp)^{-1}} A_t + (\lambda_t^\sharp)^{-1}(\mathrm{d}\lambda_t^\sharp)$$

où $\mathrm{d} = \mathrm{d}|_{P_Y}$.

Remarque : Il semble y avoir une légère asymétrie entre la version à gauche et à droite à cause du terme $\mathrm{Ad}_{\lambda_t^{-1}}$ devant υ_t. À REVÉRIFIER ! ! !

29.12 Une 1-forme particulière :

Tel que vu plus haut, la décomposition simple de l'équation de YM $\delta_A F_A = 0$ donne :

$$0 = \delta_{A_t, g_t}\left(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp\right)$$

$$\delta_{A_t, g_t} F_{A_t} = -\star_{g_t}\left(\star_{g_t}(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp)\right)^{(t)} - \left[\psi_t, \mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp\right]$$

Posons :

$$J_t := \mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp \in \Omega^1(Y; \mathrm{Ad}P_Y)$$

La décomposition simple de l'équation de YM $\delta_A F_A = 0$ s'écrit alors plus simplement :

$$0 = \delta_{A_t, g_t} J_t$$

$$\delta_{A_t, g_t} F_{A_t} = -\star_{g_t}\left(\star_{g_t} J_t\right)^{(t)} - [\psi_t, J_t]$$

La première de ces deux équations est l'équation de conservation de courants. Les équations d'instantons auto-duaux/anti-auto-duaux :

$$\star_g F_A = \pm F_A \iff \star_{g_t} F_{A_t} = \pm\left(\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp\right)$$

deviennent :

$$\star_g F_A = \pm F_A \iff \star_{g_t} F_{A_t} = \pm J_t$$

La 1-forme J_t représente la composante de la 2-forme de courbure F_A qui est à la fois en Y et en t.

Proposition : $\mathrm{d}_{A_t} J_t = [F_{A_t}, \psi_t] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{A_t}$

Preuve : En utilisant l'égalité :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{A_t} = \mathrm{d}_{A_t} (A_t^{(t)})_\sharp$$

on calcule directement :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{A_t} J_t &= \mathrm{d}_{A_t} \left(\mathrm{d}_{A_t} \psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp \right) \\ &= \mathrm{d}^2_{A_t} \psi_t - \mathrm{d}_{A_t} (A_t^{(t)})_\sharp \\ &= [F_{A_t}, \psi_t] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{A_t} \end{aligned}$$

□

Proposition : $J_t \cdot \Lambda_t = \mathrm{Ad}_{\lambda_t^{-1}} \circ J_t$

Preuve : Calcul direct via :

$$A_t \cdot \Lambda_t = \mathrm{Ad}_{(\lambda_t^\sharp)^{-1}} A_t + (\lambda_t^\sharp)^{-1} (\mathrm{d}\lambda_t^\sharp)$$

$$\psi_t \cdot \Lambda_t = \mathrm{Ad}_{\lambda_t^{-1}} \psi_t + \mathrm{Ad}_{\lambda_t^{-1}} \upsilon_t$$

où $\upsilon_t := \lambda_t^{(t)} \lambda_t^{-1}$. Détails dans mes feuilles du 2018-08-16. □

Remarque : De cette dernière proposition, il suit que le terme J_t ne peut pas être "tué" par une transformation de jauge. Au mieux, on peut l'aligner dans la direction qu'on veut en $\mathrm{Ad}P_Y$. À relier au mécanisme de Higgs (où on doit "tuer" des bosons de Goldstone par transformation de jauge et ne garder qu'un boson de Higgs).

Remarque : Si j'écris J_t c'est parce que cette 1-forme ressemble drôlement à un courant (à cause de l'équation de conservation de courant $\delta_{A_t, g_t} J_t = 0$). Peut-être l'ajout de dimensions spatiales peut servir à avoir des courants de matière dans Yang-Mills.

30 Décomposition double de Yang-Mills :

30.1 Introduction :

Le but de cette section est d'étudier une décomposition double de la théorie de Yang-Mills pour la décomposition suivante :

$$X^4 = \Sigma^2 \times [0,1] \times \mathbb{R}$$

30.2 Le lieu :

Soit (X^4, g) une 4-variété lisse orientable riemannienne munie d'un $\mathrm{SU}(2)$-fibré principal $\pi_X : P_X \to X$ telle que $X = \Sigma^2 \times [0,1] \times \mathbb{R}$ et $P_X = P_\Sigma \times [0,1] \times \mathbb{R}$ où $\pi_\Sigma : P_\Sigma \to \Sigma$ est aussi un G-fibré principal sur Σ une surface lisse fermée orientable. Dénotons les points de $[0,1]$ par s et ceux de $\mathbb{R}$ par t. De même, dénotons les deux fonctions coordonnées en direction $[0,1]$ et $\mathbb{R}$ par $s : X \to \mathbb{R}$ et $t : X \to \mathbb{R}$. Soient

$$\Sigma_{s,t} := \Sigma \times \{s\} \times \{t\}$$
$$P_{\Sigma_{s,t}} = P_\Sigma \times \{s\} \times \{t\}$$

Soient les familles d'inclusions canoniques

$$\iota_{s,t} : \Sigma \hookrightarrow X$$
$$\iota^\sharp_{s,t} : P_\Sigma \hookrightarrow P_X$$

telles que $\iota_{s,t}(\Sigma) = \Sigma_{s,t}$ et $\iota^\sharp_{s,t}(P_\Sigma) = P_{\Sigma_{s,t}}$. Supposons que la métrique g sur X se décompose comme

$$g = \tilde{g} + \mathrm{d}s \otimes \mathrm{d}s + \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t$$

de telle sorte que sur chaque tranche $\Sigma_{s,t}$, la restriction $\tilde{g}|_{\Sigma_{s,t}}$ y soit une métrique riemannienne. Posons

$$g_{s,t} := \iota^*_{s,t}\tilde{g}$$

C'est une famille de métriques à 2-paramètres sur Σ. Fixons une section $s_{\alpha,\Sigma}$ du fibré P_Σ. Il induit une section $s_{\alpha,X}$ du fibré P_X par

$$s_{\alpha,X}(x,s,t) := (s_{\alpha,\Sigma}(x), s, t)$$

pour tout $x \in \Sigma, s \in [0,1], t \in \mathbb{R}$. Comme plus haut, on a les diagrammes qui commutent

$$\iota_{s,t} \circ \pi_\Sigma = \pi_X \circ \iota^\sharp_{s,t}$$

$$s_{\alpha,X} \circ \iota_{s,t} = \iota^\sharp_{s,t} \circ s_{\alpha,\Sigma}$$

30.3 Deux champs vectoriels sur X et sur P_X :

Posons les deux fonctions réelles sur P_X suivantes :

$$s^\sharp := \pi_X^* s = s \circ \pi_X \quad \text{et} \quad t^\sharp := \pi_X^* t = t \circ \pi_X$$

Posons les deux champs vectoriels suivants sur X :

$$\partial_s := (\mathrm{d}s)^g \quad \text{et} \quad \partial_t := (\mathrm{d}t)^g$$

Posons les deux champs vectoriels $\partial_s^\sharp \in \mathfrak{X}(P_X)$ et $\partial_t \in \mathfrak{X}(P_X)$ sur P_X par :

$$\partial_s^\sharp|_{s_{\alpha,X}\cdot g} := (\Phi_g)_*(s_{\alpha,X})_*\partial_s \quad \text{et} \quad \partial_t^\sharp|_{s_{\alpha,X}\cdot g} := (\Phi_g)_*(s_{\alpha,X})_*\partial_t$$

pour tout $g \in G$. Ces deux champs vectoriels sont naturellement G-invariants.

Remarque : $\partial_s^\sharp$ et $\partial_t^\sharp$ sont indépendants du $s_{\alpha,\Sigma}$ choisi.

30.4 Décomposition des connexions :

Soit $A \in \mathcal{A}_X$. Posons

$$\varphi^\sharp := A(\partial_s^\sharp) \quad \text{et} \quad \psi^\sharp := A(\partial_t^\sharp)$$

$$\tilde{A} := A - \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp - \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$$

Ainsi, A se décompose comme

$$A = \tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$$

où $\tilde{A}$ est sans $\mathrm{d}s^\sharp$ ni $\mathrm{d}t^\sharp$. Posons

$$A_{s,t} := (\iota^\sharp_{s,t})^* \tilde{A}$$

$$\varphi^\sharp_{s,t} := (\iota^\sharp_{s,t})^* \varphi^\sharp \quad \text{et} \quad \psi^\sharp_{s,t} := (\iota^\sharp_{s,t})^* \psi^\sharp$$

Ici, $A_{s,t}$ est une famille de connexions en $\mathcal{A}_\Sigma$ et $\varphi^\sharp_{s,t}$ et $\psi^\sharp_{s,t}$ sont des familles d'éléments en $\Omega^0_{\mathrm{Ad,hor}}(P_\Sigma;\mathfrak{su}(2))$.

Remarque : Sous la décomposition qui précède, il y a donc une correspondence biunivoque

$$\mathcal{A}_X \leftrightarrow \{\tilde{u} : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathcal{A}_\Sigma \times \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_\Sigma) \times \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_\Sigma)\}$$

où $\tilde{u}(s,t) = (u(s,t), \phi_{s,t}, \psi_{s,t})$ pour $u(s,t) := A_{s,t}$. Remarquons que cette décomposition est indépendante du choix de section s_α sur Σ.

30.5 Forme de courbure :

Proposition : La forme de courbure F_A de A se décompose comme :

$$F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}s + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}t + (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi])\mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t$$

Preuve : Il suffit de décomposer $F_A^\sharp$ pour $A = \tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$ via l'équation structurelle d'Élie Cartan :

$$\begin{aligned}
F_A^\sharp &= \mathrm{d}|_{P_X} A + \frac{1}{2}[A \wedge A] \\
&= \mathrm{d}|_{P_X}(\tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) + \frac{1}{2}[(\tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) \wedge (\tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp)] \\
&= \mathrm{d}|_{P_X}\tilde{A} + \mathrm{d}|_{P_X}(\varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp) + \mathrm{d}|_{P_X}(\psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) \\
&\quad + \frac{1}{2}[\tilde{A} \wedge \tilde{A}] + \frac{1}{2}[\tilde{A} \wedge (\varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp)] + \frac{1}{2}[(\varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) \wedge \tilde{A}] \\
&\quad + \frac{1}{2}[(\varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp) \wedge (\psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp)] + \frac{1}{2}[(\psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) \wedge (\varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp)] \\
&= \mathrm{d}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\tilde{A} + \mathrm{d}s^\sharp \wedge \tilde{A}^{(s)} + \mathrm{d}t^\sharp \wedge \tilde{A}^{(t)} + (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\varphi^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp + \mathrm{d}t^\sharp \wedge (\varphi^\sharp)^{(t)} \wedge \mathrm{d}s^\sharp \\
&\quad + (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\psi^\sharp) \wedge \mathrm{d}t^\sharp + \mathrm{d}s^\sharp \wedge (\psi^\sharp)^{(s)} \wedge \mathrm{d}t^\sharp + \frac{1}{2}[\tilde{A} \wedge \tilde{A}] + [\tilde{A} \wedge (\varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp)] \\
&\quad + [(\varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp) \wedge (\psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp)] \\
&= F_{\tilde{A}}^\sharp - \tilde{A}^{(s)} \wedge \mathrm{d}s^\sharp - \tilde{A}^{(t)} \wedge \mathrm{d}t^\sharp + (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\varphi^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp - (\varphi^\sharp)^{(t)} \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
&\quad + (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\psi^\sharp) \wedge \mathrm{d}t^\sharp + (\psi^\sharp)^{(s)} \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp + [\tilde{A}, \varphi^\sharp] \wedge \mathrm{d}s^\sharp + [\tilde{A}, \psi^\sharp] \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
&\quad + [\varphi^\sharp, \psi^\sharp] \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
&= F_{\tilde{A}}^\sharp - \tilde{A}^{(s)} \wedge \mathrm{d}s^\sharp - \tilde{A}^{(t)} \wedge \mathrm{d}t^\sharp + (\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\varphi^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp - (\varphi^\sharp)^{(t)} \wedge \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
&\quad + (\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\psi^\sharp) \wedge \mathrm{d}t^\sharp + (\psi^\sharp)^{(s)} \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp + [\varphi^\sharp, \psi^\sharp] \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
&= F_{\tilde{A}}^\sharp + (\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\varphi^\sharp - \tilde{A}^{(s)}) \wedge \mathrm{d}s^\sharp + (\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \wedge \mathrm{d}t^\sharp \\
&\quad + ((\psi^\sharp)^{(s)} - (\varphi^\sharp)^{(t)} + [\varphi^\sharp, \psi^\sharp]) \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp
\end{aligned}$$

D'où

$$F_A^\sharp = F_{\tilde{A}}^\sharp + (\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\varphi^\sharp - \tilde{A}^{(s)}) \wedge \mathrm{d}s^\sharp + (\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\psi^\sharp - \tilde{A}^{(t)}) \wedge \mathrm{d}t^\sharp + ((\psi^\sharp)^{(s)} - (\varphi^\sharp)^{(t)} + [\varphi^\sharp, \psi^\sharp]) \mathrm{d}s^\sharp \wedge \mathrm{d}t^\sharp$$

D'où

$$F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t + (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi, \psi]) \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

□

30.6 Fonctionnelle de YM :

Notation : $\|\cdot\|^2_{g_{s,t}} := (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{g_{s,t}}$.

Proposition : La fonctionnelle de Yang-Mills se décompose comme :

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{YM}}(A) \;=\; & \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \|F_{A_{s,t}}\|^2_{g_{s,t}} \mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}t \\
& +\frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \|\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A^{(s)}_{s,t})_\sharp\|^2_{g_{s,t}} \mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}t \\
& +\frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \|\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A^{(t)}_{s,t})_\sharp\|^2_{g_{s,t}} \mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}t \\
& +\frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \|\psi^{(s)}_{s,t} - \varphi^{(t)}_{s,t} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]\|^2_{g_{s,t}} \mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Preuve : On vient de voir la décomposition de la courbure :

$$F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp)\wedge\mathrm{d}s + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\wedge\mathrm{d}t + (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi])\mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}t$$

En utilisant les divers résultats d'orthogonalités sur les formes différentielles (selon le nombre de ds et de dt), on calcule directement :

$$
\begin{aligned}
& S_{\mathrm{YM}}(A) \\
= \; & \frac{1}{2}(F_A, F_A)_g \\
= \; & \frac{1}{2}(F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t + (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi])\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t, \\
& F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t + (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi])\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t)_g \\
= \; & \frac{1}{2}(F_{\tilde{A}}, F_{\tilde{A}})_g + \frac{1}{2}((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s, (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s)_g \\
& + \frac{1}{2}((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t, (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t)_g \\
& + \frac{1}{2}((\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t, (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi])\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t)_g \\
= \; & \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} (F_{A_{s,t}}, F_{A_{s,t}})_{g_{s,t}} \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp, \mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp)_{g_{s,t}} \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp, \mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp)_{g_{s,t}} \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} (\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}], \psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}])_{g_{s,t}} \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
= \; & \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \|F_{A_{s,t}}\|_{g_{s,t}}^2 \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \|\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp\|_{g_{s,t}}^2 \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \|\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp\|_{g_{s,t}}^2 \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \|\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]\|_{g_{s,t}}^2 \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

□

Remarque : C'est cette fonctionnelle décomposée que je veux comparer à l'énergie symplectique de surfaces en $\mathcal{A}_\Sigma$ ou encore en $\mathcal{A}_\Sigma \times \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_\Sigma) \times \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_\Sigma)$ ou encore en $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$.

Remarque : Les normes $\|\cdot\|_{g_{s,t}}$ apparaissant dans les intégrales ne sont pas les mêmes. Sur

$$F_{A_{s,t}}$$

c'est la norme sur les 2-formes (i.e. éléments de $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_\Sigma)^*$). Sur

$$\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp$$

c'est la norme sur les 1-formes (i.e. éléments de $T_{A_{s,t}}\mathcal{A}_\Sigma$). Enfin, sur

$$\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]$$

c'est la norme sur les 0-formes (i.e. éléments de $\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_\Sigma)$).

Remarque : Interprétation des termes :

1. Le terme $\|F_{A_{s,t}}\|_{g_{s,t}}^2$ peut être vu comme un hamiltonien car c'est la fonctionnelle de Yang-Mills bidimensionnelle.
2. Les termes avec $A_{s,t}^{(s)}$ et $A_{s,t}^{(s)}$ semblent reliés à l'énergie symplectique (ou l'aire symplectique ?) via une fonctionnelle ayant pour lagrangien un truc qui ressemble à $\|u^{(s)}\|^2 + \|u^{(t)}\|^2$. J'ai calculé les équations d'Euler-Lagrange de ça et ça donne $\Delta u = 0$ pour $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ et $J = J_0$. En particulier, les $u : (\mathbb{R}^2, j_0) \to \mathbb{R}^{2n}$ tels que $\overline{\partial}_J u = 0$ sont un sous-ensemble des u tels que $\Delta u = 0$.
3. Le dernier terme est à interpréter.

30.7 Équation (1) de YM ($\mathbf{d}_A F_A = 0$) :

Rappel : Les équations de Yang-Mills sont

$$\mathrm{d}_A F_A = 0 \quad \text{et} \quad \delta_A F_A = 0$$

À quoi ressemblent-elles sous la décomposition $A = \tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$?

Proposition : L'équation de Bianchi $\mathrm{d}_A F_A = 0$ se décompose comme :

$$0 = (F_{\tilde{A}})^{(s)} - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\tilde{A}^{(s)})_\sharp$$

$$0 = (F_{\tilde{A}})^{(t)} - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\tilde{A}^{(t)})_\sharp$$

$$0 \;=\; (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi)^{(t)} - [(\tilde{A}^{(t)})_\sharp, \varphi] - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi^{(t)} - (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi)^{(s)} + [(\tilde{A}^{(s)})_\sharp, \psi] + \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi^{(s)}$$

Preuve : On vient de voir que la décomposition double de la forme de courbure F_A est :

$$F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t + (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi, \psi])\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

En utilisant les égalités sur la décomposition double de $\mathrm{d}_A|_X$:

$$\mathrm{d}_A|_X\alpha = \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\alpha + (-1)^k(\alpha^{(s)} + (\rho_*\varphi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}s + (-1)^k(\alpha^{(t)} + (\rho_*\psi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}_A|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}s) = (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s + (-1)^{k+1}(\alpha^{(t)} + (\rho_*\psi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}_A|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}t) = (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t + (-1)^k(\alpha^{(s)} + (\rho_*\varphi) \circ \alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}_A|_X(\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) = (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

on trouve :

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathrm{d}_A|_X F_A \\
&= \mathrm{d}_A|_X F_{\tilde{A}} \\
&\quad +\mathrm{d}_A|_X \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s\right) \\
&\quad +\mathrm{d}_A|_X \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&\quad +\mathrm{d}_A|_X \left((\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi])\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&= ((F_{\tilde{A}})^{(s)} + [\varphi, F_{\tilde{A}}]) \wedge \mathrm{d}s + ((F_{\tilde{A}})^{(t)} + [\psi, F_{\tilde{A}}]) \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad +(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp)) \wedge \mathrm{d}s \\
&\quad +((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp)^{(t)} + [\psi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp]) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad +(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)) \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad -((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)^{(s)} + [\varphi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp]) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad +(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi])) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= ((F_{\tilde{A}})^{(s)} + [\varphi, F_{\tilde{A}}]) \wedge \mathrm{d}s + ((F_{\tilde{A}})^{(t)} + [\psi, F_{\tilde{A}}]) \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad +((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}})^2\varphi - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s \\
&\quad +((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi)^{(t)} - (\tilde{A}^{(s,t)})_\sharp + [\psi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi] - [\psi, (\tilde{A}^{(s)})_\sharp]) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad +((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}})^2\psi - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad -((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi)^{(s)} - (\tilde{A}^{(s,t)})_\sharp + [\varphi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi] - [\varphi, (\tilde{A}^{(t)})_\sharp]) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad +(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi^{(s)} - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi^{(t)} + \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}[\varphi,\psi]) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= ((F_{\tilde{A}})^{(s)} + [\varphi, F_{\tilde{A}}]) \wedge \mathrm{d}s + ((F_{\tilde{A}})^{(t)} + [\psi, F_{\tilde{A}}]) \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad +([F_{\tilde{A}}, \varphi] - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s \\
&\quad +((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi)^{(t)} + [\psi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi] - [\psi, (\tilde{A}^{(s)})_\sharp]) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad +([F_{\tilde{A}}, \psi] - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad -((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi)^{(s)} + [\varphi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi] - [\varphi, (\tilde{A}^{(t)})_\sharp]) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad +(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi^{(s)} - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi^{(t)} + [\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi, \psi] + [\varphi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi]) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= ((F_{\tilde{A}})^{(s)} - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s + ((F_{\tilde{A}})^{(t)} - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad +((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi)^{(t)} - [(\tilde{A}^{(t)})_\sharp, \varphi] - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi^{(t)}) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad -((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi)^{(s)} - [(\tilde{A}^{(s)})_\sharp, \psi] - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi^{(s)}) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Ce qui implique trois égalités :

$$0 = (F_{\tilde{A}})^{(s)} - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\tilde{A}^{(s)})_\sharp$$

$$0 = (F_{\tilde{A}})^{(t)} - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\tilde{A}^{(t)})_\sharp$$

$$0 = (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi)^{(t)} - [(\tilde{A}^{(t)})_\sharp, \varphi] - \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi^{(t)} - (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi)^{(s)} + [(\tilde{A}^{(s)})_\sharp, \psi] + \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi^{(s)}$$

□

Remarque : Les deux premières égalités obtenues par la décomposition double de $0 = \mathrm{d}_A F_A$ sont déjà connues :

$$(F_{\tilde{A}})^{(s)} = \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\tilde{A}^{(s)})_\sharp$$

$$(F_{\tilde{A}})^{(t)} = \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\tilde{A}^{(t)})_\sharp$$

En effet, ces deux équations sont triviales en utilisant l'identité de Bianchi sur P_Σ :

$$\begin{aligned}
\left(F^\sharp_{A_{s,t}}\right)^{(s)} - \mathrm{d}^{A_{s,t}}A^{(s)}_{s,t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathrm{d}A_{s,t} + \frac{1}{2}[A_{s,t} \wedge A_{s,t}]\right) - \mathrm{d}A^{(s)}_{s,t} - [A_{s,t} \wedge A^{(s)}_{s,t}] \\
&= \mathrm{d}A^{(s)}_{s,t} + \frac{1}{2}[A^{(s)}_{s,t} \wedge A_{s,t}] + \frac{1}{2}[A_{s,t} \wedge A^{(s)}_{s,t}] - \mathrm{d}A^{(s)}_{s,t} - [A_{s,t} \wedge A^{(s)}_{s,t}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(F^\sharp_{A_{s,t}}\right)^{(t)} - \mathrm{d}^{A_{s,t}}A^{(t)}_{s,t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{d}A_{s,t} + \frac{1}{2}[A_{s,t} \wedge A_{s,t}]\right) - \mathrm{d}A^{(t)}_{s,t} - [A_{s,t} \wedge A^{(t)}_{s,t}] \\
&= \mathrm{d}A^{(t)}_{s,t} + \frac{1}{2}[A^{(t)}_{s,t} \wedge A_{s,t}] + \frac{1}{2}[A_{s,t} \wedge A^{(t)}_{s,t}] - \mathrm{d}A^{(t)}_{s,t} - [A_{s,t} \wedge A^{(t)}_{s,t}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

La troisième égalité de la décomposition double de $0 = \mathrm{d}_A F_A$ découlent des deux égalités suivantes :

$$(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi)^{(t)} = \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi^{(t)} + [(\tilde{A}^{(t)})_\sharp, \varphi]$$

$$(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi)^{(s)} = \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi^{(s)} + [(\tilde{A}^{(s)})_\sharp, \psi]$$

En effet :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi)^{(t)} &= \left((\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\varphi^\sharp)^{(t)}\right)_\sharp \\
&= \left((\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\varphi^\sharp + [\tilde{A},\varphi^\sharp])^{(t)}\right)_\sharp \\
&= \left((\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\varphi^\sharp)^{(t)} + [\tilde{A},\varphi^\sharp]^{(t)}\right)_\sharp \\
&= \left(\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}(\varphi^\sharp)^{(t)} + [\tilde{A},(\varphi^\sharp)^{(t)}] + [\tilde{A}^{(t)},\varphi^\sharp]\right)_\sharp \\
&= \left(\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}(\varphi^\sharp)^{(t)} + [\tilde{A}^{(t)},\varphi^\sharp]\right)_\sharp \\
&= \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi^{(t)} + [(\tilde{A}^{(t)})_\sharp,\varphi]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi)^{(s)} &= \left((\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\psi^\sharp)^{(s)}\right)_\sharp \\
&= \left((\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\psi^\sharp + [\tilde{A},\psi^\sharp])^{(s)}\right)_\sharp \\
&= \left((\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}\psi^\sharp)^{(s)} + [\tilde{A},\psi^\sharp]^{(s)}\right)_\sharp \\
&= \left(\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}(\psi^\sharp)^{(s)} + [\tilde{A},(\psi^\sharp)^{(s)}] + [\tilde{A}^{(s)},\psi^\sharp]\right)_\sharp \\
&= \left(\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{\Sigma_{s,t}}}(\psi^\sharp)^{(s)} + [\tilde{A}^{(s)},\psi^\sharp]\right)_\sharp \\
&= \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi^{(s)} + [(\tilde{A}^{(s)})_\sharp,\psi]
\end{aligned}$$

La double décomposition de la première équation de Yang-Mills (i.e. Bianchi) sur X ne nous apporte donc rien de nouveau.

30.8 Équation (2) de YM ($\delta_A F_A = 0$) :

Proposition : La double décomposition de l'équation de Yang-Mills $\delta_A F_A = 0$ est donnée par les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned}
0 = {} & \delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}}F_{\tilde{A}} \\
& - \star_{\tilde{g}}\left(\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp)\right)^{(s)} + [\varphi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp] \\
& - \star_{\tilde{g}}\left(\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right)^{(t)} + [\psi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \\ &\quad + \star_{\tilde{g}}\,(\star_{\tilde{g}}(\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]))^{(t)} + [\psi, \psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \\ &\quad - \star_{\tilde{g}}\,(\star_{\tilde{g}}(\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]))^{(s)} - [\varphi, \psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]] \end{aligned}$$

Preuve : Souvenons-nous que la double décomposition de la forme de courbure F_A est donnée par :

$$F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}s + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}t + (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi])\mathrm{d}s\wedge\mathrm{d}t$$

En utilisant les égalités sur la décomposition double de $\delta_A|_X$:

$$\delta_{A,g}|_X\alpha = \delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}}\alpha$$

$$\delta_{A,g}|_X(\alpha\wedge \mathrm{d}s) = (\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}}\alpha)\wedge \mathrm{d}s + (-1)^{nk+1}s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(s)} + (-1)^{k+1}(\rho_*\varphi)\circ\alpha$$

$$\delta_{A,g}|_X(\alpha\wedge \mathrm{d}t) = (\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}}\alpha)\wedge \mathrm{d}t + (-1)^{nk+1}s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (-1)^{k+1}(\rho_*\psi)\circ\alpha$$

$$\begin{aligned} \delta_{A,g}|_X(\alpha\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t) &= (\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}}\alpha)\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t \\ &\quad + ((-1)^{nk+1}s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(s)} + (-1)^{k+1}(\rho_*\varphi)\circ\alpha)\wedge \mathrm{d}t \\ &\quad + ((-1)^{nk}s_g \star_{\tilde{g}} (\star_{\tilde{g}}\alpha)^{(t)} + (-1)^{k}(\rho_*\psi)\circ\alpha)\wedge \mathrm{d}s \end{aligned}$$

on calcule directement :

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta_{A,g}|_X F_A \\
&= \delta_{A,g}|_X F_{\tilde{A}} \\
&\quad +\delta_{A,g}|_X \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s \right) \\
&\quad +\delta_{A,g}|_X \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t \right) \\
&\quad +\delta_{A,g}|_X \left((\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi])\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \right) \\
&= \delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}} F_{\tilde{A}} \\
&\quad +(\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp)) \wedge \mathrm{d}s \\
&\quad - \star_{\tilde{g}}\, (\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp))^{(s)} + [\varphi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp] \\
&\quad +(\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)) \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad - \star_{\tilde{g}}\, (\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp))^{(t)} + [\psi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp] \\
&\quad -(\star_{\tilde{g}}(\star_{\tilde{g}}(\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]))^{(s)} + [\varphi, (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi])]) \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad +(\star_{\tilde{g}}(\star_{\tilde{g}}(\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]))^{(t)} + [\psi, (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi])]) \wedge \mathrm{d}s \\
&= \delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}} F_{\tilde{A}} \\
&\quad - \star_{\tilde{g}}\, (\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp))^{(s)} + [\varphi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp] \\
&\quad - \star_{\tilde{g}}\, (\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp))^{(t)} + [\psi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp] \\
&\quad +(\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp)) \wedge \mathrm{d}s \\
&\quad +(\star_{\tilde{g}}(\star_{\tilde{g}}(\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]))^{(t)} + [\psi, \psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]]) \wedge \mathrm{d}s \\
&\quad +(\delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)) \wedge \mathrm{d}t \\
&\quad -(\star_{\tilde{g}}(\star_{\tilde{g}}(\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]))^{(s)} + [\varphi, \psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]]) \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Ce qui implique les trois égalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}} F_{\tilde{A}} \\
&\quad - \star_{\tilde{g}}\, (\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp))^{(s)} + [\varphi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp] \\
&\quad - \star_{\tilde{g}}\, (\star_{\tilde{g}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp))^{(t)} + [\psi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \\
&\quad + \star_{\tilde{g}}\, (\star_{\tilde{g}}(\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]))^{(t)} + [\psi, \psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta_{\tilde{A},\tilde{g}}|_{\Sigma_{s,t}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \\
&\quad - \star_{\tilde{g}}\,(\star_{\tilde{g}}(\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]))^{(s)} - [\varphi, \psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]]
\end{aligned}
$$

□

Corollaire : La décomposition double de l'équation de Yang-Mills $\delta_{A,g}|_X F_A = 0$ se réécrit sur Σ comme les trois équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}} F_{A_{s,t}} \\
&\quad - \star_{g_{s,t}}\,(\star_{g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp))^{(s)} + [\varphi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp] \\
&\quad - \star_{g_{s,t}}\,(\star_{g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp))^{(t)} + [\psi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp) \\
&\quad + \star_{g_{s,t}}\,(\star_{g_{s,t}}(\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]))^{(t)} + [\psi_{s,t}, \psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp) \\
&\quad - \star_{g_{s,t}}\,(\star_{g_{s,t}}(\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]))^{(s)} - [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]]
\end{aligned}
$$

Preuve : Il suffit de tirer tous les objets à Σ via $\iota_{s,t} : \Sigma \hookrightarrow X$. □

Proposition : Si $\tilde{g}$ est constante en s et t, alors les trois équations obtenues par décomposition double de l'équation de Yang-Mills $\delta_A F_A = 0$ sont données par :

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}} F_{A_{s,t}} - (A_{s,t}^{(s,s)})_\sharp - (A_{s,t}^{(t,t)})_\sharp \\
&\quad + \mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t}^{(s)} + 2[(A_{s,t}^{(s)}), \varphi_{s,t}] + [\varphi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t}] \\
&\quad + \mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t}^{(t)} + 2[(A_{s,t}^{(t)}), \psi_{s,t}] + [\psi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp) + \psi_{s,t}^{(s,t)} - \varphi_{s,t}^{(t,t)} \\
&\quad + 2[\varphi_{s,t}^{(t)}, \psi_{s,t}] + [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}^{(t)}] + [\psi_{s,t}, \psi_{s,t}^{(s)}] + [\psi_{s,t}, [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp) - \psi_{s,t}^{(s,s)} + \varphi_{s,t}^{(s,t)} \\
&\quad - [\varphi_{s,t}^{(s)}, \psi_{s,t}] - 2[\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}^{(s)}] - [\varphi_{s,t}, \varphi_{s,t}^{(t)}] + [\varphi_{s,t}, [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]]
\end{aligned}
$$

Preuve : Supposons $\tilde{g}$ constante en s et en t. Alors $\star_{\tilde{g}}$ commute avec $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. On développe la première équation :

$$\begin{aligned}
0 &= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}} F_{A_{s,t}} \\
&\quad - \star_{g_{s,t}} (\star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp))^{(s)} + [\varphi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp] \\
&\quad - \star_{g_{s,t}} (\star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp))^{(t)} + [\psi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}} F_{A_{s,t}} \\
&\quad -(\star^2_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp))^{(s)} + [\varphi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp] \\
&\quad -(\star^2_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp))^{(t)} + [\psi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}} F_{A_{s,t}} \\
&\quad +(\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp)^{(s)} + [\varphi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp] \\
&\quad +(\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp)^{(t)} + [\psi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}} F_{A_{s,t}} \\
&\quad +(\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t})^{(s)} - (A_{s,t}^{(s,s)})_\sharp + [\varphi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp] \\
&\quad +(\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t})^{(t)} - (A_{s,t}^{(t,t)})_\sharp + [\psi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}} F_{A_{s,t}} - (A_{s,t}^{(s,s)})_\sharp - (A_{s,t}^{(t,t)})_\sharp \\
&\quad +(\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t})^{(s)} + [\varphi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t}] - [\varphi_{s,t}, (A_{s,t}^{(s)})_\sharp] \\
&\quad +(\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t})^{(t)} + [\psi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t}] - [\psi_{s,t}, (A_{s,t}^{(t)})_\sharp] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}} F_{A_{s,t}} - (A_{s,t}^{(s,s)})_\sharp - (A_{s,t}^{(t,t)})_\sharp \\
&\quad +\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t}^{(s)} + [(A_{s,t}^{(s)}), \varphi_{s,t}] + [\varphi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t}] - [\varphi_{s,t}, (A_{s,t}^{(s)})_\sharp] \\
&\quad +\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t}^{(t)} + [(A_{s,t}^{(t)}), \psi_{s,t}] + [\psi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t}] - [\psi_{s,t}, (A_{s,t}^{(t)})_\sharp] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}} F_{A_{s,t}} - (A_{s,t}^{(s,s)})_\sharp - (A_{s,t}^{(t,t)})_\sharp \\
&\quad +\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t}^{(s)} + 2[(A_{s,t}^{(s)}), \varphi_{s,t}] + [\varphi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t}] \\
&\quad +\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t}^{(t)} + 2[(A_{s,t}^{(t)}), \psi_{s,t}] + [\psi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t}]
\end{aligned}$$

La seconde équation devient :

$$\begin{aligned}
0 &= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp) \\
&\quad + \star_{g_{s,t}}(\star_{g_{s,t}}(\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]))^{(t)} + [\psi_{s,t},\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp) \\
&\quad +(\star_{g_{s,t}}^2(\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]))^{(t)} + [\psi_{s,t},\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp) \\
&\quad +(\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}])^{(t)} + [\psi_{s,t},\psi_{s,t}^{(s)}] - [\psi_{s,t},\varphi_{s,t}^{(t)}] + [\psi_{s,t},[\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp) \\
&\quad +\psi_{s,t}^{(s,t)} - \varphi_{s,t}^{(t,t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]^{(t)} + [\psi_{s,t},\psi_{s,t}^{(s)}] - [\psi_{s,t},\varphi_{s,t}^{(t)}] + [\psi_{s,t},[\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp) + \psi_{s,t}^{(s,t)} - \varphi_{s,t}^{(t,t)} \\
&\quad +[\varphi_{s,t}^{(t)},\psi_{s,t}] + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}^{(t)}] + [\psi_{s,t},\psi_{s,t}^{(s)}] - [\psi_{s,t},\varphi_{s,t}^{(t)}] + [\psi_{s,t},[\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp) + \psi_{s,t}^{(s,t)} - \varphi_{s,t}^{(t,t)} \\
&\quad +2[\varphi_{s,t}^{(t)},\psi_{s,t}] + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}^{(t)}] + [\psi_{s,t},\psi_{s,t}^{(s)}] + [\psi_{s,t},[\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]]
\end{aligned}$$

La troisième équation devient :

$$\begin{aligned}
0 &= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp) \\
&\quad - \star_{g_{s,t}}(\star_{g_{s,t}}(\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]))^{(s)} - [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp) \\
&\quad -(\star_{g_{s,t}}^2(\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]))^{(s)} - [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp) \\
&\quad -(\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}])^{(s)} - [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}^{(s)}] - [\varphi_{s,t},\varphi_{s,t}^{(t)}] + [\varphi_{s,t},[\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp) \\
&\quad -\psi_{s,t}^{(s,s)} + \varphi_{s,t}^{(s,t)} - [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]^{(s)} - [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}^{(s)}] - [\varphi_{s,t},\varphi_{s,t}^{(t)}] + [\varphi_{s,t},[\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp) - \psi_{s,t}^{(s,s)} + \varphi_{s,t}^{(s,t)} \\
&\quad -[\varphi_{s,t}^{(s)},\psi_{s,t}] - [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}^{(s)}] - [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}^{(s)}] - [\varphi_{s,t},\varphi_{s,t}^{(t)}] + [\varphi_{s,t},[\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]] \\
&= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp) - \psi_{s,t}^{(s,s)} + \varphi_{s,t}^{(s,t)} \\
&\quad -[\varphi_{s,t}^{(s)},\psi_{s,t}] - 2[\varphi_{s,t},\psi_{s,t}^{(s)}] - [\varphi_{s,t},\varphi_{s,t}^{(t)}] + [\varphi_{s,t},[\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]]
\end{aligned}$$

□

Remarque : La dernière proposition pour le cas $g_{s,t}$ constante en s et t ne semble pas particulièrement plus simple ou utile que le cas général où $g_{s,t}$ dépend de s et t.

Remarque : Les termes $\delta_{A_{s,t},g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t}$ et $\delta_{A_{s,t},g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t}$ peuvent se réécrire $\Delta_{A_{s,t},g_{s,t}} \varphi_{s,t}$ et $\Delta_{A_{s,t},g_{s,t}} \psi_{s,t}$ pour $\Delta_{A_{s,t},g_{s,t}} = \delta_{A_{s,t},g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} + \mathrm{d}_{A_{s,t}} \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}$ car $\varphi_{s,t}$ et $\psi_{s,t}$ sont des 0-formes.

Proposition : Si $A_{s,t} = A_{0,0}$, $\varphi_{s,t} = \varphi_{0,0}$, $\psi_{s,t} = \psi_{0,0}$, $g_{s,t} = g_{0,0}$ sont constants, alors la décomposition double de l'équation de YM vue sur Y s'écrit :

$$\delta_{A_{0,0},g_{0,0}} F_{A_{0,0}} = [\mathrm{d}_{A_{0,0}} \varphi_{0,0}, \varphi_{0,0}] + [\mathrm{d}_{A_{0,0}} \psi_{0,0}, \psi_{0,0}]$$

$$\Delta_{A_{0,0},g_{0,0}} \varphi_{0,0} = [[\varphi_{0,0}, \psi_{0,0}], \psi_{0,0}]$$

$$\Delta_{A_{0,0},g_{0,0}} \psi_{0,0} = [[\varphi_{0,0}, \psi_{0,0}], \varphi_{0,0}]$$

Preuve : Il suffit de mettre $A_{s,t} = A_{0,0}$, $\varphi_{s,t} = \varphi_{0,0}$, $\psi_{s,t} = \psi_{0,0}$, $g_{s,t} = g_{0,0}$ dans la décomposition pour le cas $g_{s,t}$ constant en s, t. □

Remarque : Ceci semble concorder avec le cas A_t, g_t, ψ_t constants dans la décomposition simple de Yang-Mils (i.e. les équations Yang-Mill-Higgs) :

$$\delta_{A_0} F_{A_0} = \left[\mathrm{d}_{A_0} \psi_0, \psi_0\right]$$

$$\Delta_{A_0} \psi_0 = 0$$

En effet, si on met $\varphi_{0,0}$ nul dans nos trois équations

$$\delta_{A_{0,0},g_{0,0}} F_{A_{0,0}} = [\mathrm{d}_{A_{0,0}} \varphi_{0,0}, \varphi_{0,0}] + [\mathrm{d}_{A_{0,0}} \psi_{0,0}, \psi_{0,0}]$$

$$\Delta_{A_{0,0},g_{0,0}} \varphi_{0,0} = [[\varphi_{0,0}, \psi_{0,0}], \psi_{0,0}]$$

$$\Delta_{A_{0,0},g_{0,0}} \psi_{0,0} = [[\varphi_{0,0}, \psi_{0,0}], \varphi_{0,0}]$$

on trouve :

$$\delta_{A_{0,0},g_{0,0}} F_{A_{0,0}} = [\mathrm{d}_{A_{0,0}} \psi_{0,0}, \psi_{0,0}]$$

$$\Delta_{A_{0,0},g_{0,0}} \psi_{0,0} = 0$$

qui est essentiellement Yang-Mills-Higgs (sur Σ^2 et non Y^3). La question se pose néanmoins à savoir si nos trois équations découlent d'une fonctionnelle de Yang-Mills-Higgs ayant deux champs de Higgs sur Σ du type

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{YMH}}(A_{0,0}, \varphi_{0,0}, \psi_{0,0}) &= \frac{1}{2}(\delta_{A_{0,0},g_{0,0}} F_{A_{0,0}}, \delta_{A_{0,0},g_{0,0}} F_{A_{0,0}})_{g_{0,0}} \\ &+\frac{1}{2}(\mathrm{d}_{A_{0,0}}\varphi_{0,0}, \mathrm{d}_{A_{0,0}}\varphi_{0,0})_{g_{0,0}} \\ &+\frac{1}{2}(\mathrm{d}_{A_{0,0}}\psi_{0,0}, \mathrm{d}_{A_{0,0}}\psi_{0,0})_{g_{0,0}} \end{aligned}$$

ou s'il y a un terme de plus avec des crochets de $\varphi_{0,0}$ et de $\psi_{0,0}$, ou encore quelque chose comme :

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{YMH}}(A_{0,0}, \varphi_{0,0}, \psi_{0,0}) &= \frac{1}{2}(\delta_{A_{0,0},g_{0,0}} F_{A_{0,0}}, \delta_{A_{0,0},g_{0,0}} F_{A_{0,0}})_{g_{0,0}} \\ &+\frac{1}{2}(\mathrm{d}_{A_{0,0}}(\varphi_{0,0}+\psi_{0,0}), \mathrm{d}_{A_{0,0}}(\varphi_{0,0}+\psi_{0,0}))_{g_{0,0}} \end{aligned}$$

Bref, à déterminer quand j'aurai le temps.

30.9 Instantons :

Proposition : La décomposition double d'instantons (anti-)auto-duaux $\star_g F_A = \pm F_A$ est donnée par :

$$\star_{\tilde{g}} F_{\tilde{A}} = \pm\left(\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi, \psi]\right)$$

$$\star_{\tilde{g}}\left(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp\right) = -\pm\left(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp\right)$$

Preuve : Souvenons-nous de la proposition disant que

$$\alpha = \beta + \gamma \wedge \mathrm{d}s + \mu \wedge \mathrm{d}t + \nu \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

pour β, γ, μ, ν ne contenant ni de ds ni de dt est (anti-)auto-duale $\star_g \alpha = \pm\alpha$ si et seulement si les deux égalité suivantes sont satisfaites :

$$\star_{\tilde{g}}\beta = \pm\nu$$

$$\star_{\tilde{g}}\gamma = \pm(-1)^{k+1}\mu$$

Considérons la décomposition double

$$F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}s + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}t + (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi])\mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t$$

de la courbure F_A. En prenant

$$\begin{aligned} \alpha &= F_A \\ \beta &= F_{\tilde{A}} \\ \gamma &= \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp \\ \mu &= \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp \\ \nu &= \psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi] \end{aligned}$$

on trouve directement que $\star_g F_A = \pm F_A$ si et seulement si :

$$\star_{\tilde{g}} F_{\tilde{A}} = \pm\left(\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi]\right)$$

$$\star_{\tilde{g}}\left(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp\right) = -\pm\left(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp\right)$$

□

Remarque : En tirant les objets à Σ via $\iota_{s,t} : \Sigma \hookrightarrow X$, l'équation $\star_g F_A = \pm F_A$ est vérifiée si et seulement si :

$$\star_{g_{s,t}} F_{A_{s,t}} = \pm\left(\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]\right)$$

$$\star_{g_{s,t}}\left(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp\right) = -\pm\left(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp\right)$$

Remarque : Le cas ASD $\star_g F_A = -F_A$ donne :

$$\star_{g_{s,t}} F_{A_{s,t}} = \varphi_{s,t}^{(t)} - \psi_{s,t}^{(s)} - [\varphi_{s,t},\psi_{s,t}]$$

$$\star_{g_{s,t}}\left(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp\right) = \mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp$$

est très exactement les équations usuelles de Salamon.

Remarque : Le cas ASD indépendant du temps $A_{s,t} = A_{0,0}, \varphi_{s,t} = \varphi_{0,0}, \psi_{s,t} = \psi_{0,0}$ et $g_{s,t} = g_{0,0}$ est :

$$\star_{g_{0,0}} F_{A_{0,0}} = -[\varphi_{0,0},\psi_{0,0}]$$

$$\star_{g_{0,0}}\mathrm{d}_{A_{0,0}}\varphi_{0,0} = \mathrm{d}_{A_{0,0}}\psi_{0,0}$$

Cette équation décrit quoi ? Le cas similaire en décomposition simple indépendante du temps était les équations de Bogomol'ny de monopoles magnétiques. Mais cette décomposition double indépendante du temps c'est quelle équation ?

30.10 Vérification ASD dans YM :

Proposition : L'équation ASD en décomposition double vérifie l'équation de YM en décomposition double.

Preuve : On a vu que la décomposition simple de l'équation de YM $\delta_A|_X F_A = 0$ est donnée par les trois équations suivantes sur Σ :

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}} F_{A_{s,t}} \\ &\quad - \star_{g_{s,t}} (\star_{g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A^{(s)}_{s,t})_\sharp))^{(s)} + [\varphi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A^{(s)}_{s,t})_\sharp] \\ &\quad - \star_{g_{s,t}} (\star_{g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A^{(t)}_{s,t})_\sharp))^{(t)} + [\psi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A^{(t)}_{s,t})_\sharp] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A^{(s)}_{s,t})_\sharp) \\ &\quad + \star_{g_{s,t}} (\star_{g_{s,t}}(\psi^{(s)}_{s,t} - \varphi^{(t)}_{s,t} + [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]))^{(t)} + [\psi_{s,t}, \psi^{(s)}_{s,t} - \varphi^{(t)}_{s,t} + [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{A_{s,t},g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A^{(t)}_{s,t})_\sharp) \\ &\quad - \star_{g_{s,t}} (\star_{g_{s,t}}(\psi^{(s)}_{s,t} - \varphi^{(t)}_{s,t} + [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]))^{(s)} - [\varphi_{s,t}, \psi^{(s)}_{s,t} - \varphi^{(t)}_{s,t} + [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]] \end{aligned}$$

On a aussi vu que la décomposition simple de l'équation ASD $\star_g F_A = -F_A$ est donnée par les deux équations

$$\star_{g_{s,t}} F_{A_{s,t}} = \varphi^{(t)}_{s,t} - \psi^{(s)}_{s,t} - [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]$$

$$\star_{g_{s,t}} \left(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A^{(s)}_{s,t})_\sharp\right) = \mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A^{(t)}_{s,t})_\sharp$$

sur Σ. Supposons ces deux dernières égalités vraies. Vérifions la première des trois égalités à démontrer :

$$
\begin{aligned}
& \delta_{A_{s,t},g_{s,t}} F_{A_{s,t}} \\
& - \star_{g_{s,t}} (\star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp))^{(s)} + [\varphi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp] \\
& - \star_{g_{s,t}} (\star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp))^{(t)} + [\psi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp] \\
= \; & - \star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} \star_{g_{s,t}} F_{A_{s,t}} \\
& - \star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp)^{(s)} + [\varphi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp] \\
& - \star_{g_{s,t}} (\star_{g_{s,t}}^2 (\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp))^{(t)} + [\psi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp] \\
= \; & - \star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} (\varphi_{s,t}^{(t)} - \psi_{s,t}^{(s)} - [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]) \\
& - \star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp)^{(s)} + [\varphi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t}] - [\varphi_{s,t}, (A_{s,t}^{(s)})_\sharp] \\
& + \star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp)^{(t)} + [\psi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t}] - [\psi_{s,t}, (A_{s,t}^{(t)})_\sharp] \\
= \; & - \star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} (\varphi_{s,t}^{(t)}) + \star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} (\psi_{s,t}^{(s)}) + \star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}] \\
& - \star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t})^{(s)} + \star_{g_{s,t}} (A_{s,t}^{(s,t)})_\sharp - [\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t}, \varphi_{s,t}] + [(A_{s,t}^{(s)})_\sharp, \varphi_{s,t}] \\
& + \star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t})^{(t)} - \star_{g_{s,t}} (A_{s,t}^{(s,t)})_\sharp - [\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t}, \psi_{s,t}] + [(A_{s,t}^{(t)})_\sharp, \psi_{s,t}] \\
= \; & - \star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} (\varphi_{s,t}^{(t)}) + \star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} (\psi_{s,t}^{(s)}) + \star_{g_{s,t}} [\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t}, \psi_{s,t}] + \star_{g_{s,t}} [\varphi_{s,t}, \mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t}] \\
& - \star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} (\psi_{s,t}^{(s)}) - \star_{g_{s,t}} [(A_{s,t}^{(s)})_\sharp, \psi_{s,t}] - [\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t}, \varphi_{s,t}] + [(A_{s,t}^{(s)})_\sharp, \varphi_{s,t}] \\
& + \star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} (\varphi_{s,t}^{(t)}) + \star_{g_{s,t}} [(A_{s,t}^{(t)})_\sharp, \varphi_{s,t}] - [\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t}, \psi_{s,t}] + [(A_{s,t}^{(t)})_\sharp, \psi_{s,t}] \\
= \; & [\star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t}, \psi_{s,t}] - [\star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t}, \varphi_{s,t}] \\
& - [\star_{g_{s,t}} (A_{s,t}^{(s)})_\sharp, \psi_{s,t}] - [\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t}, \varphi_{s,t}] + [(A_{s,t}^{(s)})_\sharp, \varphi_{s,t}] \\
& + [\star_{g_{s,t}} (A_{s,t}^{(t)})_\sharp, \varphi_{s,t}] - [\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t}, \psi_{s,t}] + [(A_{s,t}^{(t)})_\sharp, \psi_{s,t}] \\
= \; & [\star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp), \psi_{s,t}] + [- \star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp), \varphi_{s,t}] \\
& - [\mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp, \psi_{s,t}] - [\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp, \varphi_{s,t}] \\
= \; & 0
\end{aligned}
$$

La première équation de YM doublement décomposée est donc vérifiée par l'équation ASD doublement décomposée. Montrons maintenant que la seconde égalité de la décomposition double de l'équation de YM est vérifiée :

$$\begin{aligned}
& \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp) \\
& + \star_{g_{s,t}} (\star_{g_{s,t}}(\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]))^{(t)} + [\psi_{s,t}, \psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]] \\
= \ & - \star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} \star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp) \\
& + \star_{g_{s,t}} (\star_{g_{s,t}}(- \star_{g_{s,t}} F_{A_{s,t}}))^{(t)} + [\psi_{s,t}, - \star_{g_{s,t}} F_{A_{s,t}}] \\
= \ & - \star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp) - \star_{g_{s,t}}(\star_{g_{s,t}}^2(F_{A_{s,t}}))^{(t)} + [\star_{g_{s,t}}F_{A_{s,t}}, \psi_{s,t}] \\
= \ & - \star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}}^2\psi_{s,t} + \star_{g_{s,t}}\mathrm{d}_{A_{s,t}}(A_{s,t}^{(t)})_\sharp - \star_{g_{s,t}}(F_{A_{s,t}})^{(t)} + \star_{g_{s,t}}[F_{A_{s,t}}, \psi_{s,t}] \\
= \ & - \star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}}^2\psi_{s,t} + \star_{g_{s,t}}(F_{A_{s,t}})^{(t)} - \star_{g_{s,t}}(F_{A_{s,t}})^{(t)} + \star_{g_{s,t}}\mathrm{d}_{A_{s,t}}^2\psi_{s,t} \\
= \ & 0
\end{aligned}$$

Montrons enfin que la troisième égalité à vérifier l'est :

$$\begin{aligned}
& \delta_{A_{s,t},g_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp) \\
& - \star_{g_{s,t}} (\star_{g_{s,t}}(\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]))^{(s)} - [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]] \\
= \ & - \star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} \star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp) \\
& - \star_{g_{s,t}} (\star_{g_{s,t}}(- \star_{g_{s,t}} F_{A_{s,t}}))^{(s)} - [\varphi_{s,t}, - \star_{g_{s,t}} F_{A_{s,t}}] \\
= \ & \star_{g_{s,t}}\mathrm{d}_{A_{s,t}}(\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp) + \star_{g_{s,t}}(\star_{g_{s,t}}^2 F_{A_{s,t}})^{(s)} - [\star_{g_{s,t}}F_{A_{s,t}}, \varphi_{s,t}] \\
= \ & \star_{g_{s,t}}\mathrm{d}_{A_{s,t}}^2\varphi_{s,t} - \star_{g_{s,t}}\mathrm{d}_{A_{s,t}}(A_{s,t}^{(s)})_\sharp + \star_{g_{s,t}}(F_{A_{s,t}})^{(s)} - \star_{g_{s,t}}[F_{A_{s,t}}, \varphi_{s,t}] \\
= \ & \star_{g_{s,t}}\mathrm{d}_{A_{s,t}}^2\varphi_{s,t} - \star_{g_{s,t}}(F_{A_{s,t}})^{(s)} + \star_{g_{s,t}}(F_{A_{s,t}})^{(s)} - \star_{g_{s,t}}\mathrm{d}_{A_{s,t}}^2\varphi_{s,t} \\
= \ & 0
\end{aligned}$$

□

30.11 Conditions au bords pour $A_{s,t}$ si $A \in \mathcal{A}_{X,\partial X}^-$:

Plus haut je me suis questionné sur une éventuelle condition au bord $(\star_g F_A)|_{\partial X} = 0$. Regardons cette condition lors de la décomposition de la courbure.

Proposition : La condition au bord $(\star_g F_A)|_{\partial X} = 0$ sur $X = \Sigma[0,1] \times \mathbb{R}$ se décompose comme :

$$\mathrm{d}_{A_{0,t}}\varphi_{0,t} = (A_{0,t}^{(s)})_\sharp$$

$$\mathrm{d}_{A_{1,t}}\varphi_{1,t} = (A_{1,t}^{(s)})_\sharp$$
$$\psi_{0,t}^{(s)} - \varphi_{0,t}^{(t)} + [\varphi_{0,t}, \psi_{0,t}] = 0$$
$$\psi_{1,t}^{(s)} - \varphi_{1,t}^{(t)} + [\varphi_{1,t}, \psi_{1,t}] = 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve : La courbure se décompose comme :

$$F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}s + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}t + (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi, \psi])\mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t$$

En utilisant la proposition sur le Hodge star en double décomposition pour $\star_g(\alpha), \star_g(\alpha\wedge \mathrm{d}s), \star_g(\alpha\wedge \mathrm{d}t), \star_g(\alpha\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t)$ sans ds ni dt, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\star_g F_A \quad = \quad & (\star_{\tilde{g}} F_{\tilde{A}})\wedge \mathrm{d}s\wedge \mathrm{d}t \\
& -(\star_{\tilde{g}}\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - \star_{\tilde{g}}(\tilde{A}^{(s)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}t \\
& +(\star_{\tilde{g}}\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - \star_{\tilde{g}}(\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}s \\
& + \star_{\tilde{g}}\,\psi^{(s)} - \star_{\tilde{g}}\varphi^{(t)} + \star_{\tilde{g}}[\varphi, \psi]
\end{aligned}$$

où les termes entre parenthèses sont sans ds ni dt. Maintenant, le bord de $X = \Sigma\times[0,1]\times\mathbb{R}$ est

$$\partial X = (\Sigma\times\{0\}\times\mathbb{R}) \sqcup (\Sigma\times\{1\}\times\mathbb{R})$$

i.e. le bord est à $s = 0$ et à $s = 1$. La contrainte $(\star_g F_A)|_{\partial X} = 0$ implique alors les deux égalités suivantes :

$$\left(\star_{\tilde{g}}\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - \star_{\tilde{g}}(\tilde{A}^{(s)})_\sharp\right) = 0$$

$$\left(\star_{\tilde{g}}\psi^{(s)} - \star_{\tilde{g}}\varphi^{(t)} + \star_{\tilde{g}}[\varphi, \psi]\right) = 0$$

En y appliquant une fois $\star_{\tilde{g}}$ à ces deux dernières équations, et en les tirant à $\Sigma_{0,t}$ et $\Sigma_{1,t}$, il en découle les quatre égalités suivantes

$$\mathrm{d}_{A_{0,t}}\varphi_{0,t} - (A_{0,t}^{(s)})_\sharp = 0$$

$$\psi_{0,t}^{(s)} - \varphi_{0,t}^{(t)} + [\varphi_{0,t}, \psi_{0,t}] = 0$$

$$\mathrm{d}_{A_{1,t}}\varphi_{1,t} - (A_{1,t}^{(s)})_\sharp = 0$$

$$\psi_{1,t}^{(s)} - \varphi_{1,t}^{(t)} + [\varphi_{1,t}, \psi_{1,t}] = 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. □

Remarque : Les deux équations

$$\mathrm{d}_{A_{0,t}}\varphi_{0,t} = (A_{0,t}^{(s)})_\sharp$$

$$\mathrm{d}_{A_{1,t}}\varphi_{1,t} = (A_{1,t}^{(s)})_\sharp$$

s'interprètent en disant que pour t fixé, $A_{s,t}$ est une orbite de jauge par $\varphi_{s,t}$ au temps $s = 0$ et $s = 1$. C'est-à-dire que, pour t fixé, le chemin de connexions $A_{s,t}$ en $\mathcal{A}_\Sigma$ est tangent à une $\mathcal{G}$-orbite aux temps $s = 0$ et $s = 1$.

Proposition : Si $F_A = 0$ sur un certain domaine en X, alors pour les s, t de ce domaine, on a les quatre égalités suivantes :

$$F_{A_{s,t}} = 0$$

$$\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} = (A_{s,t}^{(s)})_\sharp$$

$$\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} = (A_{s,t}^{(t)})_\sharp$$

$$\psi_{s,t}^{(s)} - \varphi_{s,t}^{(t)} + [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}] = 0$$

Preuve : Découle directement de la décomposition de la courbure F_A de A :

$$F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}s + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\wedge \mathrm{d}t + (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi, \psi])\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

□

Rappel : $\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} = (A_{s,t}^{(s)})_\sharp$ et $\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} = (A_{s,t}^{(t)})_\sharp$ s'interprètent en disant que la famille de connexion $A_{s,t}$ est tangente à une $\mathcal{G}_\Sigma$-orbite en $\mathcal{A}_\Sigma$.

Remarque : Si $A \in \mathcal{A}_X$ est d'énergie finie, alors $F_A = 0$ à $t \longrightarrow \pm\infty$. En regardant les composantes de F_A sous la décomposition $X = \Sigma \times [0,1] \times \mathbb{R}$, ceci implique entre autres qu'à t $\longrightarrow \pm\infty$ la surface de connexions $A_{s,t}$ est une orbite de jauge par $\varphi_{s,t}$ et $\psi_{s,t}$. Ainsi la bande de connexions $A_{s,t}$ en $\mathcal{A}_\Sigma$ correspondante à $A \in \mathcal{A}_{X,\partial X}^-$ a pour conditions aux bords $s \in \{0, 1\}$ et $t \longrightarrow \pm\infty$ d'être tangente à des orbites de jauges (i.e. des $\mathcal{G}_\Sigma$-orbites en $\mathcal{A}_\Sigma$).

30.12 Action de $\mathcal{G}_X$ sur $(A_{s.t}, \varphi_{s,t}, \psi_{s,t})$:

On a vu qu'à une connexion $A \in \mathcal{A}_X$ correspond un triple $(A_{s.t}, \varphi_{s,t}, \psi_{s,t})$ où $A_{s.t}$ est une famille de connexions à 2-paramètres sur P_Σ et où $\varphi_{s,t}$ et $\psi_{s,t}$ sont des familles à 2-paramètres de sections en $\Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_\Sigma)$. En faisant agir $\Lambda \in \mathcal{G}_X$ sur $A \in \mathcal{A}_X$ par la gauche $\Lambda \cdot A$ ou par la droite $A \cdot \Lambda$ on obtient alors des actions par la gauche $\Lambda \cdot (A_{s.t}, \varphi_{s,t}, \psi_{s,t})$ et par la droite $(A_{s.t}, \varphi_{s,t}, \psi_{s,t}) \cdot \Lambda$ de $\mathcal{G}_X$ sur le triple $(A_{s.t}, \varphi_{s,t}, \psi_{s,t})$.

Proposition : Soit $A = \tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$ selon la décomposition usuelle. Soit $\Lambda \in \mathcal{G}_X$. Il lui correspond $\lambda^\sharp \in C^\infty_\iota(P_X; \mathrm{SU}(2))$. Alors les actions à gauche $\Lambda \cdot A = (\Lambda^{-1})^* A$ et à droite $A \cdot \Lambda = \Lambda^* A$ se décomposent comme :

$$\begin{aligned}\Lambda \cdot A &= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp}\tilde{A} - (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_t}}\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1} \\ &\quad + \left(\mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp}\varphi^\sharp - (\lambda^\sharp)^{(s)}(\lambda^\sharp)^{-1}\right)\mathrm{d}s^\sharp + \left(\mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp}\psi^\sharp - (\lambda^\sharp)^{(t)}(\lambda^\sharp)^{-1}\right)\mathrm{d}t^\sharp\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A \cdot \Lambda &= \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}}\tilde{A} + (\lambda^\sharp)^{-1}(\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_t}}\lambda^\sharp) \\ &\quad + \left(\mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}}\varphi^\sharp + (\lambda^\sharp)^{-1}(\lambda^\sharp)^{(s)}\right)\mathrm{d}s^\sharp + \left(\mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}}\psi^\sharp + (\lambda^\sharp)^{-1}(\lambda^\sharp)^{(t)}\right)\mathrm{d}t^\sharp\end{aligned}$$

Preuve : Souvenons-nous que $\Lambda \cdot A = (\Lambda^{-1})^* A = \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} A - (\mathrm{d}\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1}$ où ici d est $\mathrm{d}|_{P_X}$. Développons :

$$\begin{aligned}\Lambda \cdot A &= (\Lambda^{-1})^* A \\ &= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} A - (\mathrm{d}|_{P_X}\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1} \\ &= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp}(\tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp) - (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_t}}\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1} \\ &\quad -(\lambda^\sharp)^{(s)}(\lambda^\sharp)^{-1}\mathrm{d}s^\sharp - (\lambda^\sharp)^{(t)}(\lambda^\sharp)^{-1}\mathrm{d}t^\sharp \\ &= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp}\tilde{A} + \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp}\varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp}\psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp - (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_t}}\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1} \\ &\quad -(\lambda^\sharp)^{(s)}(\lambda^\sharp)^{-1}\mathrm{d}s^\sharp - (\lambda^\sharp)^{(t)}(\lambda^\sharp)^{-1}\mathrm{d}t^\sharp \\ &= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp}\tilde{A} - (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_t}}\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1} \\ &\quad + \left(\mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp}\varphi^\sharp - (\lambda^\sharp)^{(s)}(\lambda^\sharp)^{-1}\right)\mathrm{d}s^\sharp + \left(\mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp}\psi^\sharp - (\lambda^\sharp)^{(t)}(\lambda^\sharp)^{-1}\right)\mathrm{d}t^\sharp\end{aligned}$$

De la même manière, on trouve la formule pour l'action à droite $A \cdot \Lambda$. □

Corollaire : Les actions à gauche et à droite de $\Lambda \in \mathcal{G}_X$ sur le triple $(A_{s.t}, \varphi_{s,t}, \psi_{s,t})$ sont données par :

$$\Lambda \cdot (A_{s.t}, \varphi_{s,t}, \psi_{s,t}) = (\Lambda_{s,t} \cdot A_{s,t}, \mathrm{Ad}_{\lambda_{s,t}} \varphi_{s,t} - \lambda_{s,t}^{(s)} \lambda_{s,t}^{-1}, \mathrm{Ad}_{\lambda_{s,t}} \psi_{s,t} - \lambda_{s,t}^{(t)} \lambda_{s,t}^{-1})$$

$$(A_{s.t}, \varphi_{s,t}, \psi_{s,t}) \cdot \Lambda = (A_{s,t} \cdot \Lambda_{s,t}, \mathrm{Ad}_{\lambda_{s,t}^{-1}} \varphi_{s,t} + \lambda_{s,t}^{-1} \lambda_{s,t}^{(s)}, \mathrm{Ad}_{\lambda_{s,t}^{-1}} \psi_{s,t} + \lambda_{s,t}^{-1} \lambda_{s,t}^{(t)})$$

où $\Lambda_{s,t}$ est la famille à 2-paramètres de transformations de jauge de P_Σ correspondant à la famille $\lambda_{s,t} := (\lambda_{s,t}^\sharp)_\sharp$ où $\lambda_{s,t}^\sharp := (\iota_{s,t}^\sharp)^* \lambda^\sharp$.

Remarque : On a vu plus haut que $\mathcal{G}_X$ envoie $\mathcal{A}_X^-$ en lui-même et, de même, envoie $\mathcal{A}_{X,\partial X}^-$ en lui-même. Donnons-nous une connexion $A \in \mathcal{A}_{X,\partial X}^-$. Alors $F_A|_{\partial X} = 0$ et $\lim_{t\to\pm\infty} F_A = 0$. Soit $A_{s,t}$, la bande en $\mathcal{A}_\Sigma$ correspondante à A. Alors, $F_{A_{s,t}} = 0$ pour $s = 0$, pour $s = 1$ et pour $t \to \pm\infty$. C'est-à-dire, $A_{s,t} \in \mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ pour $s = 0$, pour $s = 1$ et pour $t \to \pm\infty$. De plus, pour $s = 0$, $s = 1$ et $t \to \pm\infty$, la bande $A_{s,t}$ est, pour s fixé, tangente à des $\mathcal{G}_\Sigma$-orbites en $\mathcal{A}_\Sigma$. De même, à $t \to \pm\infty$ c'est tangent à des $\mathcal{G}_\Sigma$-orbites. Et aussi $\mathcal{G}_X$ agit sur $A_{s,t}$ de la même manière que le ferait $\mathcal{G}_\Sigma$ (plus précisément $\lambda_{s,t}$ à 2-paramètres). Ainsi, l'action de $\mathcal{G}_X$ sur la bande $u(s,t) := A_{s,t}$ laisse les points du bords ($s = 0$, $s = 1$ et $t \to \pm\infty$) sur les mêmes orbites. Tout va bien. TO DO : Maintenant je dois avoir conditions aux bords lagrangiennes (et non que $\mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$).

31 Théorie de Chern-Simons :

31.1 Introduction :

Le but de cette section est d'établir les résultats principaux reliés à la fonctionnelle de Chern-Simons.

À FAIRE :

-considérer le cas $Y^3 = \partial X^4$.

-considérer le cas $\partial Y^3 = \Sigma^2$.

-considérer le cas à "coins" $\partial X^4 = Y^3$ et $\partial Y^3 = \Sigma^2$...

31.2 Fonctionnelle de Chern-Simons :

Soit $\mathrm{SU}(2) \hookrightarrow P_Y \to Y$ un SU(2)-fibré principal trivial sur une 3-variété Y^3 orientable. Soit s_α une section trivialisante globale de P_Y.

Définition : La *fonctionnelle de Chern-Simons* est définie en tout $A \in \mathcal{A}_Y$ par

$$S_{\mathrm{CS}}(A_\alpha) = \int_Y \mathrm{Tr}\left(2A_\alpha(\wedge,\circ)\mathrm{d}A_\alpha + \frac{4}{3}A_\alpha(\wedge,\circ)A_\alpha(\wedge,\circ)A_\alpha\right)$$

où $A_\alpha = s_\alpha^* A \in \Omega^1(Y;\mathfrak{su}(2))$.

Remarque : Oui ! la fonctionnelle de Chern-Simons dépend d'un choix de s_α (mais pas trop car ne dépend que de la classe d'homotopie de s_α. TO DO ! ! !).

Remarque : J'utilise des coefficients 2 et 4/3 au lieu de 1 et 2/3 à des fins de normalisations pour relier le gradient de Chern-Simons aux instantons.

Remarque : Ici la composition $\circ$ des $(\wedge,\circ)$ est la loi de composition de matrices complexes 2×2 en $\mathfrak{su}(2)$.

Remarque : Pour alléger la notation, j'écrirai $\wedge$ au lieu de $(\wedge, \circ)$ dans la fonctionnelle de Chern-Simons, i.e. j'écrirai plus simplement :

$$S_{\text{CS}}(A_\alpha) = \int_Y \text{Tr}\left(2A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha + \frac{4}{3}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha\right)$$

Remarque : Pour $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{su}(2)$, on a $\text{Tr}(\xi_1 \circ \xi_2) = \frac{1}{4}\text{Tr}(\text{ad}_{\xi_1} \circ \text{ad}_{\xi_2}) = \frac{1}{4}K(\xi_1, \xi_2)$ où $K : \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \to \mathbb{R}$ est la forme de Killing.

Remarque : Du fait que $\text{Tr}(\xi_1 \circ \xi_2) = \text{Tr}(\xi_2 \circ \xi_1)$, on peut permuter plein de termes dans la fonctionnelle de Cherns-Simons.

Rappel : Pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega^1(Y; \text{Ad}P_Y)$ on a $[\alpha_1 \wedge \alpha_2] = \alpha_1(\wedge, \circ)\alpha_2 + \alpha_2(\wedge, \circ)\alpha_1$.

Rappel : $(F_A)_\alpha = \mathrm{d}A_\alpha + \frac{1}{2}[A_\alpha \wedge A_\alpha] = \mathrm{d}A_\alpha + A_\alpha(\wedge, \circ)A_\alpha$.

31.3 Différentielle de la fonctionnelle de Chern-Simons :

Proposition : La différentielle de la fonctionnelle de Chern-Simons est donnée par :

$$S_{\text{CS}}{}^{(1)}|_A(\tau^\sharp) = \mathrm{d}S_{\text{CS}}|_A(\tau^\sharp) = -\int_Y F_A \wedge^\kappa \tau - 2\int_{\partial Y} \text{Tr}\,(A_\alpha \wedge \tau_\alpha)$$

pour tout $A \in \mathcal{A}_Y$ et $\tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}_Y$.

Preuve : Souvenons-nous que $\kappa^\sharp = -K$ où K est la forme de Killing qui vérifie $K(\xi_1, \xi_2) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\xi_1} \circ \mathrm{ad}_{\xi_2}) = 4\mathrm{Tr}(\xi_1 \circ \xi_2), \forall \xi_1 \xi_2 \in \mathfrak{su}(2)$. On calcule directement :

$$
\begin{aligned}
& {S_{\mathrm{CS}}}^{(1)}|_A(\tau^\sharp) \\
= \quad & \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \int_Y \mathrm{Tr}\left(2(A_\alpha + s\tau_\alpha) \wedge \mathrm{d}(A_\alpha + s\tau_\alpha)\right) \\
& + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \int_Y \mathrm{Tr}\left(\frac{4}{3}(A_\alpha + s\tau_\alpha) \wedge (A_\alpha + s\tau_\alpha) \wedge (A_\alpha + s\tau_\alpha)\right) \\
= \quad & 2\int_Y \mathrm{Tr}\left(\tau_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha + A_\alpha \wedge \mathrm{d}\tau_\alpha\right) \\
& + \frac{4}{3}\int_Y \mathrm{Tr}\left(\tau_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha + A_\alpha \wedge \tau_\alpha \wedge A_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \tau_\alpha\right) \\
= \quad & 2\int_Y \mathrm{Tr}\left(\mathrm{d}A_\alpha \wedge \tau_\alpha + A_\alpha \wedge \mathrm{d}\tau_\alpha\right) \\
& + \frac{4}{3}\int_Y \mathrm{Tr}\left(A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \tau_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \tau_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \tau_\alpha\right) \\
= \quad & \int_Y \mathrm{Tr}\left(2\mathrm{d}A_\alpha \wedge \tau_\alpha + 2A_\alpha \wedge \mathrm{d}\tau_\alpha + 4A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \tau_\alpha\right) \\
= \quad & \int_Y \mathrm{Tr}\left(4(\mathrm{d}A_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha) \wedge \tau_\alpha + 2A_\alpha \wedge \mathrm{d}\tau_\alpha - 2\mathrm{d}A_\alpha \wedge \tau_\alpha\right) \\
= \quad & 4\int_Y \mathrm{Tr}\left((F_A)_\alpha \wedge \tau_\alpha\right) - 2\int_Y \mathrm{Tr}\left(\mathrm{d}A_\alpha \wedge \tau_\alpha - A_\alpha \wedge \mathrm{d}\tau_\alpha\right) \\
= \quad & -\int_Y F_A \wedge^\kappa \tau - 2\int_Y \mathrm{d}\mathrm{Tr}\left(A_\alpha \wedge \tau_\alpha\right) \\
= \quad & -\int_Y F_A \wedge^\kappa \tau - 2\int_{\partial Y} \mathrm{Tr}\left(A_\alpha \wedge \tau_\alpha\right)
\end{aligned}
$$

□

Corollaire : Si Y est sans bord, les points critiques de la fonctionnelle de Chern-Simons sont les connexions plates sur Y, i.e. $\mathrm{crit}(S_{\mathrm{CS}}) = \mathcal{A}_Y^{\mathrm{fl}}$.

Preuve : Donnons à Y une métrique riemannienne auxiliaire g. Souvenons-nous que $\star_g^2 = (-1)^{nk+k} s_g = (-1)^{3k+k} = 1$. Alors, si $\partial Y = \emptyset$, on trouve :

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}}{}^{(1)}|_A(\tau^\sharp) &= -\int_Y F_A \wedge^\kappa \tau \\ &= -\int_Y \tau \wedge^\kappa F_A \\ &= -\int_Y \tau \wedge^\kappa \star_g^2 F_A \\ &= -(\tau, \star_g F_A)_{g,\kappa} \end{aligned}$$

Puisque c'est vrai pour τ quelconque, il suit que les points critiques de S_{CS} sont les connexions $A \in \mathcal{A}_Y$ telles que $\star_g F_A = 0$, i.e. telles que $F_A = 0$. D'où $\text{crit}(S_{\text{CS}}) = \mathcal{A}_Y^{\text{fl}}$. □

Proposition : Si Y est sans bord, le gradient $\nabla S_{\text{CS}} \in \mathfrak{X}(\mathcal{A}_Y)$ de la fonctionnelle de Cherns-Simons S_{CS} est donné en chaque $A \in \mathcal{A}_Y$ par :

$$(\nabla S_{\text{CS}})|_A = -\star_g^\sharp F_A^\sharp$$

Preuve : Supposons Y sans bord. Pour tout $\tau^\sharp$, on calcule :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_{\text{CS}}|_A(\tau^\sharp) &= S_{\text{CS}}{}^{(1)}|_A(\tau^\sharp) \\ &= -(\tau, \star_g F_A)_{g,\kappa} \\ &= (-\star_g F_A, \tau)_{g,\kappa} \\ &= ((\nabla S_{\text{CS}}|_A)_\sharp, \tau)_{g,\kappa} \end{aligned}$$

D'où $(\nabla S_{\text{CS}}|_A)_\sharp = -\star_g F_A$, i.e. $\nabla S_{\text{CS}}|_A = -(\star_g F_A)^\sharp = -\star_g^\sharp F_A^\sharp$ où $\star_g^\sharp(\,\cdot\,) := (\star_g(\,\cdot_\sharp))^\sharp$. □

31.4 Hessien de la fonctionnelle de Chern-Simons :

Proposition : Le hessien de la fonctionnelle de Chern-Simons est donné en tout $A \in \mathcal{A}_Y$ et $\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp \in T_A\mathcal{A}_Y$ par :

$$S_{\text{CS}}{}^{(2)}|_A(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp) = H_{S_{\text{CS}}}|_A(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp) = -\int_Y (\mathrm{d}_A\tau_1) \wedge^\kappa \tau_2 + \frac{1}{2}\int_{\partial Y} \tau_1 \wedge^\kappa \tau_2$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
& {S_{\mathrm{CS}}}^{(2)}|_A(\tau_1^\sharp,\tau_2^\sharp)\\
= & \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} {S_{\mathrm{CS}}}^{(1)}|_{A+s\tau_1^\sharp}(\tau_2^\sharp)\\
= & -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\int_Y F_{A+s\tau_1^\sharp}\wedge^\kappa \tau_2 - 2\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\int_{\partial Y}\mathrm{Tr}\left((A_\alpha+s(\tau_1)_\alpha)\wedge(\tau_2)_\alpha\right)\\
= & -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\int_Y (F_A + s\mathrm{d}_A\tau_1 + \frac{1}{2}s^2[\tau_1\wedge\tau_1])\wedge^\kappa \tau_2 - 2\int_{\partial Y}\mathrm{Tr}\left((\tau_1)_\alpha\wedge(\tau_2)_\alpha\right)\\
= & -\int_Y(\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge^\kappa\tau_2 + \frac{1}{2}\int_{\partial Y}\tau_1\wedge^\kappa\tau_2
\end{aligned}$$

□

Remarque : Le second terme $\int_{\partial Y}\tau_1\wedge^\kappa\tau_2$ dans le hessien $H_{S_{\mathrm{CS}}}$ est très exactement la forme symplectique sur $\mathcal{A}_\Sigma$ où $\Sigma^2=\partial Y^3$.

Proposition : Si Y est sans bord, l'opérateur hessien $\tilde{H}_{S_{\mathrm{CS}}}\in\Gamma^\infty(T^*\mathcal{A}_Y\otimes T^*\mathcal{A}_Y)$ est donné en chaque $A\in\mathcal{A}_Y$ et en chaque $\tau^\sharp\in T_A\mathcal{A}_Y$ par :

$$\tilde{H}_{S_{\mathrm{CS}}}|_A(\tau^\sharp) = -\star_g^\sharp\,\mathrm{d}^A\tau^\sharp$$

Preuve : Supposons Y sans bord. Souvenons-nous que $\star_g^2=(-1)^{nk+k}s_g=(-1)^{3k+k}=1$. Pour $\tau_1^\sharp,\tau_2^\sharp$ quelconques en $T_A\mathcal{A}_Y$, on calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
((\tilde{H}_{S_{\mathrm{CS}}}|_A(\tau_1^\sharp))_\sharp,\tau_2)_{g,\kappa} &= H_{S_{\mathrm{CS}}}|_A(\tau_1^\sharp,\tau_2^\sharp)\\
&= -\int_Y(\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge^\kappa\tau_2\\
&= -\int_Y(\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge^\kappa\star_g^2\tau_2\\
&= -(\mathrm{d}_A\tau_1,\star_g\tau_2)_{g,\kappa}\\
&= -(\star_g\mathrm{d}_A\tau_1,\tau_2)_{g,\kappa}
\end{aligned}$$

D'où $(\tilde{H}_{S_{\mathrm{CS}}}|_A(\tau^\sharp))_\sharp=-\star_g\,\mathrm{d}_A\tau$, i.e. $\tilde{H}_{S_{\mathrm{CS}}}|_A(\tau^\sharp)=-\star_g^\sharp\,\mathrm{d}^A\tau^\sharp$. □

Remarque : Il pourrait être une bonne idée d'écrire cette notation alternative :

$$\tilde{H}^\sharp_{S_{\mathrm{CS}}}|_A(\tau^\sharp) = -\star_g^\sharp\,\mathrm{d}^A\tau^\sharp$$

$$\tilde{H}_{S_{\mathrm{CS}}}|_A(\tau) = -\star_g\,\mathrm{d}_A\tau$$

31.5 Dérivée troisième de S_{CS} :

Proposition : La dérivée troisième de la fonctionnelle de Chern-Simons est donnée en $A \in \mathcal{A}_Y$ et $\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp, \tau_3^\sharp \in T_A\mathcal{A}_Y$ par :

$$S_{\mathrm{CS}}{}^{(3)}|_A(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp, \tau_3^\sharp) = -\int_Y [\tau_1 \wedge \tau_2] \wedge^\kappa \tau_3$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{CS}}{}^{(3)}|_A(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp, \tau_3^\sharp) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} S_{\mathrm{CS}}{}^{(2)}|_{A+s\tau_1^\sharp}(\tau_2^\sharp, \tau_3^\sharp) \\
&= -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \int_Y (\mathrm{d}_{A+s\tau_1^\sharp}\tau_2) \wedge^\kappa \tau_3 + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \frac{1}{2}\int_{\partial Y} \tau_2 \wedge^\kappa \tau_3 \\
&= -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \int_Y (\mathrm{d}_A\tau_2 + s[\tau_1 \wedge \tau_2]) \wedge^\kappa \tau_3 \\
&= -\int_Y [\tau_1 \wedge \tau_2] \wedge^\kappa \tau_3
\end{aligned}$$

□

Corollaire : $S_{\mathrm{CS}}{}^{(k)} = 0, \ \forall k \geq 4.$

Preuve : Découle du fait que $S_{\mathrm{CS}}{}^{(3)}$ est indépendant de $A \in \mathcal{A}_Y$. □

31.6 Résumé des dérivées de S_{CS} :

En résumé, les dérivées k-ièmes de la fonctionnelle de Chern-Simons sont données par :

$$\begin{aligned}
S_{\text{CS}}(A_\alpha) &= \int_Y \operatorname{Tr}\left(2A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha + \frac{4}{3}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha\right) \\
{S_{\text{CS}}}^{(1)}|_A(\tau^\sharp) = \mathrm{d}S_{\text{CS}}|_A(\tau^\sharp) &= -\int_Y F_A \wedge^\kappa \tau - 2\int_{\partial Y} \operatorname{Tr}\left(A_\alpha \wedge \tau_\alpha\right) \\
{S_{\text{CS}}}^{(2)}|_A(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp) = H_{S_{\text{CS}}}|_A(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp) &= -\int_Y (\mathrm{d}_A\tau_1) \wedge^\kappa \tau_2 + \frac{1}{2}\int_{\partial Y} \tau_1 \wedge^\kappa \tau_2 \\
{S_{\text{CS}}}^{(3)}|_A(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp, \tau_3^\sharp) &= -\int_Y [\tau_1 \wedge \tau_2] \wedge^\kappa \tau_3 \\
{S_{\text{CS}}}^{(k)} &= 0, \forall k \geq 4
\end{aligned}$$

31.7 Comportement de S_{CS} sous l'action de $\mathcal{G}_Y$:

Proposition : Pour $A \in \mathcal{A}_Y$ et $\upsilon \in \Omega^0(Y; \mathrm{Ad}P_Y)$ quelconques, on a :

$$\mathrm{d}S_{\text{CS}}|_A(-\mathrm{d}_A\upsilon) = -2\int_{\partial Y} \operatorname{Tr}(A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha)$$

Preuve : D'abord :

$$\begin{aligned}
& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} S_{\text{CS}}(A^{\Lambda_t}) \\
= \;& \mathrm{d}S_{\text{CS}}|_A\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} A^{\Lambda_t}\right) \\
= \;& \mathrm{d}S_{\text{CS}}|_A(-\mathrm{d}_A\upsilon) \\
= \;& -\int_Y F_A \wedge^\kappa (-\mathrm{d}_A\upsilon) - 2\int_{\partial Y} \operatorname{Tr}\left(A_\alpha \wedge (-\mathrm{d}_A\upsilon)_\alpha\right)
\end{aligned}$$

Regardons d'abord le premier terme :

$$
\begin{aligned}
& -\int_Y F_A \wedge^\kappa (-\mathrm{d}_A \upsilon) \\
= \ & 4\int_Y \mathrm{Tr}((F_A)_\alpha \wedge (-\mathrm{d}_A \upsilon)_\alpha) \\
= \ & -4\int_Y \mathrm{Tr}((\mathrm{d}A_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha) \wedge (\mathrm{d}\upsilon_\alpha + [A_\alpha, \upsilon_\alpha])) \\
= \ & -4\int_Y \mathrm{Tr}(\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha + \mathrm{d}A_\alpha \wedge [A_\alpha, \upsilon_\alpha] + A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge [A_\alpha, \upsilon_\alpha]) \\
= \ & -4\int_Y \mathrm{Tr}(\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha + \mathrm{d}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha \\
& -\mathrm{d}A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha \wedge A_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha - A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha \wedge A_\alpha) \\
= \ & -4\int_Y \mathrm{Tr}(\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha + \mathrm{d}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha \\
& -\mathrm{d}A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha \wedge A_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha - A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha) \\
= \ & -4\int_Y \mathrm{Tr}(\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha + \mathrm{d}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha - A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha) \\
= \ & \int_Y \mathrm{Tr}(-4\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha - 4A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha - 4\mathrm{d}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha + 4A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha)
\end{aligned}
$$

Développons le second terme :

$$
\begin{aligned}
& -2\int_{\partial Y} \mathrm{Tr}\,(A_\alpha \wedge (-\mathrm{d}_A\upsilon)_\alpha) \\
= \;& 2\int_{\partial Y} \mathrm{Tr}\,(A_\alpha \wedge (\mathrm{d}\upsilon_\alpha + [A_\alpha, \upsilon_\alpha])) \\
= \;& 2\int_{\partial Y} \mathrm{Tr}\,(A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha + A_\alpha \wedge [A_\alpha, \upsilon_\alpha]) \\
= \;& 2\int_{\partial Y} \mathrm{Tr}\,(A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha - A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha \wedge A_\alpha) \\
= \;& 2\int_{Y} \mathrm{d}\mathrm{Tr}\,(A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha + 2A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha) \\
= \;& 2\int_{Y} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha + 2\mathrm{d}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha - 2A_\alpha \wedge \mathrm{d}(A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha)) \\
= \;& 2\int_{Y} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha + 2\mathrm{d}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha - 2A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha + 2A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha) \\
= \;& \int_{Y} \mathrm{Tr}\,(2\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha + 4\mathrm{d}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha - 4A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha + 4A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha)
\end{aligned}
$$

On trouve alors :

$$
\begin{aligned}
& -\int_{Y} F_A \wedge^\kappa (-\mathrm{d}_A\upsilon) - 2\int_{\partial Y} \mathrm{Tr}\,(A_\alpha \wedge (-\mathrm{d}_A\upsilon)_\alpha) \\
= \;& \int_{Y} \mathrm{Tr}(-4\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha - 4A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha - 4\mathrm{d}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha + 4A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha) \\
& + \int_{Y} \mathrm{Tr}\,(2\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha + 4\mathrm{d}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha - 4A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha + 4A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha) \\
= \;& \int_{Y} \mathrm{Tr}(-2\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha) \\
= \;& -2\int_{Y} \mathrm{Tr}(\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha) \\
= \;& -2\int_{Y} \mathrm{d}\mathrm{Tr}(A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha) \\
= \;& -2\int_{\partial Y} \mathrm{Tr}(A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha)
\end{aligned}
$$

□

Remarque : Soit $A \in \mathcal{A}_Y$. Soit Λ_t un groupe de transformations de jauges à 1-paramètre. Soit $\Upsilon := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \Lambda_t \in \mathfrak{G}$. Il lui correspond $\upsilon^\sharp = A(\Upsilon)$ de manière indépendante de A. On sait qu'infinitésimalement, les actions à gauche $\Lambda_t \cdot A = (\Lambda_t^{-1})^* A$ et à droite $A \cdot \Lambda_t = \Lambda_t^* A$ sont données par :

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\Lambda_t \cdot A) = -\mathrm{d}^A \upsilon^\sharp \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (A \cdot \Lambda_t) = \mathrm{d}^A \upsilon^\sharp$$

La dernière proposition implique donc que les transformations de jauge infinitésimales ne laissent pas forcément S_{CS} inchangée. Néanmoins, si $\partial Y = \emptyset$, alors les transformations de jauge infinitésimales laissent inchangée S_{CS}.

Proposition : Si $\partial Y = \emptyset$, les transformations de jauge infinitésimales laissent inchangée S_{CS}.

Preuve : *(première preuve :)* découle de la formule

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{CS}}|_A(-\mathrm{d}_A \upsilon) = -2 \int_{\partial Y} \mathrm{Tr}(A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha) = 0$$

de la dernière proposition où l'on prend $\partial Y = \emptyset$. □

Preuve : *(preuve alternative :)* D'abord :

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} S_{\mathrm{CS}}(\Lambda_t \cdot A) = \mathrm{d}S_{\mathrm{CS}}|_A \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\Lambda_t \cdot A) \right) = \mathrm{d}S_{\mathrm{CS}}|_A(-\mathrm{d}_A \upsilon) = -\int_Y F_A \wedge^\kappa (-\mathrm{d}_A \upsilon)$$

où, par l'identité de Bianchi $\mathrm{d}_A F_A = 0$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial Y} F_A \wedge^\kappa \upsilon \\ &= \int_Y \mathrm{d}(F_A \wedge^\kappa \upsilon) \\ &= \int_Y (\mathrm{d}_A F_A \wedge^\kappa \upsilon + F_A \wedge^\kappa \mathrm{d}_A \upsilon) \\ &= \int_Y (F_A \wedge^\kappa \mathrm{d}_A \upsilon) \end{aligned}$$

□

Proposition : Si υ est une transformation de jauge infinitésimale nulle sur ∂Y, alors S_{CS} est laissée inchangée.

Preuve : Pour υ nulle sur ∂Y, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S_{\text{CS}}|_A(-\mathrm{d}_A\upsilon) &= -2\int_Y \mathrm{Tr}(\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}\upsilon_\alpha) \\
&= -2\int_Y \mathrm{d}\mathrm{Tr}(\mathrm{d}A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha) \\
&= -2\int_{\partial Y} \mathrm{Tr}(\mathrm{d}A_\alpha \wedge \upsilon_\alpha) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Remarque : Il semble donc que l'affirmation « S_{CS} *est laissée inchangée par les transformations de jauges infinitésimales* » n'est vraie que pour le cas particulier $\partial Y = \emptyset$ et pour le cas particulier $\upsilon|_{\partial Y} = 0$.

Remarque : La dernière remarque est aussi soulignée à la p.338 de C. M. Herald (1994, *Legendrian cobordism...*)

31.8 Flot de Chern-Simons :

On a vu plus haut que pour Y sans bord le gradient $\nabla S_{\text{CS}} \in \mathfrak{X}(\mathcal{A}_Y)$ de la fonctionnelle de Chern-Simons est donné en tout $A \in T_A\mathcal{A}_Y$ par :

$$(\nabla S_{\text{CS}})|_{A_t} = -\star_{g_t}^{\sharp} F_{A_t}^{\sharp}$$

L'équation des courbes gradient A_t ascendantes/descendantes est donc :

$$A_t^{(t)} = \mp \star_{g_t}^{\sharp} F_{A_t}^{\sharp}$$

Cette équation peut être vue sur Y au lieu de sur P_Y :

$$(A_t^{(t)})_\sharp = \mp \star_{g_t} F_{A_t}$$

Proposition : L'équation de courbes gradient ascendantes (resp. descendantes) de la fonctionnelle de Chern-Simons pour Y sans bord est (presque..) égale à l'équation de décomposition simple d'instantons anti-auto-duaux (resp. auto-duaux) sur $X^4 = Y^3 \times \mathbb{R}$

Preuve : Souvenons-nous que l'équation de décomposition simple d'instantons (anti-)auto-duaux sur $X^4 = Y^3 \times \mathbb{R}$ est donnée par :

$$\star_g F_A = \pm F_A \iff \star_{g_t} F_{A_t} = \pm \left(\mathrm{d}_{A_t} \psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp \right)$$

Ceci est à comparer avec l'équation de courbes gradient ascendantes/descendantes de la fonctionnelle de Chern-Simons (pour le cas $\partial Y = \emptyset$) vue sur Y :

$$(A_t^{(t)})_\sharp = \mp \star_{g_t} F_{A_t}$$

Ainsi, dans le cas $\mathrm{d}_{A_t}\psi_t = 0$ on voit que les courbes gradient ascendantes correspondent à des instantons auto-duaux et les courbes gradient descendantes correspondent à des instantons anti-auto-duaux. En particulier, ψ_t peut être tué en considérant une section trivialisante s_α de P_X en jauge temporelle (i.e. $\psi_\alpha = s_\alpha^* \psi^\sharp = 0$). $\square$

Remarque : Les deux équations sont presque pareilles, à $\mathrm{d}_{A_t}\psi_t$ près. Elles sont égales quand on se met en jauge temporelle $\psi_t = 0$. Remarquons que $\mathrm{d}_{A_t}\psi_t$ correspond à une isotopie de jauge infinitésimale de A_t et donc en « modulo transformation de jauge » ça devrait disparaître. Donc il semble que l'on est pas obligé de se mettre en jauge temporelle.

Remarque : Il y a plusieurs manières de faire de l'homologie de Floer d'instantons : soit via $+\nabla S_{\mathrm{CS}}$ (qui fait diminuer μ et augmenter ν et dont les courbes gradient ascendantes sont des instantons auto-duaux) soit via $-\nabla S_{\mathrm{CS}}$ (qui fait augmenter μ et diminuer ν et dont les courbes gradient descendantes sont des instantons anti-auto-duaux). Bref, il faut savoir ce que la différentielle du complexe dénombre (des AD ou des ASD) pour savoir si la différentielle fait augmenter l'indice (relatif) ou la fait diminuer.

Question : Peut-on modifier Chern-Simons pour avoir ψ dans le gradient ∇S_{CS} ? Une sorte de Chern-Simons-Higgs ?

31.9 Lien CS et YM :

Proposition : Soit $\mathrm{SU}(2) \hookrightarrow P_X \twoheadrightarrow X^4$ trivial tel que $Y = \partial X$ (et donc $\partial Y = \emptyset$). Soit $A \in \mathcal{A}_X$. Soit s_α une section trivialisante de X. Considérons l'inclusion $\iota : Y \hookrightarrow X$ ainsi que l'inclusion de fibrés $\iota^\sharp : P_Y \hookrightarrow P_X$ correspondante. Soit $\tilde{A} := (\iota^\sharp)^* A \in \mathcal{A}_Y$. Soit $\tilde{s}_\alpha$ la section trivialisante de P_Y correspondante à la restriction de s_α à ∂X. On peut alors considérer $S_{\mathrm{CS}}(\tilde{A}_\alpha)$. Alors :

$$S_{\mathrm{CS}}(\tilde{A}_\alpha) = -\frac{1}{2}\int_X F_A \wedge^\kappa F_A$$

Preuve : Calcul direct :

$$\begin{aligned}
& S_{\mathrm{CS}}(\tilde{A}_\alpha) \\
= \; & \int_Y \mathrm{Tr}\left(2\tilde{A}_\alpha \wedge \mathrm{d}\tilde{A}_\alpha + \frac{4}{3}\tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha\right) \\
= \; & \int_{\partial X} \iota^*\mathrm{Tr}\left(2A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha + \frac{4}{3}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha\right) \\
= \; & \int_X \mathrm{dTr}\left(2A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha + \frac{4}{3}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha\right) \\
= \; & \int_X \mathrm{Tr}\left(2\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha + \frac{4}{3}\mathrm{d}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha - \frac{4}{3}A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha \wedge A_\alpha + \frac{4}{3}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha\right) \\
= \; & \int_X \mathrm{Tr}\left(2\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha + \frac{4}{3}\mathrm{d}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha + \frac{4}{3}\mathrm{d}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha + \frac{4}{3}\mathrm{d}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha\right) \\
= \; & \int_X \mathrm{Tr}\left(2\mathrm{d}A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha + 4\mathrm{d}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha\right) \\
= \; & 2\int_X \mathrm{Tr}\left(\mathrm{d}A_\alpha \wedge (\mathrm{d}A_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha) + A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha\right) \\
= \; & 2\int_X \mathrm{Tr}\left(\mathrm{d}A_\alpha \wedge (F_A)_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha\right) \\
= \; & 2\int_X \mathrm{Tr}\left(\mathrm{d}A_\alpha \wedge (F_A)_\alpha + (A_\alpha \wedge A_\alpha) \wedge (F_A)_\alpha\right) \\
= \; & 2\int_X \mathrm{Tr}\left((F_A)_\alpha \wedge (F_A)_\alpha\right) \\
= \; & -\frac{1}{2}\int_X F_A \wedge^\kappa F_A
\end{aligned}$$

où j'ai fait apparaître un terme $A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha$ qui est un terme nul car en faisant commuter la 1-forme A_α et la 3-forme $A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha$ il y a un signe « $-$ » qui apparaît :

$$\mathrm{Tr}(A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha) = -\mathrm{Tr}(A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha)$$

$\square$

Corollaire : Si $A \in \mathcal{A}_X^{\pm}$, i.e. est AD ou ASD, alors sous les mêmes conditions que la dernière proposition, on a

$$S_{\mathrm{CS}}(\tilde{A}_\alpha) = \mp S_{\mathrm{YM}}(A)$$

Preuve : Si A est AD/ASD, on trouve directement :

$$S_{\mathrm{CS}}(\tilde{A}_\alpha) = -\frac{1}{2}\int_X F_A \wedge^\kappa F_A = \mp\frac{1}{2}\int_X F_A \wedge^\kappa \star_g F_A = \mp S_{\mathrm{YM}}(A)$$

$\square$

Proposition : La décomposition simple de la courbure F_A sur $X = Y \times \mathbb{R}$ implique

$$\int_X F_A \wedge^\kappa F_A = 2\int_{\mathbb{R}}\left(\int_Y F_{A_t} \wedge^\kappa (\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp)\right)\mathrm{d}t$$

Preuve : La décomposition simple de la courbure sur $X = Y \times \mathbb{R}$ est :

$$F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t \in \Omega^2(X; \mathrm{Ad}P_X)$$

On peut alors explicitement calculer $\int_X F_A \wedge^\kappa F_A$:

$$\begin{aligned}
&\int_X F_A \wedge^\kappa F_A \\
= \ &\int_X \left(F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) \wedge^\kappa \left(F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
= \ &\int_X F_{\tilde{A}} \wedge^\kappa F_{\tilde{A}} + \int_X F_{\tilde{A}} \wedge^\kappa \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&+ \int_X \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) \wedge^\kappa F_{\tilde{A}} \\
&+ \int_X \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) \wedge^\kappa \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
= \ &\int_X F_{\tilde{A}} \wedge^\kappa \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) + \int_X \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) \wedge^\kappa F_{\tilde{A}} \\
= \ &\int_X F_{\tilde{A}} \wedge^\kappa \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) + \int_X F_{\tilde{A}} \wedge \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
= \ &2\int_{Y\times\mathbb{R}} F_{\tilde{A}} \wedge^\kappa \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
= \ &2\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{Y_t} F_{\tilde{A}} \wedge^\kappa (\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp)\right) \mathrm{d}t \\
= \ &2\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{Y} F_{A_t} \wedge^\kappa (\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp)\right) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

où $F_{\tilde{A}} \wedge^\kappa F_{\tilde{A}}$ est nul car est une 4-forme ne contenant aucun $\mathrm{d}t$ et où

$$\left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) \wedge^\kappa \left((\mathrm{d}_{\tilde{A}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t\right) = 0$$

car contient deux $\mathrm{d}t$. □

Corollaire : Si $X = Y \times [0,1]$ on a :

$$S_{\mathrm{CS}}((A_1)_\alpha) - S_{\mathrm{CS}}((A_0)_\alpha) = -\int_X F_A \wedge^\kappa F_A = -2\int_{[0,1]} \left(\int_Y F_{A_t} \wedge^\kappa (\mathrm{d}_{A_t}\psi_t - (A_t^{(t)})_\sharp)\right) \mathrm{d}t$$

où A_0 et A_1 sont A_t en $t = 0$ et $t = 1$.

31.10 1-forme $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ de Chern-Simons :

Définition : La *1-forme de Chern-Simons* $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}} \in \Omega^1(\mathcal{A}_Y)$ est définie en tout $A \in \mathcal{A}_Y$ sur tout $\tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}_Y$ par :

$$\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}|_A(\tau^\sharp) := -\int_Y F_A \wedge^\kappa \tau = 4\int_Y \mathrm{Tr}((F_A)_\alpha \wedge \tau_\alpha)$$

Remarque : Cette 1-forme se trouve par exemple en (1994, Salamon, *Lagr. Intersect.*).

Rappel : Sur $\mathcal{A}_\Sigma$ repose une forme symplectique

$$\hat{\omega}^\sharp\left(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp\right) := \int_\Sigma \tau_1 \wedge^\kappa \tau_2$$

qu'on peut aussi écrire plus simplement comme $\hat{\omega}(\tau_1, \tau_2)$.

Proposition : En dénotant par $\hat{\omega}$ la forme symplectique sur $\mathcal{A}_\Sigma$ pour $\Sigma = \partial Y$, la différentielle extérieure de la 1-forme $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ sur $\mathcal{A}_Y$ est donnée en tout $A \in \mathcal{A}_Y$ et $\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp \in T_A\mathcal{A}_Y$ par

$$(\mathrm{d}\mathcal{F}_{\mathrm{CS}})|_A(\tau_1^\sharp, \tau_1^\sharp) = -\hat{\omega}\left((\tau_1|_{\partial Y}), (\tau_2|_{\partial Y})\right)$$

Preuve : Soient $A \in \mathcal{A}_Y$ et $\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp \in T_A\mathcal{A}_Y$ quelconques. Les deux vecteurs tangents $\tau_1^\sharp$ et $\tau_2^\sharp$ s'étendent à des champs vectoriels constants $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{A}_Y)$ qui commutent mutuellement, i.e. $[\xi_1, \xi_2] = 0$. En utilisant la formule magique de

Cartan, on trouve :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\mathcal{F}_{\mathrm{CS}})|_A(\tau_1^\sharp,\tau_2^\sharp) &= (\mathrm{d}\mathcal{F}_{\mathrm{CS}})|_A(\xi_1,\xi_2)\\
&= (\xi_1(\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}(\xi_2)))|_A - (\xi_2(\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}))|_A - \mathcal{F}_{\mathrm{CS}}|_A([\xi_1,\xi_2])\\
&= (\xi_1(\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}(\xi_2)))|_A - (\xi_2(\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}))|_A\\
&= -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\int_Y F_{A+s\tau_1^\sharp}\wedge^\kappa \tau_2 + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\int_Y F_{A+s\tau_2^\sharp}\wedge^\kappa \tau_1\\
&= -\int_Y \mathrm{d}_A\tau_1\wedge^\kappa\tau_2 + \int_Y \mathrm{d}_A\tau_2\wedge^\kappa\tau_1\\
&= -\int_Y(\mathrm{d}_A\tau_1\wedge^\kappa\tau_2 - \tau_1\wedge\mathrm{d}_A\tau_2)\\
&= -\int_Y \mathrm{d}(\tau_1\wedge^\kappa\tau_2)\\
&= -\int_{\partial Y}\tau_1\wedge^\kappa\tau_2\\
&= -\hat{\omega}((\tau_1|_{\partial Y}),(\tau_2|_{\partial Y}))
\end{aligned}$$

□

Remarque : Si $\partial Y = \emptyset$, la 1-forme $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ est fermée. Puisque $\mathcal{A}_Y$ est affine (donc simplement connexe), $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ est exacte. En particulier, $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}} = \mathrm{d}S_{\mathrm{CS}}$. En effet, dans le cas $\partial Y = \emptyset$, on avait calculé :

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{CS}}|_A(\tau^\sharp) = -\int_Y F_A\wedge^\kappa\tau$$

Ce qui est précisément $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}|_A(\tau^\sharp)$.

Remarque : Si $\partial Y \neq \emptyset$, $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ n'est pas fermée.

Proposition : $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ est $\mathcal{G}_Y$-invariante (pour l'action de $\mathcal{G}_Y$ sur $\mathcal{A}_Y$ par la gauche et par celle par la droite).

Preuve : Il suffit de vérifier pour l'action à gauche. Dénotons la $\mathcal{G}_Y$-action de groupe à gauche par $\Psi : \mathcal{G}_Y \mapsto \mathrm{Diff}(\mathcal{A}_Y)$. Elle est donnée par $\Psi_\Lambda(A) := \Lambda\cdot A = (\Lambda^{-1})^*A$ pour tout $A\in\mathcal{A}_Y$ et $\Lambda\in\mathcal{G}_Y$. D'abord, remarquons que le push-forward

$(\Psi_\Lambda)_*|_A : T_A\mathcal{A}_Y \to T_{\Lambda\cdot A}\mathcal{A}_Y$ est donné pour tout $\tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}_Y$ par :

$$\begin{aligned}
(\Psi_\Lambda)_*|_A(\tau^\sharp) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \Psi_\Lambda(A+s\tau^\sharp) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} (\Lambda^{-1})^*(A+s\tau^\sharp) \\
&= (\Lambda^{-1})^*\tau^\sharp \\
&= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp}\circ\tau^\sharp
\end{aligned}$$

où j'ai utilisé le fait que les formes basiques $\eta^\sharp \in \Omega^k_{\rho,\mathrm{hor}}(P;V)$ se transforment comme $\Lambda^*\eta^\sharp = \rho(\lambda^\sharp)^{-1}\circ\eta^\sharp$ sous les transformations de jauge. On peut alors étudier le pull-back de $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ par Ψ_Λ. Soient $A \in \mathcal{A}_Y$, $\tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}_Y$ et $\Lambda \in \mathcal{G}_Y$ quelconques. En utilisant le fait que $F_{\Lambda\cdot A} = \mathrm{Ad}_\lambda \circ F_A$ et le fait que la forme de Killing K est Ad-invariante, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
((\Psi_\Lambda)^*\mathcal{F}_{\mathrm{CS}})|_A(\tau^\sharp) &= \mathcal{F}_{\mathrm{CS}}|_{\Psi_\Lambda(A)}((\Psi_\Lambda)_*\tau^\sharp) \\
&= -\int_Y F_{\Psi_\Lambda(A)} \wedge^\kappa (\mathrm{Ad}_\lambda\circ\tau) \\
&= -\int_Y (\mathrm{Ad}_\lambda\circ F_A) \wedge^\kappa (\mathrm{Ad}_\lambda\circ\tau) \\
&= -\int_Y F_A \wedge^\kappa \tau \\
&= \mathcal{F}_{\mathrm{CS}}|_A(\tau^\sharp)
\end{aligned}$$

□

Proposition : $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ est infinitésimalement $\mathcal{G}_Y$-invariante (pour l'action de $\mathcal{G}_Y$ sur $\mathcal{A}_Y$ par la gauche et par celle par la droite).

Preuve : Il suffit de montrer l'invariance infinitésimale par l'action à gauche de $\mathcal{G}_Y$ sur $\mathcal{A}_Y$. Pour montrer que $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ est $\mathcal{G}_Y$-invariante, il suffit de montrer que $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ meurt sous l'action infinitésimale par $\mathfrak{G}_Y = \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_Y)$. Soit $\Upsilon \in \mathfrak{G}_Y$ quelconque. Soit $\Upsilon^* \in \mathfrak{X}(\mathcal{A}_Y)$ son champ vectoriel fondamental correspondant donné en chaque $A \in \mathcal{A}_Y$ par $\Upsilon^*|_A = -\mathrm{d}^A\upsilon^\sharp$ où $\upsilon^\sharp = A(\Upsilon) \in \Omega^0_{\mathrm{Ad,hor}}(P_Y;\mathfrak{g})$. On veut alors montrer que $\mathcal{L}_{\Upsilon^*}\mathcal{F}_{\mathrm{CS}} = 0$ en chaque $A \in \mathcal{A}_Y$. Pour cela, utilisons la formule magique de Cartan ainsi que la formule $K([\xi_1,\xi_2],\xi_3) = K(\xi_1,[\xi_2,\xi_3]), \forall\xi_1,\xi_2,\xi_3 \in \mathfrak{g}$. On calcule directement pour $\tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}_Y$ quelconque :

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{L}_{\Upsilon^*}\mathcal{F}_{\mathrm{CS}})|_A(\tau^\sharp) \\
= \; & \iota_{\tau^\sharp}\iota_{\Upsilon^*}(\mathrm{d}\mathcal{F}_{\mathrm{CS}})|_A + \iota_{\tau^\sharp}\mathrm{d}(\iota_{\Upsilon^*}\mathcal{F}_{\mathrm{CS}})|_A \\
= \; & -\iota_{\tau^\sharp}\iota_{\Upsilon^*}\hat{\omega} + \iota_{\tau^\sharp}(\mathrm{d}(\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}(\Upsilon^*)))|_A \\
= \; & \int_\Sigma (\mathrm{d}_A\upsilon) \wedge^\kappa \tau + \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \int_Y F_{A+s\tau^\sharp} \wedge^\kappa (\mathrm{d}_{A+s\tau^\sharp}\upsilon) \\
= \; & \int_{\partial Y} (\mathrm{d}_A\upsilon) \wedge^\kappa \tau + \int_Y \mathrm{d}_A\tau \wedge^\kappa (\mathrm{d}_A\upsilon) + \int_Y F_A \wedge^\kappa [\tau, \upsilon] \\
= \; & \int_Y \mathrm{d}((\mathrm{d}_A\upsilon) \wedge^\kappa \tau) + \int_Y (\mathrm{d}_A\upsilon) \wedge^\kappa \mathrm{d}_A\tau - \int_Y F_A \wedge^\kappa [\upsilon, \tau] \\
= \; & \int_Y ((\mathrm{d}_A)^2\upsilon) \wedge^\kappa \tau - \int_Y (\mathrm{d}_A\upsilon) \wedge^\kappa \mathrm{d}_A\tau + \int_Y (\mathrm{d}_A\upsilon) \wedge^\kappa \mathrm{d}_A\tau - \int_Y [F_A, \upsilon] \wedge^\kappa \tau \\
= \; & \int_Y [F_A, \upsilon] \wedge^\kappa \tau - \int_Y [F_A, \upsilon] \wedge^\kappa \tau \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

□

Remarque : Ici je fais la distinction entre $\mathcal{G}_Y$-invariance et $\mathcal{G}_Y$-invariance infinitésimale car $\mathcal{G}_Y$ n'est généralement pas connexe. Néanmoins, $\mathcal{G}_Y$-invariance implique $\mathcal{G}_Y$-invariance infinitésimale.

Proposition : Pour tout $A \in \mathcal{A}_Y$ et tout $\Upsilon \in \mathfrak{G}_Y$ $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ on a :

$$\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}|_A(\Upsilon^*|_A) = \int_{\partial Y} F_A \wedge^\kappa \upsilon \qquad \text{(pour l'action à gauche)}$$

$$\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}|_A(\Upsilon^*|_A) = -\int_{\partial Y} F_A \wedge^\kappa \upsilon \qquad \text{(pour l'action à droite)}$$

Preuve : Il suffit de vérifier pour l'action à gauche de $\mathcal{G}_Y$ sur $\mathcal{A}_Y$. Soit $\Upsilon^* := (\Psi_*)|_e(\Upsilon) \in \mathfrak{X}(\mathcal{A}_Y)$ le champ vectoriel fondamental correspondant à $\Upsilon \in \mathfrak{G}_Y$. Il est donné en chaque $A \in \mathcal{A}_Y$ par $\Upsilon^*|_A = -\mathrm{d}^A\upsilon^\sharp$ pour $\upsilon^\sharp = A(\Upsilon)$. En utilisant l'identité de Bianchi, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}|_A(\Upsilon^*|_A) &= -\int_Y F_A \wedge^\kappa (-\mathrm{d}_A \upsilon) \\
&= \int_Y F_A \wedge^\kappa \mathrm{d}_A \upsilon + 0 \\
&= \int_Y F_A \wedge^\kappa \mathrm{d}_A \upsilon + \int_Y (\mathrm{d}_A F_A) \wedge^\kappa \upsilon \\
&= \int_Y \mathrm{d}(F_A \wedge^\kappa \upsilon) \\
&= \int_{\partial Y} F_A \wedge^\kappa \upsilon
\end{aligned}$$

□

Remarque : Si on se limite aux transformations de jauge infinitésimales nulles sur ∂P_Y, i.e. telles que $\upsilon|_{\partial Y} = 0$, alors $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}|_A(\Upsilon^*|_A) = 0$. Ainsi, $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ tue l'action infinitésimale de la sous-algèbre des Υ nuls sur ∂P_Y. Pour cette sous-algèbre, $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ est donc horizontale (car tue les vecteurs verticaux).

Remarque : Salamon (1994) dit que $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ est horizontale pour la $\mathcal{G}_Y$-action sur $\mathcal{A}_Y$. Pourtant, par la dernière remarque ça ne semble pas toujours le cas. Bref, pourquoi Salamon dit-il cela ?

Remarque : Ces dernière remarques par rapport au fait que $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ ne semble pas horizontale pour la $\mathcal{G}_Y$-action sur $\mathcal{A}_Y$ quand Y est à bord sont reliées aux remarques que j'ai fait plus haut quand on regardait si S_{CS} est $\mathcal{G}_Y$-invariante ou non en calculant $\mathrm{d}S_{\mathrm{CS}}|_A(-\mathrm{d}_A\upsilon)$. Encore une fois, Herald (1994) dit que dans le cas à bord S_{CS} n'est pas $\mathcal{G}_Y$-invariante (même pas $\mathbb{Z}$-équivariante !).

Remarque : Si on se limite aux $A \in \mathcal{A}_Y$ tels que $A|_{\partial P_Y} \in \mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_{\partial Y}$, $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ est aussi horizontale relativement à la $\mathcal{G}_Y$-action sur $\mathcal{A}_Y$.

Remarque : Le fait d'être horizontal et $\mathcal{G}_Y$-invariant fait de $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$, sous l'une des deux dernières conditions qui précèdent, une forme basique qui descend au quotient $\mathcal{M}_Y = \mathcal{A}_Y/\mathcal{G}_Y$.

Notation : Soit $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}_\Sigma$ une sous-variété lagrangienne. Soit

$$\mathcal{A}_{Y,\mathcal{L}} := \{A \in \mathcal{A}_Y : A|_{\partial P_Y} \in \mathcal{L}\} \subset \mathcal{A}_Y$$

Proposition : Alors $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ restreinte à $\mathcal{A}_{Y,\mathcal{L}}$ est fermée.

Preuve : Soient $A \in \mathcal{A}_{Y,\mathcal{L}}$ et $\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp \in T_A\mathcal{A}_{Y,\mathcal{L}}$. Alors :

$$(\mathrm{d}\mathcal{F}_{\mathrm{CS}})_A(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp) = -\hat{\omega}((\tau_1|_{\partial Y}), (\tau_2|_{\partial Y})) = 0$$

où la dernière égalité découle du fait que $\tau_1^\sharp|_{\partial P_Y}$ et $\tau_2^\sharp|_{\partial P_Y}$ reposent en $T_{A|_{\partial P_Y}}\mathcal{L}$ où $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}_\Sigma$ est lagrangienne. □

Proposition : Même si $\mathcal{A}_{Y,\mathcal{L}}$ pas simplement connexe, $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ y est fermée donc est S^1-exacte, i.e. $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}} = \mathrm{d}S_{\mathrm{CS}}$ pour S_{CS} une fonction sur $\mathcal{A}_{Y,\mathcal{L}}$ à valeurs en le cercle. (genre).

Preuve : La 1-forme $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ est donnée par :

$$\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}|_A(\tau^\sharp) := -\int_Y F_A \wedge^\kappa \tau$$

La différentielle $\mathrm{d}S_{\mathrm{CS}}$ est donnée par :

$$\mathrm{d}S_{\mathrm{CS}}|_A(\tau^\sharp) = -\int_Y F_A \wedge^\kappa \tau - 2\int_{\partial Y} \mathrm{Tr}\,(A_\alpha \wedge \tau_\alpha)$$

À TERMINER ! ! ! TO DO. □

Remarque : Salamon utilise une autre fonctionnelle de Chern-Simons du type :

$$S(A_\alpha) = \int_Y \mathrm{Tr}(A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha + \frac{1}{3}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha) + \int_0^1 \int_\Sigma \mathrm{Tr}((A_0(t))_\alpha \wedge (\dot{A}_0(t))_\alpha)\mathrm{d}t$$

où A_0 est sur un morceau $\Sigma \times [0,1]$ qu'il colle au bout de $\Sigma = \partial Y$, bref une sorte d'extension de Y.

Proposition : $\mathrm{crit}(S_{\mathrm{CS}})$ est en bijection avec $L_Y \cap L$ où $L_Y := \mathcal{L}_Y/\mathcal{G}_\Sigma$, $\mathcal{L}_Y := \{A|_\Sigma : A \in \mathcal{A}_Y^{\mathrm{fl}}\} \subset \mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}} \subset \mathcal{A}_\Sigma$ et $L = \mathcal{L}/\mathcal{G}_\Sigma$ sont quotient par $\mathcal{G}_\Sigma$ (reposent en $\mathcal{M}_\Sigma$).

=========

Proposition : $\mathcal{A}_{Y,\mathcal{L}}$ pas simplement connexe.

Preuve : TO DO. (en fait c'est selon son cas particulier, voir son article Salamon-1994) $\square$

=========

À la 1-forme $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ correspond un champ vectoriel $A \mapsto -\star_g F_A$ sur $\mathcal{A}_Y$. C'est la musicalité via $(\cdot, \cdot)_g$? La musicalité est donc juste le $\star_g$? Et si Y n'est pas fermée ?

==========

Voir $Y = \partial X$, puis $X = Y \times \mathbb{R}$, puis $\Sigma = \partial Y$, etc. Relier CS et YM.

à faire : CS sous changement de jauge (et m.q. que c'est constant par chang. de jauge infinitésimale, i.e. que la dérivée par variation dans la direction des orbites de $\mathcal{G}_Y$ est nul).

32 Décomposition simple de Chern-Simons :

32.1 Introduction :

Le but de cette section est d'établir une décomposition simple de la fonctionnelle de Chern-Simons pour $Y^3 = \Sigma^2 \times [0,1]$. À terme, le but sera d'établir la fonctionnelle de Chern-Simons comme étant la fonctionnelle d'Hamilton-Jacobi sur l'espace des chemins $A_s : [0,1] \to (\mathcal{A}_\Sigma, \omega)$ pour un certain hamiltonien non autonome H_s sur $\mathcal{A}_\Sigma$ à déterminer.

32.2 Le lieu :

Soit (Y^3, g) une 3-variété lisse riemannienne orientable où $Y = \Sigma \times [0,1]$ est muni d'un SU(2)-fibré principal (forcément trivial) $\pi_Y : P_Y \to Y$ qui se décompose comme $P_Y = P_\Sigma \times [0,1]$ où $\pi_\Sigma : P_\Sigma \to \Sigma$ est un SU(2)-fibré principal trivial. Posons

$$\Sigma_s := \Sigma \times \{s\} \quad \text{et} \quad P_{\Sigma_s} := P_\Sigma \times \{s\}$$

pour tout $s \in [0,1]$. Considérons les familles d'inclusions

$$\iota_s : \Sigma \hookrightarrow Y \quad \iota_s^\sharp : P_\Sigma \hookrightarrow P_Y$$

définies par $\iota_s(x) = (x,s)$ pour $x \in \Sigma$, $s \in [0,1]$ et $\iota_s^\sharp(a) = (a,s)$ pour $a \in P_\Sigma$ et $s \in [0,1]$. Elles vérifient

$$\iota_s(\Sigma) = \Sigma_s \quad \text{et} \quad \iota_s^\sharp(P_\Sigma) = P_{\Sigma_s}$$

Considérons $s_{\alpha,\Sigma}$ une section (globale) du fibré P_Σ. Elle induit une section (globale) $s_{\alpha,Y}$ du fibré P_Y par $s_{\alpha,Y}(x,s) := (s_{\alpha,\Sigma}(x), s)$ pour tout $(x,s) \in Y$.

Proposition : Pour tout $s \in [0,1]$, on a deux diagrammes qui commutent :

$$\iota_s^\sharp \circ s_{\alpha,\Sigma} = s_{\alpha,Y} \circ \iota_s$$

$$\iota_s \circ \pi_\Sigma = \pi_Y \circ \iota_s^\sharp$$

Preuve : D'abord la première égalité. Soit $x \in \Sigma$ quelconque. Alors

$$\iota_s^\sharp(s_{\alpha,\Sigma}(x)) = (s_{\alpha,\Sigma}(x), s) = s_{\alpha,Y}(x, s) = s_{\alpha,Y}(\iota_s(x))$$

Ensuite la seconde égalité. Soit $a \in P_\Sigma$ quelconque. Alors

$$\iota_s(\pi_\Sigma(a)) = (\pi_\Sigma(a), s) = \pi_Y(a, s) = \pi_Y(\iota_s^\sharp(a))$$

□

Supposons que la métrique g sur Y se décompose comme $g = \tilde{g} + \mathrm{d}s \otimes \mathrm{d}s$ de telle sorte que $\tilde{g}|_{\Sigma_s}$ soit une métrique riemannienne pour Σ_s. Posons $g_s := (\iota_s)^*\tilde{g}$, c'est une famille de métriques riemanniennes sur Σ.

32.3 Un champ vectoriel sur Y et un sur P_Y :

Posons

$$\partial_s := (\mathrm{d}s)^g \in \mathfrak{X}(Y)$$
$$s^\sharp := \pi_Y^* s = s \circ \pi \in C^\infty(P_Y; \mathbb{R})$$

Posons $\partial_s^\sharp \in \mathfrak{X}(P_Y)$ défini comme

$$\partial_s^\sharp|_{(s_{\alpha,Y})\cdot g} := (\Phi_g)_*(s_{\alpha,Y})_*(\partial_s)$$

Remarque : $\partial_s^\sharp$ est indépendant du $s_{\alpha,\Sigma}$ choisi.

Proposition : $(\pi_Y)_*\partial_s^\sharp = \partial_s$.

Preuve : Soit $a \in P_Y$ quelconque. Alors il existe $x \in Y$ et $g \in G$ tel que $a = (s_{\alpha,Y}(x)) \cdot g$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
(\pi_Y)_*(\partial_s^\sharp|_a) &= (\pi_Y)_*(\partial_s^\sharp|_{(s_{\alpha,Y}(x))\cdot g}) \\
&= (\pi_Y)_*(\Phi_g)_*(s_{\alpha,Y})_*(\partial_s) \\
&= (\pi_Y \circ \Phi_g \circ s_{\alpha,Y})_*\partial_s \\
&= (\pi_Y \circ s_{\alpha,Y})_*\partial_s \\
&= (\mathrm{id}_Y)_*\partial_s \\
&= \partial_s
\end{aligned}$$

□

Corollaire : $\mathrm{d}s^\sharp(\partial_s^\sharp) = 1$.

Preuve : $\mathrm{d}s^\sharp(\partial_s^\sharp) = (\mathrm{d}\pi_Y^* s)(\partial_s^\sharp) = (\pi_Y^*(\mathrm{d}s))(\partial_s^\sharp) = \mathrm{d}s((\pi_Y)_*\partial_s^\sharp) = \mathrm{d}s(\partial_s) = 1$. □

32.4 Décomposition des connexions :

Soit $A \in \mathcal{A}_Y$ une connexion quelconque sur P_Y. On pose

$$\varphi^\sharp := A(\partial_s^\sharp)$$
$$\tilde{A} := A - \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp$$

Ainsi, la connexion A se décompose comme

$$A = \tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp$$

Proposition : $\varphi^\sharp$ est Ad-équivariante.

Preuve : Découle de la Ad-équivariance de A et de la G-invariance de $\partial_s^\sharp$. □

Proposition : $\tilde{A}(\partial_s^\sharp) = 0$.

Preuve : $\tilde{A}(\partial_s^\sharp) = A(\partial_s^\sharp) - \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp(\partial_s^\sharp) = \varphi^\sharp - \varphi^\sharp = 0$. □

Posons

$$A_s := (\iota_s^\sharp)^* \tilde{A} \in \mathcal{A}_{P_\Sigma}$$
$$\varphi_s^\sharp := (\iota_s^\sharp)^* \varphi^\sharp$$

Ici, A_s est une famille de connexions sur Σ et $\varphi_s := (\varphi_s^\sharp)_\sharp$ est une famille de sections en $\Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_\Sigma)$.

Remarque : Sous la décomposition qui précède, il y a donc une correspondence biunivoque

$$\mathcal{A}_Y \leftrightarrow \{\tilde{u} : [0,1] \to \mathcal{A}_\Sigma \times \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_\Sigma)\}$$

où $\tilde{u}(s) = (u(s), \varphi_s)$ pour $u(s) = A_s$. Remarquons que cette décomposition est indépendante du choix de section s_α sur Σ.

32.5 Forme de courbure :

La forme de courbure de $A \in \mathcal{A}_Y$ est par définition $F_A^\sharp := \mathrm{d}^A A$. Sous la décomposition $A = \tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp$, bien que $\tilde{A}$ ne soit pas une forme de connexion sur P_Y, elle en est une sur chaque tranche P_{Σ_s}. On peut alors lui associer une 2-forme $F_{\tilde{A}}^\sharp \in \Omega^2_{\mathrm{Ad,hor}}(Y; \mathfrak{su}(2))$ telle que sa restriction à chaque P_{Σ_s} est la forme de courbure de $\tilde{A}$ sur P_{Σ_s} :

$$F_{\tilde{A}}^\sharp|_{P_{\Sigma_s}} := F^\sharp_{\tilde{A}|_{\Sigma_s}}$$

De même, on peut définir la dérivée covariante extérieure $\mathrm{d}^{\tilde{A}}$ tranche par tranche :

$$\mathrm{d}^{\tilde{A}}(\,\cdot\,)|_{P_{\Sigma_s}} := \mathrm{d}^{\tilde{A}|_{P_{\Sigma_s}}}(\,\cdot\,|_{P_{\Sigma_s}})$$

Soit $\tilde{A}^{(s^\sharp)}$ la dérivée de $\tilde{A}$ dans la direction $[0,1]$ de $P_Y = P_\Sigma \times [0,1]$. J'écrirai plus simplement $\tilde{A}^{(s)}$ sans le dièse.

Proposition : Soit $F_A^\sharp \in \Omega^2_{\mathrm{Ad,hor}}(P_Y; \mathfrak{su}(2))$ la forme de courbure de $A \in \mathcal{A}_Y$. Alors sous la décomposition $A = \tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp$, la forme de courbure se décompose comme :

$$F_A^\sharp = F_{\tilde{A}}^\sharp + (\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{\Sigma_s}} \varphi^\sharp - \tilde{A}^{(s)}) \wedge \mathrm{d}s^\sharp \in \Omega^2_{\mathrm{Ad,hor}}(P_Y; \mathfrak{g})$$

Preuve : La décomposition $P_Y = P_\Sigma \times [0,1]$ induit une décomposition $\mathrm{d}|_{P_Y} = \mathrm{d}|_{P_{\Sigma_s}} + \mathrm{d}|_{[0,1]}$ de la différentielle extérieure, où $\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_s}}$ est la différentielle extérieure le long de la tranche P_{Σ_s} et où $\mathrm{d}|_{[0,1]}$ est la différentielle le long de $[0,1]$ (du paramètre s). En utilisant la décomposition $A = \tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s$, ainsi que l'équation structurelle d'Élie Cartan une première puis une seconde fois, on calcule directement :

$$
\begin{aligned}
& F_A \\
= \;& \mathrm{d}|_{P_Y} A + \frac{1}{2}[A \wedge A] \\
= \;& \mathrm{d}|_{P_Y} (\tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp) + \frac{1}{2}[(\tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp) \wedge (\tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp)] \\
= \;& \mathrm{d}|_{P_Y} \tilde{A} + \mathrm{d}|_{P_Y} (\varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp) \\
& + \frac{1}{2}[\tilde{A} \wedge \tilde{A}] + \frac{1}{2}[\tilde{A} \wedge \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp] + \frac{1}{2}[\varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp \wedge \tilde{A}] + \frac{1}{2}[\varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp \wedge \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp] \\
= \;& (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_s}} + \mathrm{d}|_{[0,1]})\tilde{A} + (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_s}} + \mathrm{d}|_{[0,1]})(\varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp) + \frac{1}{2}[\tilde{A} \wedge \tilde{A}] + [\tilde{A} \wedge \mathrm{d}s^\sharp, \varphi^\sharp] \\
= \;& \mathrm{d}|_{P_{\Sigma_s}} \tilde{A} + \mathrm{d}|_{[0,1]}\tilde{A} + (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_s}} \varphi^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp + \frac{1}{2}[\tilde{A} \wedge \tilde{A}] + [\tilde{A}, \varphi^\sharp] \wedge \mathrm{d}s^\sharp \\
= \;& F^\sharp_{\tilde{A}} + \mathrm{d}s^\sharp \wedge \tilde{A}^{(s)} + (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_s}} \varphi^\sharp) \wedge \mathrm{d}s^\sharp + [\tilde{A}, \varphi^\sharp] \wedge \mathrm{d}s^\sharp \\
= \;& F^\sharp_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_s}} \varphi^\sharp + [\tilde{A}, \varphi^\sharp] - \tilde{A}^{(s)}) \wedge \mathrm{d}s^\sharp \\
= \;& F^\sharp_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}^{\tilde{A}}|_{P_{\Sigma_s}} \varphi^\sharp - \tilde{A}^{(s)}) \wedge \mathrm{d}s^\sharp
\end{aligned}
$$

□

Corollaire : $F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_s}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s \in \Omega^2(Y; \mathrm{Ad}P_Y)$.

Remarque : Dans le cas particulier où la famille de connexions $A_s := (\iota_s^\sharp)^*\tilde{A}$ sur P_Σ provient d'une isotopie de jauge induite par $\upsilon_s^\sharp := -\varphi_s^\sharp$, i.e. $\dot{A}_s = -\mathrm{d}^{A_s}\upsilon_s^\sharp = \mathrm{d}^{A_s}\varphi_s^\sharp$, on remarque que le second terme de la décomposition de la courbure meurt. Le second terme du split de la courbure représente donc une restriction à ce que A_s soit obtenu d'une isotopie de jauge induite par $\upsilon_s^\sharp = -\varphi_s^\sharp$.

32.6 Fonctionnelle de CS :

Soit s_α une section trivialisante globale du SU(2)-fibré principal trivial $P_Y \to Y$. Soient $A \in \mathcal{A}_Y$ et $A_\alpha := s_\alpha^* A$. La fonctionnelle de Chern-Simons S_{CS} en $A \in \mathcal{A}_Y$ est donnée par :

$$S_{\mathrm{CS}}(A_\alpha) = \int_Y \mathrm{Tr}\left(2A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha + \frac{4}{3}A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha\right)$$

où $\wedge$ dénote $(\wedge, \circ)$. À quoi ressemble-t-elle sous la décomposition simple de la connexion $A_\alpha = \tilde{A}_\alpha + \tilde{\varphi}_\alpha \mathrm{d}s$?

Proposition : La décomposition simple de la fonctionnelle de Chern-Simons est donnée par :

$$S_{\mathrm{CS}}(A_\alpha) = \int_{[0,1]} \left(\int_\Sigma \frac{1}{2} (A_s)_\alpha \wedge^{\kappa_\alpha} (A_s^{(s)})_\alpha - \int_\Sigma F_{A_s} \wedge^\kappa \varphi_s \right) \mathrm{d}s$$

Preuve : Séparons d'abord $S_{\mathrm{CS}}(A)$ en deux parties :

$$S_{\mathrm{CS}}(A_\alpha) = 2 \int_Y \mathrm{Tr}\,(A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha) + \frac{4}{3} \int_Y \mathrm{Tr}\,(A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha)$$

La connexion A_α sur $Y = \Sigma \times [0,1]$ se décompose comme :

$$A_\alpha = \tilde{A}_\alpha + \varphi_\alpha \mathrm{d}s$$

où $\tilde{A}_\alpha$ est dans ds. Développons le premier terme de $S_{\mathrm{CS}}(A_\alpha)$:

$$\begin{array}{rl}
& \mathrm{Tr}\,(A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha) \\
= & \mathrm{Tr}\,\big((\tilde{A}_\alpha + \varphi_\alpha \mathrm{d}s) \wedge \mathrm{d}|_Y (\tilde{A}_\alpha + \varphi_\alpha \mathrm{d}s)\big) \\
= & \mathrm{Tr}\,\big((\tilde{A}_\alpha + \varphi_\alpha \mathrm{d}s) \wedge (\mathrm{d}|_Y \tilde{A}_\alpha + \mathrm{d}|_Y (\varphi_\alpha \mathrm{d}s))\big) \\
= & \mathrm{Tr}\,\big((\tilde{A}_\alpha + \varphi_\alpha \mathrm{d}s) \wedge (\mathrm{d}|_{\Sigma_s} \tilde{A}_\alpha + \mathrm{d}|_{[0,1]} \tilde{A}_\alpha + \mathrm{d}|_{\Sigma_s} (\varphi_\alpha \mathrm{d}s) + \mathrm{d}|_{[0,1]} (\varphi_\alpha \mathrm{d}s))\big) \\
= & \mathrm{Tr}\,\Big((\tilde{A}_\alpha + \varphi_\alpha \mathrm{d}s) \wedge (\mathrm{d}|_{\Sigma_s} \tilde{A}_\alpha + \mathrm{d}s \wedge \tilde{A}_\alpha^{(s)} + (\mathrm{d}|_{\Sigma_s} \varphi_\alpha) \wedge \mathrm{d}s + \mathrm{d}s \wedge \varphi_\alpha^{(s)} \mathrm{d}s)\Big) \\
= & \mathrm{Tr}\,\Big((\tilde{A}_\alpha + \varphi_\alpha \mathrm{d}s) \wedge (\mathrm{d}|_{\Sigma_s} \tilde{A}_\alpha + \mathrm{d}s \wedge \tilde{A}_\alpha^{(s)} + (\mathrm{d}|_{\Sigma_s} \varphi_\alpha) \wedge \mathrm{d}s)\Big) \\
= & \mathrm{Tr}\,\Big(\tilde{A}_\alpha \wedge (\mathrm{d}|_{\Sigma_s} \tilde{A}_\alpha + \mathrm{d}s \wedge \tilde{A}_\alpha^{(s)} + (\mathrm{d}|_{\Sigma_s} \varphi_\alpha) \wedge \mathrm{d}s)\Big) \\
& +\mathrm{Tr}\,\Big(\varphi_\alpha \mathrm{d}s \wedge (\mathrm{d}|_{\Sigma_s} \tilde{A}_\alpha + \mathrm{d}s \wedge \tilde{A}_\alpha^{(s)} + (\mathrm{d}|_{\Sigma_s} \varphi_\alpha) \wedge \mathrm{d}s)\Big) \\
= & \mathrm{Tr}\,\Big(\tilde{A}_\alpha \wedge \mathrm{d}|_{\Sigma_s} \tilde{A}_\alpha + \tilde{A}_\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \tilde{A}_\alpha^{(s)} + \tilde{A}_\alpha \wedge (\mathrm{d}|_{\Sigma_s} \varphi_\alpha) \wedge \mathrm{d}s\Big) \\
& +\mathrm{Tr}\,\Big(\varphi_\alpha \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}|_{\Sigma_s} \tilde{A}_\alpha + \varphi_\alpha \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}s \wedge \tilde{A}_\alpha^{(s)} + \varphi_\alpha \mathrm{d}s \wedge (\mathrm{d}|_{\Sigma_s} \varphi_\alpha) \wedge \mathrm{d}s\Big) \\
= & \mathrm{Tr}\,\Big(\tilde{A}_\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \tilde{A}_\alpha^{(s)} + \tilde{A}_\alpha \wedge (\mathrm{d}|_{\Sigma_s} \varphi_\alpha) \wedge \mathrm{d}s + \varphi_\alpha \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}|_{\Sigma_s} \tilde{A}_\alpha\Big) \\
= & \mathrm{Tr}\,\Big(-\tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha^{(s)} \wedge \mathrm{d}s + \tilde{A}_\alpha \wedge (\mathrm{d}|_{\Sigma_s} \varphi_\alpha) \wedge \mathrm{d}s + \varphi_\alpha \circ \mathrm{d}|_{\Sigma_s} \tilde{A}_\alpha \wedge \mathrm{d}s\Big) \\
= & \mathrm{Tr}\,\Big(-\tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha^{(s)} + \tilde{A}_\alpha \wedge (\mathrm{d}|_{\Sigma_s} \varphi_\alpha) + \varphi_\alpha \circ \mathrm{d}|_{\Sigma_s} \tilde{A}_\alpha\Big) \wedge \mathrm{d}s
\end{array}$$

Ici j'ai utilisé $\tilde{A}_\alpha \wedge \mathrm{d}|_{\Sigma_s}\tilde{A}_\alpha = 0$ car $\tilde{A}_\alpha$ est une 1-forme sur Σ_s, $\mathrm{d}|_{\Sigma_s}\tilde{A}_\alpha$ est une 2-forme sur Σ_s et donc $\tilde{A}_\alpha \wedge \mathrm{d}|_{\Sigma_s}\tilde{A}_\alpha$ est une 3-forme sur Σ_s qui est de dimension 2. Développons ensuite le second terme de $S_{\mathrm{CS}}(A_\alpha)$:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Tr}\,(A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha) \\
= \;& \mathrm{Tr}\left((\tilde{A}_\alpha + \varphi_\alpha \mathrm{d}s) \wedge (\tilde{A}_\alpha + \varphi_\alpha \mathrm{d}s) \wedge (\tilde{A}_\alpha + \varphi_\alpha \mathrm{d}s)\right) \\
= \;& \mathrm{Tr}\left((\tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha + \varphi_\alpha \mathrm{d}s \wedge \tilde{A}_\alpha + \tilde{A}_\alpha \wedge \varphi_\alpha \mathrm{d}s + \varphi_\alpha \mathrm{d}s \wedge \varphi_\alpha \mathrm{d}s) \wedge (\tilde{A}_\alpha + \varphi_\alpha \mathrm{d}s)\right) \\
= \;& \mathrm{Tr}\left((\tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha - \varphi_\alpha \circ \tilde{A}_\alpha \wedge \mathrm{d}s + \tilde{A}_\alpha \circ \varphi_\alpha \wedge \mathrm{d}s) \wedge (\tilde{A}_\alpha + \varphi_\alpha \mathrm{d}s)\right) \\
= \;& \mathrm{Tr}\left(\tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha - \varphi_\alpha \circ \tilde{A}_\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \tilde{A}_\alpha + \tilde{A}_\alpha \circ \varphi_\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \tilde{A}_\alpha\right) \\
& + \mathrm{Tr}\left(\tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha \wedge \varphi_\alpha \mathrm{d}s - \varphi_\alpha \circ \tilde{A}_\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \varphi_\alpha \mathrm{d}s + \tilde{A}_\alpha \circ \varphi_\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \varphi_\alpha \mathrm{d}s\right) \\
= \;& \mathrm{Tr}\left(-\varphi_\alpha \circ \tilde{A}_\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \tilde{A}_\alpha + \tilde{A}_\alpha \circ \varphi_\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \tilde{A}_\alpha + \tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha \wedge \varphi_\alpha \mathrm{d}s\right) \\
= \;& \mathrm{Tr}\left(\varphi_\alpha \circ \tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha - \tilde{A}_\alpha \circ \varphi_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha + \tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha \circ \varphi_\alpha\right) \wedge \mathrm{d}s \\
= \;& \mathrm{Tr}\left(\tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha \circ \varphi_\alpha + \varphi_\alpha \circ \tilde{A}_\alpha (\wedge, \circ) \tilde{A}_\alpha + \tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha \circ \varphi_\alpha\right) \wedge \mathrm{d}s \\
= \;& \mathrm{Tr}\left(\tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha \circ \varphi_\alpha + \tilde{A}_\alpha (\wedge, \circ) \tilde{A}_\alpha \wedge \varphi_\alpha + \tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha \circ \varphi_\alpha\right) \wedge \mathrm{d}s \\
= \;& \mathrm{Tr}\left(3\tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha \circ \varphi_\alpha\right) \wedge \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Ici j'ai utilisé le fait que $\tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha = 0$ car est une 3-forme sur Σ_s qui est de dimension 2. On peut alors développer $S_{\mathrm{CS}}(A_\alpha)$:

$$\begin{aligned}
& S_{\mathrm{CS}}(A_\alpha) \\
= \;& 2\int_Y \mathrm{Tr}\,(A_\alpha \wedge \mathrm{d}A_\alpha) + \frac{4}{3}\int_Y \mathrm{Tr}\,(A_\alpha \wedge A_\alpha \wedge A_\alpha) \\
= \;& 2\int_{\Sigma\times[0,1]} \mathrm{Tr}\left(-\tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha^{(s)} + \tilde{A}_\alpha \wedge (\mathrm{d}|_{\Sigma_s}\varphi_\alpha) + \varphi_\alpha \circ \mathrm{d}|_{\Sigma_s}\tilde{A}_\alpha\right) \wedge \mathrm{d}s \\
& + \frac{4}{3}\int_{\Sigma\times[0,1]} \mathrm{Tr}\left(3\tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha \circ \varphi_\alpha\right) \wedge \mathrm{d}s \\
= \;& 2\int_{[0,1]} \left(\int_{\Sigma_s} \mathrm{Tr}\left(-\tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha^{(s)} + \tilde{A}_\alpha \wedge (\mathrm{d}|_{\Sigma_s}\varphi_\alpha) + \varphi_\alpha \circ \mathrm{d}|_{\Sigma_s}\tilde{A}_\alpha\right)\right) \mathrm{d}s \\
& + 4\int_{[0,1]} \left(\int_{\Sigma_s} \mathrm{Tr}\left(\tilde{A}_\alpha \wedge \tilde{A}_\alpha \circ \varphi_\alpha\right)\right) \mathrm{d}s \\
= \;& \int_{[0,1]} \left(2\int_\Sigma \mathrm{Tr}\left(-(A_s)_\alpha \wedge (A_s^{(s)})_\alpha + (A_s)_\alpha \wedge \mathrm{d}|_\Sigma(\varphi_s)_\alpha + (\varphi_s)_\alpha \circ \mathrm{d}|_\Sigma(A_s)_\alpha\right)\right) \mathrm{d}s \\
& + \int_{[0,1]} \left(4\int_\Sigma \mathrm{Tr}\,((A_s)_\alpha \wedge (A_s)_\alpha \circ (\varphi_s)_\alpha)\right) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

On se retrouve alors avec

$$S_{\mathrm{CS}}(A_\alpha) = 2\int_{[0,1]} f((A_s)_\alpha, (\varphi_s)_\alpha)\mathrm{d}s$$

où

$$\begin{aligned}
& f((A_s)_\alpha, (\varphi_s)_\alpha) \\
= \; & \int_\Sigma \mathrm{Tr}\left(-(A_s)_\alpha \wedge (A_s^{(s)})_\alpha + (A_s)_\alpha \wedge \mathrm{d}(\varphi_s)_\alpha + (\varphi_s)_\alpha \circ \mathrm{d}(A_s)_\alpha\right) \\
& +2\int_\Sigma \mathrm{Tr}\left((A_s)_\alpha \wedge (A_s)_\alpha \circ (\varphi_s)_\alpha\right)
\end{aligned}$$

où les dérivées extérieures d sont sur Σ, i.e. désignent $\mathrm{d}|_\Sigma$. D'abord, remarquons que par le théorème de Stokes sur Σ, qui est sans bord, et par Leibniz on trouve :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}\left((A_s)_\alpha \circ (\varphi_s)_\alpha\right) \\
&= \int_\Sigma \mathrm{d}\mathrm{Tr}\left((A_s)_\alpha \circ (\varphi_s)_\alpha\right) \\
&= \int_\Sigma \mathrm{Tr}\left((\mathrm{d}(A_s)_\alpha) \circ (\varphi_s)_\alpha - (A_s)_\alpha \wedge \mathrm{d}(\varphi_s)_\alpha\right)
\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\int_\Sigma \mathrm{Tr}\left((\mathrm{d}(A_s)_\alpha) \circ (\varphi_s)_\alpha\right) = \int_\Sigma \mathrm{Tr}\left((A_s)_\alpha \wedge \mathrm{d}(\varphi_s)_\alpha\right)$$

En utilisant la dernière égalité, la fonction f se développe alors comme :

$$\begin{aligned}
& f((A_s)_\alpha,(\varphi_s)_\alpha) \\
= \; & \int_\Sigma \mathrm{Tr}\left(-(A_s)_\alpha \wedge (A_s^{(s)})_\alpha + (A_s)_\alpha \wedge \mathrm{d}(\varphi_s)_\alpha + (\varphi_s)_\alpha \circ \mathrm{d}(A_s)_\alpha\right) \\
& +2\int_\Sigma \mathrm{Tr}\left((A_s)_\alpha \wedge (A_s)_\alpha \circ (\varphi_s)_\alpha\right) \\
= \; & \int_\Sigma \mathrm{Tr}\left(-(A_s)_\alpha \wedge (A_s^{(s)})_\alpha + (\mathrm{d}(A_s)_\alpha) \circ (\varphi_s)_\alpha + (\mathrm{d}(A_s)_\alpha) \circ (\varphi_s)_\alpha\right) \\
& +2\int_\Sigma \mathrm{Tr}\left((A_s)_\alpha \wedge (A_s)_\alpha \circ (\varphi_s)_\alpha\right) \\
= \; & \int_\Sigma \mathrm{Tr}\left(-(A_s)_\alpha \wedge (A_s^{(s)})_\alpha + 2(\mathrm{d}(A_s)_\alpha) \circ (\varphi_s)_\alpha + 2(A_s)_\alpha \wedge (A_s)_\alpha \circ (\varphi_s)_\alpha\right) \\
= \; & \int_\Sigma \mathrm{Tr}\left(-(A_s)_\alpha \wedge (A_s^{(s)})_\alpha + 2(\mathrm{d}(A_s)_\alpha + (A_s)_\alpha \wedge (A_s)_\alpha) \circ (\varphi_s)_\alpha\right) \\
= \; & \int_\Sigma \mathrm{Tr}\left(-(A_s)_\alpha \wedge (A_s^{(s)})_\alpha + 2(F_{A_s})_\alpha \circ (\varphi_s)_\alpha\right) \\
= \; & -\int_\Sigma \mathrm{Tr}\left((A_s)_\alpha \wedge (A_s^{(s)})_\alpha - 2(F_{A_s})_\alpha \circ (\varphi_s)_\alpha\right)
\end{aligned}$$

La décomposition simple de la fonctionnelle de Chern-Simons devient donc :

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{CS}}(A_\alpha) &= 2\int_{[0,1]} f((A_s)_\alpha,(\varphi_s)_\alpha)\mathrm{d}s \\
&= 2\int_{[0,1]}\left(-\int_\Sigma \mathrm{Tr}\left((A_s)_\alpha \wedge (A_s^{(s)})_\alpha - 2(F_{A_s})_\alpha \circ (\varphi_s)_\alpha\right)\right)\mathrm{d}s \\
&= -4\int_{[0,1]}\left(\int_\Sigma \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}(A_s)_\alpha \wedge (A_s^{(s)})_\alpha - (F_{A_s})_\alpha \circ (\varphi_s)_\alpha\right)\right)\mathrm{d}s \\
&= \int_{[0,1]}\left(\int_\Sigma \left(\frac{1}{2}(A_s)_\alpha \wedge^{\kappa_\alpha} (A_s^{(s)})_\alpha - (F_{A_s})_\alpha \wedge^{\kappa_\alpha} (\varphi_s)_\alpha\right)\right)\mathrm{d}s \\
&= \int_{[0,1]}\left(\int_\Sigma \frac{1}{2}(A_s)_\alpha \wedge^{\kappa_\alpha} (A_s^{(s)})_\alpha - \int_\Sigma (F_{A_s})_\alpha \wedge^{\kappa_\alpha} (\varphi_s)_\alpha\right)\mathrm{d}s \\
&= \int_{[0,1]}\left(\int_\Sigma \frac{1}{2}(A_s)_\alpha \wedge^{\kappa_\alpha} (A_s^{(s)})_\alpha - \int_\Sigma F_{A_s} \wedge^{\kappa} \varphi_s\right)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

où $\kappa_\alpha = -K$ est la forme de Killing sur $\mathfrak{su}(2)$. La décomposition simple de S_{CS} est donc donnée par :

$$S_{\text{CS}}(A_\alpha) = \int_{[0,1]} \left(\int_\Sigma \frac{1}{2} (A_s)_\alpha \wedge^{\kappa_\alpha} (A_s^{(s)})_\alpha - \int_\Sigma F_{A_s} \wedge^\kappa \varphi_s \right) \mathrm{d}s$$

□

32.7 Décomposition simple de l'équation de Bianchi $\mathbf{d}_A F_A = 0$:

Proposition : L'équation de Bianchi $\mathrm{d}_A F_A = 0$ se décompose sur $Y = \Sigma \times [0,1]$ comme :

$$\left(F^\sharp_{\tilde{A}} \right)^{(s)} = \mathrm{d}^{\tilde{A}} \tilde{A}^{(s)}$$

Preuve : La preuve est la même que celle dans la section sur la décomposition simple de Yang-Mills. □

Corollaire : La seconde équation de Bianchi $\mathrm{d}_A F_A = 0$ se décompose comme

$$\left(F_{\tilde{A}} \right)^{(s)} = \mathrm{d}_{\tilde{A}} \left(\tilde{A}^{(s)} \right)_\sharp$$

En particulier, on peut écrire ça sur Σ :

$$\left(F_{A_s} \right)^{(s)} = \mathrm{d}_{A_s} \left(A_t^{(s)} \right)_\sharp$$

Remarque : Cette équation est triviale en utilisant l'identité de Bianchi sur P_Σ :

$$\begin{aligned} \left(F^\sharp_{A_s} \right)^{(s)} - \mathrm{d}^{A_s} A_s^{(s)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(\mathrm{d}A_s + \frac{1}{2}[A_s \wedge A_s] \right) - \mathrm{d}A_s^{(s)} - [A_s \wedge A_s^{(s)}] \\ &= \mathrm{d}A_s^{(s)} + \frac{1}{2}[A_s^{(s)} \wedge A_s] + \frac{1}{2}[A_s \wedge A_t^{(s)}] - \mathrm{d}A_s^{(s)} - [A_s \wedge A_s^{(s)}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc l'équation de Bianchi sur Y ne nous apporte rien de plus que l'équation de Bianchi sur Σ. Bref, on a une identité qui pourrait donc nous servir plus tard :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_{A_s} = \mathrm{d}_{A_s} (A_s^{(s)})_\sharp$$

32.8 Action de $\mathcal{G}_Y$ sur (A_s, φ_s) :

On a vu qu'à une connexion $A \in \mathcal{A}_Y$ correspond une paire (A_s, φ_s) où A_s est une famille de connexions sur P_Σ et où φ_s est une famille de sections en $\Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_\Sigma)$. Ainsi, aux actions à gauche $\Lambda \cdot A$ et à droite $A \cdot \Lambda$ de $\Lambda \in \mathcal{G}_Y$ sur $A \in \mathcal{A}_Y$ correspond des actions à gauche $\Lambda \cdot (A_s, \varphi_s)$ et à droite $(A_s, \varphi_s) \cdot \Lambda$ de $\Lambda \in \mathcal{G}_Y$ sur la paire (A_s, φ_s).

Proposition : Soit $A = \tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp$ selon la décomposition usuelle. Soit $\Lambda \in \mathcal{G}_Y$. Il lui correspond $\lambda^\sharp \in C^\infty_\iota(P_Y; \mathrm{SU}(2))$. Alors $\Lambda \cdot A = (\Lambda^{-1})^* A$ et $A \cdot \Lambda = \Lambda^* A$ se décomposent comme :

$$\Lambda \cdot A = \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \tilde{A} - (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_s}} \lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1} + (\mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \varphi^\sharp - (\lambda^\sharp)^{(s)} (\lambda^\sharp)^{-1}) \mathrm{d}s^\sharp$$

$$A \cdot \Lambda = \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} \tilde{A} + (\lambda^\sharp)^{-1} (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_s}} \lambda^\sharp) + (\mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} \varphi^\sharp + (\lambda^\sharp)^{-1} (\lambda^\sharp)^{(s)}) \mathrm{d}s^\sharp$$

Preuve : Il suffit de faire la preuve pour l'action par la gauche. Souvenons-nous que $\Lambda \cdot A = \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} A - (\mathrm{d}\lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1}$ où ici d est $\mathrm{d}|_{P_Y}$. Développons :

$$\begin{aligned} A^\Lambda &= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} A - (\mathrm{d}|_{P_Y} \lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1} \\ &= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} (\tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp) - (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_s}} \lambda^\sharp + \mathrm{d}s^\sharp \wedge (\lambda^\sharp)^{(s)})(\lambda^\sharp)^{-1} \\ &= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \tilde{A} + (\mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \varphi^\sharp) \mathrm{d}s^\sharp - (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_s}} \lambda^\sharp + \mathrm{d}s^\sharp \wedge (\lambda^\sharp)^{(s)})(\lambda^\sharp)^{-1} \\ &= \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \tilde{A} - (\mathrm{d}|_{P_{\Sigma_s}} \lambda^\sharp)(\lambda^\sharp)^{-1} + \left(\mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp} \varphi^\sharp - (\lambda^\sharp)^{(s)} (\lambda^\sharp)^{-1} \right) \mathrm{d}s^\sharp \end{aligned}$$

De la même manière, on trouve la formule pour l'action à droite $A \cdot \Lambda$. □

Corollaire : Soit $A \in \mathcal{A}_Y$ et $\Lambda \in \mathcal{G}_Y$. À Λ correspond $\lambda^\sharp$. Posons $\lambda^\sharp_s := (\iota^\sharp_s)^* \lambda^\sharp$. Posons $\lambda_s := (\lambda^\sharp_s)_\sharp$. À la famille $\lambda^\sharp_s$ correspond une famille à 1-paramètre de transformations de jauge Λ_s de P_Σ. Les actions à gauche et à droite de $\Lambda \in \mathcal{G}_Y$ sur la paire (A_s, φ_s) est alors donnée par :

$$\Lambda \cdot (A_s, \varphi_s) = (\Lambda_s \cdot A_s, \mathrm{Ad}_{\lambda_s} \varphi_s - \lambda_s^{(s)} \lambda_s^{-1})$$

$$(A_s, \varphi_s) \cdot \Lambda = (A_s \cdot \Lambda_s, \mathrm{Ad}_{\lambda_s^{-1}} \varphi_s + \lambda_s^{-1} \lambda_s^{(s)})$$

Remarque : En posant $\upsilon_s := \lambda_s^{(s)} \lambda_s^{-1}$, on peut aussi écrire :

$$\Lambda \cdot (A_s, \varphi_s) = (\Lambda_s \cdot A_s, \mathrm{Ad}_{\lambda_s} \varphi_s - \upsilon_s)$$

$$(A_s, \varphi_s) \cdot \Lambda = (A_s \cdot \Lambda_s, \mathrm{Ad}_{\lambda_s^{-1}} \varphi_s + \mathrm{Ad}_{\lambda_s^{-1}} \upsilon_s)$$

Remarques : Ces égalités me permettra de relier les points de $\mathcal{M}_Y = \mathcal{A}_Y / \mathcal{G}_Y$ aux chemins en $\mathcal{M}_\Sigma = \mathcal{A}_\Sigma / \mathcal{G}_\Sigma$ et dans le fibré associé $\mathrm{Ad}\mathcal{A}_\Sigma := (\mathcal{A}_\Sigma) \times_{\mathrm{Ad}} \Omega^0_\Sigma$ sur $\mathcal{M}_\Sigma$. C'est-à-dire, relier $\mathcal{M}_Y$ aux espaces de chemins $C([0,1], \mathcal{M}_\Sigma)$ et $C([0,1], \mathrm{Ad}\mathcal{A}_\Sigma)$. Regardons quelques cas particuliers :

1. Si $\Lambda_s = \Lambda_0$ est constant mais (A_s, φ_s) pas forcément constant, alors :

$$\Lambda \cdot (A_s, \varphi_s) = (\Lambda_0 \cdot A_s, \mathrm{Ad}_{\lambda_0} \varphi_s)$$

$$(A_s, \varphi_s) \cdot \Lambda = (A_s \cdot \Lambda_0, \mathrm{Ad}_{\lambda_0^{-1}} \varphi_s)$$

   Modulo Λ, $\Lambda \cdot (A_s, \varphi_s)$ correspond ici à un chemin en le fibré $\mathrm{Ad}\mathcal{A}_\Sigma$ (il me semble). Ce chemin en $\mathrm{Ad}\mathcal{A}_\Sigma$ peut se déplacer "horizontalement" (i.e. en $\mathcal{M}_\Sigma$) et "verticalement" (i.e. le long de la fibre de $\mathrm{Ad}\mathcal{A}_\Sigma$).
2. Si Λ_s pas forcément constant mais $(A_s, \varphi_s) = (A_0, \varphi_0)$, alors :

$$\Lambda \cdot (A_0, \varphi_0) = (\Lambda_s \cdot A_0, \mathrm{Ad}_{\lambda_s} \varphi_0 - \lambda_s^{(s)} \lambda_s^{-1})$$

$$(A_0, \varphi_0) \cdot \Lambda = (A_0 \cdot \Lambda_s, \mathrm{Ad}_{\lambda_s^{-1}} \varphi_0 + \lambda_s^{-1} \lambda_s^{(s)})$$

   Modulo Λ, $\Lambda \cdot (A_0, \varphi_0)$ correspond ici à un point de $\mathcal{M}_\Sigma$ (il me semble).
3. Si $\Lambda_s = \Lambda_0$ constant et $(A_s, \varphi_s) = (A_0, \varphi_0)$, alors :

$$\Lambda \cdot (A_0, \varphi_0) = (\Lambda_0 \cdot A_0, \mathrm{Ad}_{\lambda_0} \varphi_0)$$

$$(A_0, \varphi_0) \cdot \Lambda = (A_0 \cdot \Lambda_0, \mathrm{Ad}_{\lambda_0^{-1}} \varphi_0)$$

   Modulo Λ, $\Lambda \cdot (A_0, \varphi_0)$ correspond ici à un point de $\mathrm{Ad}\mathcal{A}_\Sigma$ (il me semble).

Ainsi, il me semble que l'espace des chemins (A_s, φ_s) modulo $\Lambda \in \mathcal{A}_Y$ correspond à l'espace des chemins en $\mathcal{M}_\Sigma$ (et non en $\mathrm{Ad}\mathcal{A}_\Sigma$, car il me semble que le terme modulo υ_s vient écraser les fibres de $\mathrm{Ad}\mathcal{A}_\Sigma$ à des points, i.e. écraser $\mathrm{Ad}\mathcal{A}_\Sigma$ à $\mathcal{M}_\Sigma$). Bref, intuitivement, il me semble que :

$$\mathcal{M}_Y = \mathcal{A}_Y / \mathcal{G}_Y = C([0,1], \mathcal{A}_\Sigma \times \Omega^0_\Sigma) / \mathcal{G}_Y = C([0,1], \mathcal{M}_\Sigma)$$

À VÉRIFIER ! ! ! Je ne suis vraiment pas certain, il faudrait vérifier dans les articles de Manolescu, Woodward, etc. où il est question de l'équation de vortex symplectique.

32.9 1-forme de CS :

Rappel : La 1-forme de Chern-Simons $\mathcal{F}_{\text{CS}} \in \Omega^1(\mathcal{A}_Y)$ est définie par :

$$\mathcal{F}_{\text{CS}}|_A(\tau^\sharp) := -\int_Y F_A \wedge^\kappa \tau$$

Proposition : La décomposition simple $Y^3 = \Sigma^2 \times [0,1]$, $A = \tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp$, $\tau = \tilde{\tau} + \sigma \mathrm{d}s$, de la 1-forme de Chern-Simons $\mathcal{F}_{\text{CS}}$ est donnée par :

$$\mathcal{F}_{\text{CS}}|_A(\tau^\sharp) = -\int_{[0,1]} \left(\int_\Sigma (A_s^{(s)})_\sharp \wedge^\kappa \tau_s - \mathrm{d}_{A_s}\varphi_s \wedge^\kappa \tau_s + F_{A_s} \wedge^\kappa \sigma_s \right) \mathrm{d}s$$

Preuve : Soit $A \in \mathcal{A}_Y$ qu'on décompose en :

$$A = \tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp$$

Soit $\tau \in \Omega^1(Y; \mathrm{Ad}P_Y)$ qu'on décompose en :

$$\tau = \tilde{\tau} + \sigma \mathrm{d}s$$

où $\sigma \in \Omega^0(Y; \mathrm{Ad}P_Y)$ et où $\tilde{\tau}$ ne contient pas de ds. Posons $\tau_s := \iota_s^* \tilde{\tau}$ le chemin correspondant en $\Omega^1(\Sigma; \mathrm{Ad}P_\Sigma)$. On sait que F_A se décompose comme :

$$F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_s}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s$$

On calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}|_A(\tau^\sharp) &= -\int_Y F_A \wedge^\kappa \tau \\
&= -\int_Y \left(F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_s}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s\right) \wedge^\kappa (\tilde{\tau} + \sigma \mathrm{d}s) \\
&= -\int_Y F_{\tilde{A}} \wedge^\kappa \sigma \mathrm{d}s + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_s}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s \wedge^\kappa \tilde{\tau} \\
&= -\int_{\Sigma\times[0,1]} \left(F_{\tilde{A}} \wedge^\kappa \sigma - (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_s}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge^\kappa \tilde{\tau}\right) \wedge \mathrm{d}s \\
&= -\int_{[0,1]} \left(\int_{\Sigma_s} F_{\tilde{A}} \wedge^\kappa \sigma - (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_s}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge^\kappa \tilde{\tau}\right) \mathrm{d}s \\
&= -\int_{[0,1]} \left(\int_{\Sigma} F_{A_s} \wedge^\kappa \sigma_s - (\mathrm{d}_{A_s}\varphi_s - (A_s^{(s)})_\sharp) \wedge^\kappa \tau_s\right) \mathrm{d}s \\
&= -\int_{[0,1]} \left(\int_{\Sigma} F_{A_s} \wedge^\kappa \sigma_s - \mathrm{d}_{A_s}\varphi_s \wedge^\kappa \tau_s + (A_s^{(s)})_\sharp \wedge^\kappa \tau_s\right) \mathrm{d}s \\
&= -\int_{[0,1]} \left(\int_{\Sigma} (A_s^{(s)})_\sharp \wedge^\kappa \tau_s - \mathrm{d}_{A_s}\varphi_s \wedge^\kappa \tau_s + F_{A_s} \wedge^\kappa \sigma_s\right) \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

où j'ai utilisé le fait que $F_{\tilde{A}} \wedge \tilde{\tau} = 0$ car est une 3-forme sur chaque tranche Σ_s. □

Remarque : Plus bas on verra que l'application moment $\mu^\sharp : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathfrak{G}_\Sigma^*$ correspondant à l'action par la droite de $\mathcal{G}_\Sigma$ sur $\mathcal{A}_\Sigma$ est donnée en chaque $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ et chaque $\varphi \in \mathfrak{G} = \Omega^0(\Sigma; \mathrm{Ad}P_\Sigma)$ par :

$$\mu^\sharp|_A(\varphi) = \int_\Sigma F_A \wedge^\kappa \varphi$$

Aussi, on a une forme symplectique $\omega^\sharp$ sur $\mathcal{A}_\Sigma$ donnée par :

$$\omega^\sharp(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp) = \int_\Sigma \tau_1 \wedge^\kappa \tau_2$$

On remarque alors que la décomposition simple de $\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}$ est donnée pour $A \in \mathcal{A}_Y$

sur $\tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}_Y$ par :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{\mathrm{CS}}|_A(\tau^\sharp)\\
= \;& -\int_{[0,1]}\left(\int_\Sigma (A_s^{(s)})_\sharp \wedge^\kappa \tau_s - \mathrm{d}_{A_s}\varphi_s \wedge^\kappa \tau_s + F_{A_s} \wedge^\kappa \sigma_s\right)\mathrm{d}s\\
= \;& -\int_{[0,1]}\left(\omega\left((A_s^{(s)})_\sharp, \tau_s\right) + \int_\Sigma(\varphi_s \wedge^\kappa \mathrm{d}_{A_s}\tau_s) + \langle\mu|_{A_s}, \sigma_s\rangle\right)\mathrm{d}s\\
= \;& -\int_{[0,1]}\left(\omega\left((A_s^{(s)})_\sharp, \tau_s\right) + \int_\Sigma((\mathrm{d}_{A_s}\tau_s) \wedge^\kappa \varphi_s) + \langle\mu|_{A_s}, \sigma_s\rangle\right)\mathrm{d}s\\
= \;& -\int_{[0,1]}\left(\omega\left((A_s^{(s)})_\sharp, \tau_s\right) + \langle(\mathrm{d}\mu)|_{A_s}(\tau_s), \varphi_s\rangle + \langle\mu|_{A_s}, \sigma_s\rangle\right)\mathrm{d}s\\
= \;& \mathcal{F}_{\mathrm{KS}}|_{(A_s,\varphi_s)}(\tau_s, \sigma_s)
\end{aligned}$$

où j'ai utilisé $\int_\Sigma \mathrm{d}_{A_s}\varphi_s \wedge^\kappa \tau_s = -\int_\Sigma \varphi_s \wedge^\kappa \mathrm{d}_{A_s}\tau_s$ par Stokes et $\partial_\Sigma = \emptyset$. Autrement dit, la 1-forme de Chern-Simons sur $\mathcal{A}_Y$ est égale à la 1-forme de Kostant-Souriau sur l'espace des chemins en $(\Sigma, \mathfrak{G}_\Sigma)$. Pour plus de détails sur la fonctionnelle de Kostant-Souriau, qui est simplement celle d'Hamilton-Jacobi avec $H_s := \langle\mu, \varphi_s\rangle$, voir mon pdf sur la fonctionnelle d'Hamilton-Jacobi d'automne 2017.

33 Espace de connexions sur une surface :

33.1 Introduction :

Le but de cette section est d'établir les principaux résultats concernant l'espace des connexions $\mathrm{SU}(2)$ sur une surface fermée Σ. Mais avant, rappelons un petit résultats en géométrie symplectique.

Remarque : À partir d'ici, je serai très *sloppy* sur les dièses « $\sharp$ » des formes basiques. Par exemple, j'écrirai $\tau \in \Omega^1_\Sigma := \Omega^1(\Sigma; \mathrm{Ad}P_\Sigma) \cong T_A\mathcal{A}_\Sigma$ sans dièse.

33.2 Rappel symplectique :

Définition : Une structure presque-complexe J sur une variété symplectique (M, ω) est dite ω-compatible si $g := g_J := \omega(\,\cdot\,, J\,\cdot\,)$ est riemannien et J-invariant.

Proposition : Soit $H \in C^\infty(M)$ un hamiltonien sur une variété symplectique (M, ω) munie d'une structure presque-complexe J qui est ω-compatible. Alors le champ vectoriel hamiltonien X_H et le gradient ∇H sont reliés par :

$$J\nabla H = X_H$$

Preuve : Le champ vectoriel hamiltonien $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ de H est défini implicitement par $\iota_{X_H}\omega = -\mathrm{d}H$. Le gradient $\nabla H \in \mathfrak{X}(M)$ de H relativement à $g := g_J$ est défini explicitement par musicalité dièse-riemannienne $\nabla H := (\mathrm{d}H)^g$, i.e. implicitement par $\iota_{\nabla H}g = \mathrm{d}H$. L'égalité recherchée découle de la non dégénérescence de ω et de :

$$\omega(\,\cdot\,, X_H) = \mathrm{d}H = g(\nabla H, \,\cdot\,) = g(\,\cdot\,, \nabla H) = \omega(\,\cdot\,, J\nabla H)$$

$\square$

33.3 Le lieu :

Soient :

- (Σ, g) une surface riemannienne, fermée, orientable, lisse, agréable ;
- $\pi_\Sigma : P_\Sigma \to \Sigma$ un SU(2)-fibré principal (forcément) trivial sur Σ ;
- $\mathcal{A}_\Sigma$ l'espace des connexions sur P_Σ.

Proposition : Sur $\mathcal{A}_\Sigma$ repose une forme symplectique naturelle $\omega \in \Omega^2(\mathcal{A}_\Sigma)$ donnée en tout $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ par :

$$\begin{aligned} \omega|_A : T\mathcal{A}_\Sigma \times T\mathcal{A}_\Sigma &\to \mathbb{R} \\ (\tau_1, \tau_2) &\mapsto \omega|_A(\tau_1, \tau_2) := \int_\Sigma \tau_1 \wedge^\kappa \tau_2 \end{aligned}$$

Preuve : La linéarité de ω est évidente. Son anti-symétricité aussi. La non dégénérescence découle de celle de $(\cdot, \cdot)_{g,\kappa}$ sur $\Omega^1(\Sigma; \mathrm{Ad}P_\Sigma)$ et du fait que $(\cdot, \cdot)_{g,\kappa} = \omega(\cdot, J\cdot)$ pour $J = \star_g$. Il reste à montrer que ω est fermée. Ceci découle du fait que ω est constante sur $\mathcal{A}_\Sigma$ car est indépendante du point $A \in \mathcal{A}_\Sigma$. En effet, fixons $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ et $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$. Étendons τ_1, τ_2, τ_3 à des champs vectoriels constants sur $\mathcal{A}_\Sigma$. Alors :

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}\omega)(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \tau_1\omega(\tau_2, \tau_3) + \tau_2\omega(\tau_3, \tau_1) + \tau_3\omega(\tau_1, \tau_2) \\ &\quad +\omega(\tau_1, [\tau_2, \tau_3]) + \omega(\tau_2, [\tau_3, \tau_1]) + \omega(\tau_3, [\tau_1, \tau_2]) \\ &= 0 - 0 + 0 - 0 + 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

où les trois premiers zéros découlent du fait que les $\omega(\tau_i, \tau_j)$ sont constants sur $\mathcal{A}_\Sigma$ et où les trois derniers zéros découlent du fait que $[\tau_i, \tau_j] = \mathcal{L}_{\tau_i}\tau_j = 0$ car les τ_i et τ_j sont constants. D'où ω fermée. D'où ω symplectique. □

Remarque : $\mathcal{A}_\Sigma$ est donc muni d'une forme symplectique ω. Qui plus est, $\mathcal{A}_\Sigma$ est muni d'une structure presque-complexe J donnée en tout $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ par :

$$\begin{aligned} J|_A : T_A\mathcal{A}_\Sigma &\to T_A\mathcal{A}_\Sigma \\ \tau &\mapsto \star_g\tau \end{aligned}$$

Remarque : Pour être plus précis avec les dièses, il faudrait plutôt écrire $J = \star_g^\sharp := (\star_g(\cdot)_\sharp)^\sharp$.

Remarque : $\mathcal{A}_\Sigma$ est aussi muni d'une métrique $\hat{g}$ définie par $\hat{g}(\,\cdot\,,\,\cdot\,) := ((\,\cdot\,)_\sharp, (\,\cdot\,)_\sharp)_{g,\kappa}$.

Proposition : $\hat{g} = \omega(\,\cdot\,, J\,\cdot\,)$.

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\omega(\,\cdot\,, J\,\cdot\,) &= \int_\Sigma (\,\cdot\,)_\sharp \wedge^\kappa (\star_g^\sharp(\,\cdot\,))_\sharp \\
&= \int_\Sigma (\,\cdot\,)_\sharp \wedge^\kappa (\star_g(\,\cdot\,)_\sharp) \\
&= ((\,\cdot\,)_\sharp, (\,\cdot\,)_\sharp)_{g,\kappa} \\
&= \hat{g}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)
\end{aligned}$$

□

Remarque : J est compatible avec ω car d'une part $\hat{g}$ est définie positive (car κ est défini positif car $\kappa^\sharp = -K$ où $K : \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \to \mathbb{R}$ est la forme de Killing qui est définie négative sur $\mathfrak{su}(2)$) et d'autre part $\hat{g}(J\,\cdot\,, J\,\cdot\,) = \hat{g}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ implique $\omega(J\,\cdot\,, J\,\cdot\,) = \omega(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$.

Proposition : La structure presque-complexe $J : T\mathcal{A}_\Sigma \to T\mathcal{A}_\Sigma$ est intégrable.

Preuve : Soient $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{A}_\Sigma)$ constants donnés en tout $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ par $X_1|_A = \tau_1^\sharp$ et $X_2|_A = \tau_2^\sharp$ pour certains $\tau_1, \tau_2 \in \Omega^1(\Sigma; \mathrm{Ad}P_\Sigma)$ quelconques. Remarquons que $JX_1 = \star_g^\sharp \tau_1^\sharp$ et $JX_2 = \star_g^\sharp \tau_2^\sharp$ sont constants (i.e. indépendants de $A \in \mathcal{A}_\Sigma$). Il suit que chaque terme du tenseur de Nijenhuis

$$N_J(X_1, X_2) = [X_1, X_2] + J[JX_1, X_2] + J[X_1, JX_2] - [JX_1, JX_2]$$

meurt (puisque les crochets de Lie peuvent être vus comme dérivées de Lie et qu'ici les champs vectoriels considérés sont constants). Puisque N_J meurt, J est intégrable. □

Remarque : Il est évident que J est intégrable car J est constante sur $\mathcal{A}_\Sigma$ car indépendante de $A \in \mathcal{A}_\Sigma$.

Proposition : La métrique $\hat{g}$ est plate.

Preuve : $\hat{g}$ est constante car indépendante de $A \in \mathcal{A}_\Sigma$. Ses dérivées directionnelles meurent dont toutes. Donc $\hat{g}$ est plate. □

33.4 Application moment $\mu : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathfrak{G}_\Sigma^*$:

On sait que $\mathfrak{G}_\Sigma := \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_\Sigma) \cong \Omega^0_\Sigma$ où $\Omega^k_\Sigma := \Omega^k(\Sigma; \mathrm{Ad}P_\Sigma)$. Il suit que $\mathfrak{G}_\Sigma^* := \mathrm{Lie}(\mathcal{G}_\Sigma)^*$ peut être vu comme Ω^2_Σ. Plus précisément, $\Omega^2_\Sigma < \mathfrak{G}_\Sigma^*$ mais on fera comme si $\mathfrak{G}_\Sigma^* \cong \Omega^2_\Sigma$. L'appariement de dualité entre $\mathfrak{G}_\Sigma^*$ et $\mathfrak{G}$ correspond alors à l'appariement entre Ω^2_Σ et Ω^0_Σ :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{G}_\Sigma^* \times \mathfrak{G}_\Sigma &\to \mathbb{R} \\ (\eta, \Upsilon) &\mapsto \int_\Sigma \eta \wedge^\kappa \upsilon \end{aligned}$$

Maintenant, aux actions à gauche et à droite de $\mathcal{G}_\Sigma$ sur $\mathcal{A}_\Sigma$ correspond une application moment $\mu : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathfrak{G}_\Sigma^*$, i.e. $\mathcal{G}_\Sigma$ agit de manière hamiltonienne sur $\mathcal{A}_\Sigma$. Celle correspondant à l'action par la gauche $\Lambda \cdot A = (\Lambda^{-1})^* A$ est :

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A}_\Sigma &\to \mathfrak{G}_\Sigma^* \\ A &\mapsto \mu_A := -F_A \end{aligned}$$

et celle correspondant à l'action par la droite $A \cdot \Lambda = \Lambda^* A$ est :

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A}_\Sigma &\to \mathfrak{G}_\Sigma^* \\ A &\mapsto \mu_A := F_A \end{aligned}$$

Je me concentrerai sur l'application moment $\mu_A = F_A$ correspondant à l'action par la droite de $\mathcal{G}_\Sigma$ sur $\mathcal{A}_\Sigma$.

Proposition : L'application $\mu : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathfrak{G}_\Sigma^*; \mu_A = F_A$ est bel et bien une application moment.

Preuve : On sait que μ est à valeurs en $\mathfrak{G}_\Sigma^*$. Il suffit donc de montrer qu'elle est Ad^*-équivariante, i.e. que :

$$\mu|_{A \cdot \Lambda} = \mathrm{Ad}^*_{\Lambda^{-1}} \mu|_A, \qquad \forall A \in \mathcal{A}_\Sigma,\ \Lambda \in \mathcal{G}_\Sigma$$

On calcule directement :

$$\begin{aligned} \mu|_{A\cdot\Lambda} &= F_{A\cdot\Lambda} \\ &= \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}} F_A \\ &= \mathrm{Ad}^*_{\Lambda^{-1}} F_A \\ &= \mathrm{Ad}^*_{\Lambda^{-1}} \mu|_A \end{aligned}$$

□

Proposition : La 1-forme $\mathrm{d}\mu \in \Omega^1(\mathcal{A}_\Sigma; \mathfrak{G}^*_\Sigma)$ est donnée en chaque $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ par :

$$(\mathrm{d}\mu)|_A = \mathrm{d}_A : \Omega^1_\Sigma \to \Omega^2_\Sigma$$

Preuve : Soit $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ et $\tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$. Alors :

$$(\mathrm{d}\mu)_A(\tau) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \mu|_{A+\epsilon\tau^\sharp} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} F_{A+\epsilon\tau^\sharp} = \mathrm{d}_A\tau$$

□

Proposition : $\mu : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathfrak{G}^*_\Sigma; \mu_A = F_A$ est bel et bien l'application moment correspondante à l'action à droite de $\mathcal{G}_\Sigma$ sur $\mathcal{A}_\Sigma$.

Preuve : Soit $\Upsilon \in \mathfrak{G}_\Sigma$ quelconque. Il suffit de montrer que le champ vectoriel hamiltonien de l'hamiltonien

$$\begin{aligned} \langle \mu, \Upsilon \rangle : \mathcal{A}_\Sigma &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \int_\Sigma F_A \wedge^\kappa \upsilon \end{aligned}$$

correspond à l'action infinitésimale Υ^*, donnée par $\Upsilon^*|_A = \mathrm{d}^A\upsilon^\sharp$, de Υ sur $\mathcal{A}$ (pour l'action par la droite de $\mathcal{G}_\Sigma$ sur $\mathcal{A}_\Sigma$). C'est-à-dire, par non dégénérescence de la forme symplectique ω, il suffit de montrer que :

$$\omega(\Upsilon^*, \cdot) = -\mathrm{d}\langle \mu, \Upsilon \rangle$$

Soient $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ et $\tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$ quelconques. Il suffit alors de démontrer que :

$$\omega(\mathrm{d}^A\upsilon^\sharp, \tau^\sharp) = -(\mathrm{d}\langle \mu, \Upsilon \rangle)|_A(\tau^\sharp)$$

i.e. montrer que :

$$\int_\Sigma (\mathrm{d}_A \upsilon) \wedge^\kappa \tau = -\langle (\mathrm{d}\mu)|_A(\tau^\sharp), \Upsilon\rangle$$

i.e. montrer que :

$$\int_\Sigma (\mathrm{d}_A \upsilon) \wedge^\kappa \tau = -\langle \mathrm{d}^A \tau^\sharp, \Upsilon\rangle$$

i.e. montrer que :

$$\int_\Sigma (\mathrm{d}_A \upsilon) \wedge^\kappa \tau = -\int_\Sigma (\mathrm{d}_A \tau) \wedge^\kappa \upsilon$$

i.e. montrer que :

$$0 = \int_\Sigma (\mathrm{d}_A \upsilon) \wedge^\kappa \tau + \upsilon \wedge^\kappa (\mathrm{d}_A \tau)$$

i.e. montrer que :

$$0 = \int_\Sigma \mathrm{d}(\upsilon \wedge^\kappa \tau)$$

Ce qui est vrai par le théorème de Stokes et par le fait que $\partial\Sigma = \emptyset$. □

Remarque : À partir d'ici je suppose toujours que $\mathcal{G}_\Sigma$ agit par la droite sur $\mathcal{A}_\Sigma$, i.e. que $\Upsilon^*|_A = \mathrm{d}^A \upsilon^\sharp$ et $\mu_A = F_A$. L'avantage d'utiliser une action par la droite au lieu d'à gauche est qu'il y a beaucoup de signes négatifs inutiles qui disparaissent.

33.5 Flot de Yang-Mills en dimension 2 :

Considérons la fonctionnelle de Yang-Mills en dimension 2 :

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{YM}} : \mathcal{A}_\Sigma &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \frac{1}{2}(F_A, F_A)_{g,\kappa} \end{aligned}$$

Remarque : $S_{\mathrm{YM}}(A) = \frac{1}{2}(F_A, F_A)_{g,\kappa} = \frac{1}{2}(\mu_A, \mu_A)_{g,\kappa} = \frac{1}{2}\|\mu_A\|^2_{g,\kappa}$, i.e. la fonctionnelle de Yang-Mills en dimension 2 est l'hamiltonien correspondant à la « norme au carré » de l'application moment μ correspondante à la $\mathcal{G}_\Sigma$-action hamiltonienne sur $\mathcal{A}_\Sigma$. Il suit que le champ vectoriel hamiltonien de S_{YM} sur $\mathcal{A}_\Sigma$ est tangent aux $\mathcal{G}_\Sigma$-orbites en $\mathcal{A}_\Sigma$, ce que nous verrons explicitement sous peu.

Proposition : Le gradient de S_{YM} est donné par

$$(\nabla S_{\mathrm{YM}})|_A = (\delta_A F_A)^\sharp$$

Preuve : Même type de calcul que pour S_{YM} en dimension 4 (i.e. sur $\mathcal{A}_{X^4}$) dans le cas dans bord (Σ est fermée). $\square$

Proposition : Le champ vectoriel hamiltonien $X_H \in \mathfrak{X}(\mathcal{A}_\Sigma)$ correspondant à l'hamiltonien $H := S_{\mathrm{YM}}$ est donné en $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ par :

$$X_H|_A = (\mathrm{d}_A \star_g F_A)^\sharp$$

Preuve : Souvenons-nous que $\mathcal{A}_\Sigma$ est symplectique. Considérons l'hamiltonien $H := S_{\mathrm{YM}}$ sur $\mathcal{A}_\Sigma$. Puisque $\hat{g}(\,\cdot\,,\,\cdot\,) = \omega(\,\cdot\,, J\,\cdot\,)$, il suit que le champ vectoriel hamiltonien de H est donné par $X_H = J\nabla H$ où $J = \star_g^\sharp$. Par la dernière proposition il découle $X_H|_A = \star_g^\sharp(\delta_A F_A)^\sharp$. Souvenons-nous que $\delta_A = (-1)^k \star_g^{-1} \mathrm{d}_A \star_g$. Ici, $k = 2$ puisque F_A est une 2-forme. Donc

$$\star^\sharp(\delta_A F_A)^\sharp = (\star_g (-1)^2 \star_g^{-1} \mathrm{d}_A \star_g F_A)^\sharp = (\mathrm{d}_A \star_g F_A)^\sharp$$

D'où

$$X_H|_A = (\mathrm{d}_A \star_g F_A)^\sharp$$

$\square$

Corollaire : X_H est tangent aux $\mathcal{G}_\Sigma$-orbites en $\mathcal{A}_\Sigma$.

Preuve : Fixons $A \in \mathcal{A}_\Sigma$. Posons $\upsilon := \star_g F_A \in \Omega^0(\Sigma; \mathrm{Ad}P_\Sigma)$. Par la dernière proposition,

$$X_H|_A = (\mathrm{d}_A \star_g F_A)^\sharp = (\mathrm{d}_A \upsilon)^\sharp = \mathrm{d}^A \upsilon^\sharp = \Upsilon^*|_A$$

où $\Upsilon^* \in \mathfrak{X}(\mathcal{A}_\Sigma)$ est l'action infinitésimale de $\Upsilon \in \mathfrak{G}_\Sigma$. Ce qui est tangent à une $\mathcal{G}_\Sigma$-orbite passant en $A \in \mathcal{A}_\Sigma$. $\square$

Proposition : ∇H n'est pas tangent aux $\mathcal{G}_\Sigma$-orbites en $\mathcal{A}_\Sigma$.

Preuve : Supposons par l'absurde ∇H tangent au $\mathcal{G}_\Sigma$-orbites en $\mathcal{A}_\Sigma$. Puisque $H = S_{\mathrm{YM}}$ est $\mathcal{G}_\Sigma$-invariant, il suit que H est constant dans la direction ∇H. Ce qui contredit le fait que H varie toujours dans la direction ∇H (pourvu qu'aux $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ considérés $(\nabla H)|_A \neq 0$). $\square$

Remarque : Plus bas on verra une proposition plus forte où :

- $X_{S_{\mathrm{YM}}}$ est vertical (i.e. tangent aux $\mathcal{G}_\Sigma$-orbites) (déjà montré),
- ∇S_{YM} est horizontal (pour la connexion de Coulomb) (sera démontré).

Remarque : Le flot de ∇S_{YM} est nommé *flot de Yang-Mills*.

Notation : Soit $\Psi : \mathcal{G}_\Sigma \to \mathrm{Diff}(\mathcal{A}_\Sigma)$ la $\mathcal{G}_\Sigma$-action de groupe par la droite sur $\mathcal{A}_\Sigma$ donnée par $\Psi_\Lambda(A) = A \cdot \Lambda = \Lambda^* A$ pour $\Lambda \in \mathcal{G}_\Sigma$ et $A \in \mathcal{A}_\Sigma$.

Proposition : Le push-forward $(\Psi_\Lambda)_* : T\mathcal{A}_\Sigma \to T_{\Psi_\Lambda}\mathcal{A}_\Sigma$ est explicitement donné par :

$$(\Psi_\Lambda)_*|_A \tau^\sharp = \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} \circ \tau^\sharp, \qquad \forall \tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$$

Preuve : Soit A_t une courbe en $\mathcal{A}_\Sigma$ telle que $A_0 = A$ et telle que $\dot{A}_0 = \tau^\sharp$. Souvenons-nous que $\Lambda^*\tau^\sharp = \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} \circ \tau^\sharp$ car $\tau^\sharp$ est basique. En utilisant le fait qu'un pull-back tire les formes différentielles comme $f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta$, on trouve :

$$\begin{aligned}
(\Psi_\Lambda)_*|_A \tau^\sharp &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\Psi_\Lambda(A_t)) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\Lambda^* A_t) \\
&= \Lambda^* \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} A_t \right) \\
&= \Lambda^* \tau^\sharp \\
&= \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} \circ \tau^\sharp
\end{aligned}$$

□

Proposition : Le groupe de jauge $\mathcal{G}_\Sigma$ agit par $\hat{g}$-isométries sur $\mathcal{A}_\Sigma$.

Preuve : Soient $\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$. Souvenons-nous que $(\mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp}(\cdot), \mathrm{Ad}_{\lambda^\sharp}(\cdot))_{g,\kappa} = (\cdot, \cdot)_{g,\kappa}$ car κ est Ad-invariant. Ainsi, pour $\Lambda \in \mathcal{G}_\Sigma$ quelconque on trouve :

$$\begin{aligned}
((\Psi_\Lambda)^*\hat{g})_A(\tau^\sharp, \tau^\sharp) &= \hat{g}_{\Psi_\Lambda(A)}((\Psi_\Lambda)_*\tau^\sharp, (\Psi_\Lambda)_*\tau^\sharp) \\
&= \hat{g}_{\Psi_\Lambda(A)}(\mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} \circ \tau^\sharp, \mathrm{Ad}_{(\lambda^\sharp)^{-1}} \circ \tau^\sharp) \\
&= (\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}} \circ \tau_1, \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}} \circ \tau_2)_{g,\kappa} \\
&= (\tau_1, \tau_2)_{g,\kappa} \\
&= \hat{g}_A(\tau_1^\sharp, \tau_2^\sharp)
\end{aligned}$$

□

Proposition : Le groupe de jauge $\mathcal{G}_\Sigma$ agit par $\hat{\omega}$-symplectomorphismes sur $\mathcal{A}_\Sigma$.

Preuve : Même type de preuve que celle de la dernière proposition. □

33.6 Espace de module de connexions plates $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$:

Définition : Soient :

- $\mathcal{A}_\Sigma^*$ l'espace des connexions irréductibles ;
- $\mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl},*} := \mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}} \cap \mathcal{A}_\Sigma^*$ l'espace des connexions plates irréductibles ;
- $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}} := \mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}}/\mathcal{G}_\Sigma$ l'espace de module de connexions plates ;
- $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl},*} := \mathcal{A}^{\mathrm{fl},*}/\mathcal{G}_\Sigma$ l'espace de module de connexions plates irréductibles.

Remarque : $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ est une variété symplectique (avec singularités) car c'est une réduction de Marsden-Weinstein $\mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}}/\mathcal{G}_\Sigma$ pour la $\mathcal{G}_\Sigma$-action hamiltonienne correspondante à l'application moment $\mu : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathfrak{G}_\Sigma^*; \mu|_A = F_A$.

Proposition : $T_A\mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}} = \ker(\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^2),\ \forall A \in \mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$.

Preuve : Soient $A \in \mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ et $\tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$. Puisque $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} F_{A+t\tau^\sharp} = \mathrm{d}_A\tau$. Il suit que la courbure est infinitésimalement préservée si et seulement si $\mathrm{d}_A\tau = 0$. □

Proposition : $T_A(A \cdot \mathcal{G}_\Sigma) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^0 \to \Omega_\Sigma^1),\ \forall A \in \mathcal{A}_\Sigma$.

Preuve : $\mathcal{G}_\Sigma$ agit infinitésimalement par la droite sur $\mathcal{A}_\Sigma$ par $\Upsilon^*|_A = \mathrm{d}^A\upsilon^\sharp$. □

Proposition : $T_{[A]}\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}} \cong \ker(\Delta_{A,g} : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^1),\ \forall A \in \mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$.

Preuve : En utilisant les résultats de la section sur le théorème de décomposition de Hodge covariant, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
T_{[A]}\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}} &= T_{[A]}\left(\mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}}/\mathcal{G}_\Sigma\right) \\
&\cong \frac{T_A\mathcal{A}_\Sigma^{\mathrm{fl}}}{T_A(A\cdot\mathcal{G}_\Sigma)} \\
&= \frac{\ker(\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^2)}{\mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^0 \to \Omega_\Sigma^1)} \\
&\cong \left(\ker(\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^2)\right) \cap \left(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^0 \to \Omega_\Sigma^1)\right)^\perp \\
&\cong \left(\ker(\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^2)\right) \cap \left(\ker(\delta_{A,g} : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^0)\right) \\
&= \ker(\Delta_{A,g} : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^1)
\end{aligned}$$

□

Remarque : ATTENTION : la section sur le théorème de décomposition de Hodge covariant a été mis à jour. Ma vieille preuve était fausse. Bref, la présente preuve ici est probablement aussi fausse. C'est à corriger. TO DO ! ! !

33.7 Notions d'injectivité et surjectivité de d_A, δ_A et $\Delta_{A,g}$:

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}_\Sigma^*$ une connexion irréductible. Alors :

1. $\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^0 \to \Omega_\Sigma^1$ est injective,
2. $\delta_{A,g} : \Omega_\Sigma^2 \to \Omega_\Sigma^1$ est injective,
3. $\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^2$ est surjective,
4. $\delta_{A,g} : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^0$ est surjective,
5. $\Delta_{A,g} : \Omega_\Sigma^0 \to \Omega_\Sigma^0$ est bijective,
6. $\Delta_{A,g} : \Omega_\Sigma^2 \to \Omega_\Sigma^2$ est bijective.

Preuve : Le point (1) découle de la section sur les connexions $SU(2)$ irréductibles. Le point (2) découle du point (1) et de l'isomorphisme $\star_g$ entre Ω_Σ^0 et Ω_Σ^2. Le point (3) découle du point (2) et du fait que :

$$\begin{aligned}
\Omega_\Sigma^2 &= \Big(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^2)\Big) \oplus \Big(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^2)\Big)^\perp \\
&= \Big(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^2)\Big) \oplus \Big(\ker(\delta_{A,g} : \Omega_\Sigma^2 \to \Omega_\Sigma^1)\Big) \\
&= \Big(\mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^2)\Big) \oplus \{0\} \\
&= \mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^2)
\end{aligned}$$

Le point (4) découle du point (3) et de l'isomorphisme $\star_g$. Montrons le point (5). On sait $\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^0 \to \Omega_\Sigma^1$ injective. Ceci induit un isomorphisme

$$\Omega_\Sigma^0 \cong \mathrm{d}_A(\Omega_\Sigma^0) \cong T_A(A \cdot \mathcal{G}_\Sigma)$$

Puisque :

$$\ker(\delta_{A,g} : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^0)^\perp \cong \mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^0 \to \Omega_\Sigma^1) = \mathrm{d}_A(\Omega_\Sigma^0)$$

il suit que

$$\ker(\delta_{A,g} : (\mathrm{d}_A(\Omega_\Sigma^0)) \to \Omega_\Sigma^0) = \{0\}$$

D'où :

$$\delta_{A,g}\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^0 \to \Omega_\Sigma^0$$

injective. Mais Ω_Σ^0 est isomorphe à lui-même. Donc $\Delta_{A,g} : \Omega_\Sigma^0 \to \Omega_\Sigma^0$ est bijective. Enfin, le point (6) découle du point (5) et de l'isomorphisme $\star_g$. □

33.8 Réduction de Marsden-Weinstein pour orbites coadjointes :

Proposition : L'application moment $\mu : \mathcal{A} \to \mathfrak{G}^*_\Sigma; A \mapsto F_A$ restreinte à l'espace des connexions irréductibles $\mathcal{A}^*_\Sigma$ est une submersion.

Preuve : Il suffit de montrer qu'en tout $A \in \mathcal{A}^*_\Sigma$, l'application $(\mathrm{d}\mu)|_A : T_A\mathcal{A}^* \to \mathfrak{G}^*_\Sigma$ est surjective. Puisque $(\mathrm{d}\mu)|_A = \mathrm{d}_A$, il suffit de montrer que $\mathrm{d}_A : \Omega^1_\Sigma \to \Omega^2_\Sigma$ est surjective pour A irréductible. Ceci découle de la proposition de la dernière section. $\square$

Proposition : Soit $\eta \in \Omega^2_\Sigma \cong \mathfrak{G}^*_\Sigma$. Alors son orbite coadjointe

$$\mathcal{O}_\eta := \{\mathrm{Ad}^*_\Lambda \eta | \Lambda \in \mathcal{G}_\Sigma\} \subset \mathfrak{G}^*_\Sigma$$

est égale à :

$$\mathcal{O}_\eta = \{\mathrm{Ad}_\lambda \eta | \lambda \in \Gamma^\infty(\iota P)\} \subset \mathfrak{G}^*_\Sigma$$

Preuve : Tel que vu dans la section sur le groupe de jauge, l'action coadjointe $\mathrm{Ad}^* : \mathcal{G}_\Sigma \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{G}^*_\Sigma)$ de $\Lambda \in \mathcal{G}_\Sigma$ sur $\eta \in \mathfrak{G}^*_\Sigma$ est explicitement donnée par :

$$\mathrm{Ad}^*_\Lambda \eta = \mathrm{Ad}_\lambda \eta$$

$\square$

Remarque : L'application moment $\mu : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathfrak{G}^*; A \mapsto F_A$ est Ad^*-équivariante tel qu'il se doit. En effet, pour $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ et $\Lambda \in \mathcal{G}_\Sigma$, on a :

$$\mu_{A\cdot\Lambda} = F_{A\cdot\Lambda} = \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}} F_A = \mathrm{Ad}^*_{\Lambda^{-1}}\mu$$

Notation : Soit $\mathcal{O} \subset \mathfrak{G}^*$ une orbite coadjointe. Posons :

$$\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma := \mu^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{A}_\Sigma$$

Proposition : Soit $\mathcal{O} \subset \mathfrak{G}^*$ une orbite coadjointe. Alors $\mathcal{A}^{\mathcal{O}} \subset \mathcal{A}_\Sigma$ est $\mathcal{G}_\Sigma$-invariant.

Preuve : Découle de la Ad^*-équivariance de l'application moment μ. $\square$

Notation : Soit $\mathcal{O} \subset \mathfrak{G}^*$ une orbite coadjointe. Posons :

$$\mathcal{M}^{\mathcal{O}}_\Sigma := \mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma / \mathcal{G}_\Sigma = \mu^{-1}(\mathcal{O})/\mathcal{G}_\Sigma$$

Proposition : Soit $\eta \in \mathfrak{G}^*_\Sigma$. Soit $\mathcal{O} \subset \mathfrak{G}^*_\Sigma$ l'orbite coadjointe de η. Alors

$$T_\eta \mathcal{O} = \{[\upsilon, \eta] | \upsilon \in \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_\Sigma)\} < T_\eta \mathfrak{G}^*_\Sigma = \mathfrak{G}^*_\Sigma$$

Preuve : On sait que $\mathcal{O} = \{\mathrm{Ad}_\lambda \eta | \ \lambda \in \Gamma^\infty(\iota P_\Sigma)\}$. L'égalité recherchée découle directement. □

Proposition : Soit $\mathcal{O} \subset \mathfrak{G}^*_\Sigma$ une orbite coadjointe. Supposons que $\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma \subset \mathcal{A}^*_\Sigma$, i.e. ne contient que des connexions irréductibles. Soit $A \in \mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma$ (irréductible). Alors :

$$T_A \mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma = \{\tau^\sharp \in T_A \mathcal{A}_\Sigma | \mathrm{d}_A \tau \in \mathrm{im}(\mathrm{d}^2_A : \Omega^0_\Sigma \to \Omega^2_\Sigma)\}$$

Preuve : Puisque A est irréductible, μ est une submersion. Il suit que :

$$\begin{aligned}
T_A \mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma &= T_A \mu^{-1}(\mathcal{O}) \\
&= \{\tau^\sharp \in T_A \mathcal{A}_\Sigma | (\mathrm{d}\mu)|_A(\tau^\sharp) \in T_{\mu_A} \mathcal{O}\} \\
&= \{\tau^\sharp \in T_A \mathcal{A}_\Sigma | \mathrm{d}_A \tau \in T_{\mu_A} \mathcal{O}\} \\
&= \{\tau^\sharp \in T_A \mathcal{A}_\Sigma | \exists \upsilon \in \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_\Sigma), \mathrm{d}_A \tau = [\upsilon, F_A]\} \\
&= \{\tau^\sharp \in T_A \mathcal{A}_\Sigma | \exists \upsilon \in \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_\Sigma), \mathrm{d}_A \tau = -[F_A, \upsilon]\} \\
&= \{\tau^\sharp \in T_A \mathcal{A}_\Sigma | \exists \upsilon \in \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_\Sigma), \mathrm{d}_A \tau = [F_A, \upsilon]\} \\
&= \{\tau^\sharp \in T_A \mathcal{A}_\Sigma | \exists \upsilon \in \Gamma^\infty(\mathrm{Ad}P_\Sigma), \mathrm{d}_A \tau = \mathrm{d}^2_A \upsilon\} \\
&= \{\tau^\sharp \in T_A \mathcal{A}_\Sigma | \mathrm{d}_A \tau \in \mathrm{im}(\mathrm{d}^2_A : \Omega^0_\Sigma \to \Omega^2_\Sigma)\}
\end{aligned}$$

□

Proposition : Pour $A \in \mathcal{A}^*_\Sigma$, l'espace $T_A \mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma$ se décompose sur la décomposition de Hodge généralisée

$$\Omega^1_\Sigma = \left(\ker \Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma}\right) \oplus \delta_A \left(\ker \delta^2_A|_{\Omega^2}\right) \oplus \mathrm{d}_A \left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right) \oplus \{\tau | \tau = \mathrm{d}_A \upsilon = \delta_A \eta\}$$

comme :

$$T_A \mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma \cap \left(\ker \Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma}\right) = \ker \Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma}$$

$$T_A \mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma \cap \delta_A \left(\ker \delta^2_A|_{\Omega^2}\right) = \{0\}$$

$$T_A \mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma \cap \mathrm{d}_A \left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right) = \mathrm{d}_A \left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)$$

$$T_A \mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma \cap \{\tau | \tau = \mathrm{d}_A \upsilon = \delta_A \eta\} = \{\tau | \tau = \mathrm{d}_A \upsilon = \delta_A \eta\}$$

C'est-à-dire, on a une décomposition en somme directe orthogonale :

$$T_A\mathcal{A}^{O}_{\Sigma} = \ker \Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma} \oplus \mathrm{d}_A \left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right) \oplus \{\tau|\tau = \mathrm{d}_A\upsilon = \delta_A\eta\}$$

Preuve : Souvenons-nous que :

$$T_A\mathcal{A}^{O}_{\Sigma} = \{\tau^\sharp \in T_A\mathcal{A}_\Sigma|\mathrm{d}_A\tau \in \mathrm{im}(\mathrm{d}^2_A : \Omega^0_\Sigma \to \Omega^2_\Sigma)\}$$

La première égalité découle du fait que $\left(\ker \Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma}\right) < T_A\mathcal{A}^{O}_{\Sigma}$. En effet, si $\tau \in \ker \Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma}$, alors $\mathrm{d}_A\tau = 0$. Ainsi, $\mathrm{d}_A\tau = 0 = \mathrm{d}^2_A\upsilon$ pour $\upsilon = 0$. Montrons la seconde égalité. Soit $\tau \in T_A\mathcal{A}^{O}_{\Sigma} \cap \delta_A \left(\ker \delta^2_A|_{\Omega^2}\right)$ quelconque. Alors il existe $\upsilon \in \Omega^0_\Sigma$ tel que $\mathrm{d}_A\tau = \mathrm{d}^2_A\upsilon$ et il existe $\eta \in \Omega^2_\Sigma$ tel que $\tau = \delta_A\eta$ et tel que $\delta_A\tau = 0$. On trouve alors directement :

$$\begin{aligned}
\|\tau\|^2_{g,\kappa} &= (\tau, \tau)_{g,\kappa} \\
&= (\tau, \delta_{A,g}\eta)_{g,\kappa} \\
&= (\mathrm{d}_A\tau, \eta)_{g,\kappa} \\
&= (\mathrm{d}^2_A\upsilon, \eta)_{g,\kappa} \\
&= (\upsilon, \delta^2_{A,g}\eta)_{g,\kappa} \\
&= (\upsilon, \delta_{A,g}\tau)_{g,\kappa} \\
&= (\upsilon, 0)_{g,\kappa} \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où τ forcément nul. Comme τ était quelconque en $T_A\mathcal{A}^{O}_{\Sigma} \cap \delta_A \left(\ker \delta^2_A|_{\Omega^2}\right)$, il suit que $T_A\mathcal{A}^{O}_{\Sigma} \cap \delta_A \left(\ker \delta^2_A|_{\Omega^2}\right) = \{0\}$. La troisième égalité découle du fait que $\mathrm{d}_A \left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right) < T_A\mathcal{A}^{O}_{\Sigma}$. En effet, si $\tau \in \mathrm{d}_A \left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)$, alors $\mathrm{d}_A\tau = \mathrm{d}^2_A\upsilon = 0$, i.e. $\tau \in T_A\mathcal{A}^{O}_{\Sigma}$. La quatrième égalité découle du fait que $\{\tau|\tau = \mathrm{d}_A\upsilon = \delta_A\eta\} < T_A\mathcal{A}^{O}_{\Sigma}$. En effet, si $\tau \in \{\tau|\tau = \mathrm{d}_A\upsilon = \delta_A\eta\}$, alors $\tau = \mathrm{d}_A\upsilon = \delta_A\eta$. Ainsi $\mathrm{d}_A\tau = \mathrm{d}^2_A\upsilon$, i.e. $\tau \in T_A\mathcal{A}^{O}_{\Sigma}$. □

Proposition : Pour $A \in \mathcal{A}^*_\Sigma$, $T_A\mathcal{A}^{O}_{\Sigma}$ est coïsotrope en $T_A\mathcal{A}^*_\Sigma$.

Preuve : $T_A\mathcal{A}^*_\Sigma = \Omega^1_\Sigma$ se décompose somme directe orthogonale de trois sous-espaces symplectiques :

$$\ker \Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma}$$

$$\delta_A\left(\ker\delta_A^2|_{\Omega^2}\right)\oplus \mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}_A^2|_{\Omega^0_\Sigma}\right)$$
$$\{\tau|\tau=\mathrm{d}_A\upsilon=\delta_A\eta\}$$

Par la dernière proposition, $T_A\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma$ est donc "symplectique $\oplus$ isotrope $\oplus$ symplectique", i.e. est coïsotrope. □

Proposition : Pour $A\in\mathcal{A}^*_\Sigma$, et $V_A=\mathrm{im}(\mathrm{d}_A:\Omega^0_\Sigma\to\Omega^1_\Sigma)$ la distribution verticale de la connexion de Coulomb, on a :

$$T_A\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma=\left(\ker\Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma}\right)\oplus V_A$$

Preuve : On sait que :

$$\begin{aligned} V_A &= \mathrm{im}(\mathrm{d}_A:\Omega^0_\Sigma\to\Omega^1_\Sigma)\\ &= \mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}_A^2|_{\Omega^0_\Sigma}\right)\oplus\{\tau|\tau=\mathrm{d}_A\upsilon=\delta_A\eta\}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} T_A\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma &= \left(\ker\Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma}\right)\oplus \mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}_A^2|_{\Omega^0_\Sigma}\right)\oplus\{\tau|\tau=\mathrm{d}_A\upsilon=\delta_A\eta\}\\ &= \left(\ker\Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma}\right)\oplus V_A\end{aligned}$$

□

Proposition : Soit $\mathcal{O}\subset\mathfrak{G}^*_\Sigma$ une orbite coadjointe. Supposons que $\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma\subset\mathcal{A}^*_\Sigma$, i.e. ne contient que des connexions irréductibles. Soit $A\in\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma$ (irréductible). Alors :

$$T_{[A]}\mathcal{M}^{\mathcal{O}}_\Sigma=\ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1})$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned} T_{[A]}\mathcal{M}^{\mathcal{O}}_\Sigma &= T_{[A]}\left(\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma/\mathcal{G}_\Sigma\right)\\ &\cong \frac{T_A\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma}{T_A(A\cdot\mathcal{G}_\Sigma)}\\ &= \frac{T_A\mathcal{A}^{\mathcal{O}}_\Sigma}{V_A}\\ &= \frac{\left(\ker\Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma}\right)\oplus V_A}{V_A}\\ &= \ker\Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma}\end{aligned}$$

□

Question : Pour $A \in \mathcal{A}_{\Sigma}^{\text{fl}}$, je connais la dimension de $\ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1}) = T_{[A]}\mathcal{A}_{\Sigma}^{\text{fl},*} = 6g - 6$ pour $G = \mathrm{SU}(2)$. Mais qu'en est-il pour les autres orbites coadjointes. Est-ce aussi de dimension $6g - 6$? Il me semble que j'ai lu dans un article que oui c'est aussi de dimension $6g - 6$, mais où ? RETROUVER CET ARTICLE ! ! !

33.9 Connexion de Coulomb :

Remarque : On sait que $\mathcal{G}_\Sigma$ agit (presque) librement sur l'espace des connexions irréductibles $\mathcal{A}_\Sigma^*$. Pour $A \in \mathcal{A}_\Sigma^*$, le stabilisateur de A en $\mathcal{G}_\Sigma$ est $\mathrm{Stab}(A) = \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$. Il suit qu'on a un $(\mathcal{G}_\Sigma/\mathbb{Z}_2)$-fibré principal

$$(\mathcal{G}_\Sigma/\mathbb{Z}_2) \hookrightarrow \mathcal{A}_\Sigma^* \to \mathcal{M}_\Sigma^*$$

Sur ce fibré principal repose une distribution verticale naturelle $V \subset T\mathcal{A}_\Sigma^*$ donnée en chaque $A \in \mathcal{A}_\Sigma^*$ par :

$$V_A := T_A(A \cdot \mathcal{G}_\Sigma) = \mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^0 \to \Omega_\Sigma^1)$$

En donnant à Σ une métrique riemannienne g on a naturellement une décomposition

$$T_A\mathcal{A}_\Sigma^* = V_A \oplus H_A$$

où $H_A := V_A^\perp = \ker(\delta_{A,g} : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^0)$.

Proposition : H_A est une connexion d'Ehresmann sur le $(\mathcal{G}_\Sigma/\mathbb{Z}_2)$-fibré principal $\mathcal{A}_\Sigma^* \to \mathcal{M}_\Sigma^*$.

Preuve : D'abord, $T_A\mathcal{A}_\Sigma^* = V_A \oplus H_A$. Ensuite, H_A est $\mathcal{G}_\Sigma$-invariante car $H_A = V_A^\perp$ où : 1. V_A est une distribution $\mathcal{G}_\Sigma$-invariante et où 2. la métrique $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{g,\kappa}$ sur $T\mathcal{A}_\Sigma$ est aussi $\mathcal{G}_\Sigma$-invariante. $\square$

Remarque : Puisque H_A est une connexion d'Ehresmann sur $\mathcal{A}_\Sigma^*$, on peut lui associer une forme de connexion. Cette forme de connexion est nommée *connexion de Coulomb*.

Remarque : À partir d'ici j'écris τ au lieu de $\tau^\sharp$ pour les éléments de $T_A\mathcal{A}$.

Proposition : La connexion de Coulomb $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{A}_\Sigma^*; \mathfrak{G})$ est donnée en chaque $A \in \mathcal{A}_\Sigma^*$ par :

$$\alpha|_A = \Delta_{A,g}^{-1}\delta_{A,g} : \Omega_\Sigma^1 \to \Omega_\Sigma^0$$

Preuve : Soit $A \in \mathcal{A}_\Sigma^*$. D'abord, $\Delta_{A,g}^{-1} : \Omega_\Sigma^0 \to \Omega_\Sigma^0$ est bien définie car $\Delta_{A,g} : \Omega_\Sigma^0 \to \Omega_\Sigma^0$ est un isomorphisme (car A est irréductible). Ainsi, α est bien défini sur $\mathcal{A}_\Sigma^*$. Pour que α soit la forme de connexion de H, il faut montrer trois choses : (1)

α tue H, (2) $\alpha(\Upsilon^*|_A) = \Upsilon$ pour tout $\Upsilon \in \mathfrak{G}_\Sigma$, (3) α est Ad-équivariante. Montrons (1). Soit $\tau \in H_A$, i.e. $\delta_{A,g}\tau = 0$. Il suit naturellement que

$$\alpha|_A(\tau) = \Delta_{A,g}^{-1}\delta_{A,g}(\tau) = \Delta_{A,g}^{-1}(0) = 0$$

Montrons (2). Soit $\upsilon \in \Omega_\Sigma^0$ correspondant à $\Upsilon \in \mathfrak{G}_\Sigma$. Alors :

$$\begin{aligned} \alpha|_A(\Upsilon^*|_A) &= \alpha|_A(\mathrm{d}_A\upsilon) \\ &= \Delta_{A,g}^{-1}\delta_{A,g}\mathrm{d}_A\upsilon \\ &= \Delta_{A,g}^{-1}\Delta_{A,g}\upsilon \\ &= \upsilon \end{aligned}$$

qui correspond à Υ tel qu'attendu. Montrons (3). D'abord, on sait que la dérivée covariante se transforme comme

$$\mathrm{d}_{A\cdot\Lambda}\eta = \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\mathrm{d}_A(\mathrm{Ad}_\lambda\eta)$$

Il suit que $\delta_{A,g}$ se transforme exactement de la même manière, de même pour $\Delta_{A,g}$. Souvenons-nous que l'action à droite $\Psi_\Lambda(A) = A\cdot\Lambda = \Lambda^*$ induit un push-forward $(\Psi_\Lambda)_* : T\mathcal{A} \to T_{\Psi_\Lambda}\mathcal{A}$ donné en chaque $\tau \in T_A\mathcal{A}$ par

$$(\Psi_\Lambda)_*|_A\tau = \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\tau$$

En considérant $\tau \in T_A\mathcal{A}^*$ quelconque, on calcule alors directement la Ad-équivariance de la connexion de Coulomb α :

$$\begin{aligned} ((\Psi_\Lambda)^*\alpha)_A(\tau) &= \alpha|_{\Psi_\Lambda(A)}((\Psi_\Lambda)_*|_A\tau) \\ &= \alpha|_{A\cdot\Lambda}(\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\tau) \\ &= \Delta_{A\cdot\Lambda,g}^{-1}\delta_{A\cdot\Lambda,g}(\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\tau) \\ &= (\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\Delta_{A,g}\mathrm{Ad}_\lambda)^{-1}(\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\delta_{A,g}\mathrm{Ad}_\lambda)(\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\tau) \\ &= \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\Delta_{A,g}^{-1}\mathrm{Ad}_\lambda(\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\delta_{A,g})(\tau) \\ &= \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\Delta_{A,g}^{-1}\delta_{A,g}(\tau) \\ &= (\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\alpha)|_A(\tau) \\ &= (\mathrm{Ad}_{\Lambda^{-1}}\alpha)|_A(\tau) \end{aligned}$$

D'où $(\Psi_\Lambda)^*\alpha = \mathrm{Ad}_{\Lambda^{-1}}\alpha$. D'où la Ad-équivariance recherchée. $\square$

Remarque : Chaque métrique riemannienne g sur Σ induit une connexion de Coulomb. Si on considère l'espace des connexions sur l'espace des connexions SU(2) irréductibles sur Σ :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{A}_\Sigma^*} := \{\alpha \in \Omega^1_{\mathrm{Ad}}(\mathcal{A}_\Sigma^*; \mathfrak{G}_\Sigma) | \alpha(\Upsilon^*) = \Upsilon, \forall \Upsilon \in \mathfrak{G}_\Sigma\}$$

on a alors une manière canonique d'associer à une métrique riemannienne g sur Σ sa connexion de Coulomb correspondante $\alpha_g \in \mathcal{A}_{\mathcal{A}_\Sigma^*}$. En particulier, en dénotant par $\mathcal{A}^{Coulomb}_{\mathcal{A}_\Sigma^*}$ l'espace des connexions de Coulomb, il serait intéressant de vérifier si cet ensemble est le lieu critique d'une éventuelle fonctionnelle (de Coulomb ?) définie sur $\mathcal{A}_{\mathcal{A}_\Sigma^*}$, e.g. de type Yang-Mills sur la courbure de la connexion de Coulomb qu'on a fait descendre à $\mathcal{M}_\Sigma^*$. Ou encore, il serait possible que cette fonctionnelle soit équivalente à la fonctionnelle d'Hilbert-Einstein. À vérifier éventuellement quand j'aurai le temps (attention car Hilbert-Einstein est pseudo-riemannien mais ici je ne travaille qu'en riemannien). De retour à nos moutons.

Proposition : Pour $A \in \mathcal{A}_\Sigma^*$ et $\upsilon_1, \upsilon_2 \in \Omega_\Sigma^0$ on a :

$$(\Delta_{A,g}^{-1}\upsilon_1, \Delta_{A,g}\upsilon_2)_{g,\kappa} = (\upsilon_1, \upsilon_2)_{g,\kappa}$$

Preuve : Comme $\Delta_{A,g}$ est auto-adjoint, on a :

$$(\Delta_{A,g}^{-1}\upsilon_1, \Delta_{A,g}\upsilon_2)_{g,\kappa} = (\Delta_{A,g}\Delta_{A,g}^{-1}\upsilon_1, \upsilon_2)_{g,\kappa} = (\upsilon_1, \upsilon_2)_{g,\kappa}$$

□

Corollaire : $\Delta_{A,g}^{-1}$ est auto-adjoint et commute avec $\star_g$.

Remarque : Il y a plus d'informations sur la connexion de Coulomb en : *(1979) Geometry of SU(2) gauge fields (M. S. Narasimhan AND T. R. Ramadas)* et aussi en *(1994) Flat connections, geometric invariants and the symplectic nature of the fundamental group of surfaces (K. Guruprasad).*

33.10 Projections horizontales et verticales de la connexion de Coulomb :

Proposition : Les projections verticales et horizontales

$$v : T\mathcal{A}^*_\Sigma \to V$$
$$h : T\mathcal{A}^*_\Sigma \to H$$

de la connexion de Coulomb sont explicitement données en tout $A \in \mathcal{A}^*_\Sigma$ et tout $\tau \in T_A\mathcal{A}^*_\Sigma$ par :

$$v_A\tau = \mathrm{d}_A\Delta^{-1}_{A,g}\delta_{A,g}\tau$$
$$h_A\tau = \tau - v_A\tau = \tau - \mathrm{d}_A\Delta^{-1}_{A,g}\delta_{A,g}\tau$$

Preuve : Il suffit de montrer que la projection verticale est bel et bien $v_A\tau = \mathrm{d}_A\Delta^{-1}_{A,g}\delta_{A,g}\tau$. Pour cela, il suffit de montrer que (1) si $\tau \in H_A$, alors $v_A\tau = 0$ et que (2) si $\tau \in V_A$, alors $v_A\tau = \tau$. Montrons (1). Si $\tau \in H_A$, alors $\delta_{A,g}\tau = 0$. D'où $v_A\tau = 0$. Montrons (2). Si $\tau \in V_A$, alors il existe un unique $\upsilon \in \Omega^0_\Sigma$ tel que $\tau = \mathrm{d}_A\upsilon$. Il suit que

$$v_A\tau = \mathrm{d}_A\Delta^{-1}_{A,g}\delta_{A,g}\tau = \mathrm{d}_A(\alpha|_A(\tau)) = \mathrm{d}_A(\alpha|_A(\mathrm{d}_A\upsilon)) = \mathrm{d}_A\upsilon = \tau$$

□

Remarque : On a $v_A = \mathrm{d}_A \circ \alpha|_A$.

Proposition : Soit $\Psi : \mathcal{G}_\Sigma \to \mathrm{Diff}(\mathcal{A}_\Sigma)$, $\Psi_\Lambda(A) = A\cdot\Lambda = \Lambda^*A$. Alors, pour $\tau \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$ on a :

$$v_{\Psi_\Lambda(A)}(\Psi_\Lambda)_*|_A(\tau) = \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}v_A(\tau)$$
$$h_{\Psi_\Lambda(A)}(\Psi_\Lambda)_*|_A(\tau) = \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}h_A(\tau)$$

Preuve : Par la dernière section on a :

$$\alpha|_{\Psi_\Lambda(A)}((\Psi_\Lambda)_*|_A\tau) = (\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\alpha)|_A(\tau)$$

Ainsi, pour la projection verticale $v_{A\cdot\Lambda}$ on trouve :

$$\begin{aligned}
v_{\Psi_\Lambda(A)}(\Psi_\Lambda)_*|_A(\tau) &= \mathrm{d}_{A\cdot\Lambda}\alpha|_{\Psi_\Lambda(A)}((\Psi_\Lambda)_*|_A\tau)\\
&= \mathrm{d}_{A\cdot\Lambda}(\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\alpha)|_A(\tau)\\
&= \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\mathrm{d}_A(\mathrm{Ad}_\lambda\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\alpha)|_A(\tau)\\
&= \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\mathrm{d}_A(\alpha)|_A(\tau)\\
&= \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}v_A(\tau)
\end{aligned}$$

Ensuite pour la projection horizontale $h_{A\cdot\Lambda}$ on trouve :

$$\begin{aligned} h_{\Psi_\Lambda(A)}(\Psi_\Lambda)_*|_A\tau &= (\Psi_\Lambda)_*|_A\tau - v_{\Psi_\Lambda(A)}(\Psi_\Lambda)_*|_A\tau \\ &= \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}\tau - \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}v_A(\tau) \\ &= \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}(\tau - v_A(\tau)) \\ &= \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}h_A(\tau) \end{aligned}$$

□

Proposition : Soient $\tau_1 \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$ et $\tau_2 \in H_A = \ker(\delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma})$. Alors :

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} h_{A+\epsilon\tau_1}\tau_2 = \mathrm{d}_A \star_g \Delta^{-1}_{A,g}[\tau_1 \wedge \star_g\tau_2]$$

Preuve : On calcule directement :

$$\begin{aligned} & \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} h_{A+\epsilon\tau_1}\tau_2 \\ = & \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} (\tau_2 - v_{A+\epsilon\tau_1}\tau_2) \\ = & -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} v_{A+\epsilon\tau_1}\tau_2 \\ = & -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \mathrm{d}_{A+\epsilon\tau_1}\Delta^{-1}_{A+\epsilon\tau_1,g}\delta_{A+\epsilon\tau_1,g}\tau_2 \\ = & -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \left(\mathrm{d}_{A+\epsilon\tau_1}\Delta^{-1}_{A,g}\delta_{A,g}\tau_2 + \mathrm{d}_A\Delta^{-1}_{A+\epsilon\tau_1,g}\delta_{A,g}\tau_2 + \mathrm{d}_A\Delta^{-1}_{A,g}\delta_{A+\epsilon\tau_1,g}\tau_2\right) \\ = & -\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \mathrm{d}_A\Delta^{-1}_{A,g}\delta_{A+\epsilon\tau_1,g}\tau_2 \\ = & -\mathrm{d}_A\Delta^{-1}_{A,g}(-\star_g [\tau_1 \wedge \star_g\tau_2]) \\ = & \mathrm{d}_A \star_g \Delta^{-1}_{A,g}[\tau_1 \wedge \star_g\tau_2] \end{aligned}$$

□

33.11 Égalité utile sur les crochets :

Proposition : Pour tous $\upsilon_1, \upsilon_2 \in \Omega^0_\Sigma$ et pour tous $\tau_1, \tau_2 \in \Omega^1_\Sigma$ et pour tous $\eta_1, \eta_2 \in \Omega^2_\Sigma$ on a :

$$\star[\upsilon_1 \wedge \upsilon_2] = [\star\upsilon_1 \wedge \upsilon_2] = [\upsilon_1 \wedge \star\upsilon_2]$$

$$[\star\tau_1 \wedge \tau_2] = -[\tau_1 \wedge \star\tau_2]$$

$$[\star\tau_1 \wedge \star\tau_2] = [\tau_1 \wedge \tau_2]$$

$$[\star\eta_1 \wedge \eta_2] = [\eta_1 \wedge \star\eta_2]$$

Preuve : La première ligne d'égalités est évidente. La dernière découle de la première via $\upsilon_1 = \star\eta_1 \in \Omega^0_\Sigma$ et $\upsilon_2 = \star\eta_2 \in \Omega^0_\Sigma$:

$$[\star\eta_1 \wedge \eta_2] = [\upsilon_1 \wedge \star\upsilon_2] = [\star\upsilon_1 \wedge \upsilon_2] = [\eta_1 \wedge \star\eta_2]$$

Montrons l'égalité de la seconde ligne. Fixons $x \in \Sigma$. Autour de x prenons des coordonnées (x^1, x^2) sur un voisinage U de x telles que localement on ait $\Omega_g = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$. Ainsi, $\star_g \mathrm{d}x^1 = \mathrm{d}x^2$ et $\star_g \mathrm{d}x^2 = -\mathrm{d}x^1$. Ensuite, il existe forcément $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Ad}P_x$ tels que $\tau_1|_x = \phi_1 \otimes \mathrm{d}x^1 + \phi_2 \otimes \mathrm{d}x^2$ et $\tau_2|_x = \psi_1 \otimes \mathrm{d}x^1 + \psi_2 \otimes \mathrm{d}x^2$. On a alors $\star_g \tau_1|_x = \phi_1 \otimes \mathrm{d}x^2 - \phi_2 \otimes \mathrm{d}x^1$ et $\star_g \tau_2|_x = \psi_1 \otimes \mathrm{d}x^2 - \psi_2 \otimes \mathrm{d}x^1$. Ainsi, en $x \in \Sigma$:

$$\begin{aligned}
[\tau_1 \wedge \star_g \tau_2] &= [(\phi_1 \otimes \mathrm{d}x^1 + \phi_2 \otimes \mathrm{d}x^2) \wedge (\psi_1 \otimes \mathrm{d}x^2 - \psi_2 \otimes \mathrm{d}x^1)] \\
&= [(\phi_1 \otimes \mathrm{d}x^1) \wedge (\psi_1 \otimes \mathrm{d}x^2)] - [(\phi_2 \otimes \mathrm{d}x^2) \wedge (\psi_2 \otimes \mathrm{d}x^1)] \\
&= ([\phi_1, \psi_1] + [\phi_2, \psi_2]) \otimes (\mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^2)
\end{aligned}$$

Par symétrie on trouve donc :

$$\begin{aligned}
[\tau_2 \wedge \star_g \tau_1] &= ([\psi_1, \phi_1] + [\psi_2, \phi_2]) \otimes (\mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^2) \\
&= -([\phi_1, \psi_1] + [\phi_2, \psi_2]) \otimes (\mathrm{d}x^1 \otimes \mathrm{d}x^2) \\
&= -[\tau_1 \wedge \star_g \tau_2]
\end{aligned}$$

D'où $[\tau_2 \wedge \star_g \tau_1] = -[\tau_1 \wedge \star_g \tau_2]$. D'où $[\star\tau_1 \wedge \tau_2] = -[\tau_1 \wedge \star\tau_2]$. Comme c'est vrai pour tout $x \in \Sigma$, alors c'est vrai sur tout Σ. Ce qui démontre la seconde ligne. Enfin, l'égalité de la troisième ligne découle de celle de la seconde en substituant τ_2 par $\star\tau_2$ et en utilisant $\star^2|_{\Omega^1_\Sigma} = -1$. □

33.12 Courbure de la connexion de Coulomb :

Proposition : La courbure Ω_α de la connexion de Coulomb α sur $\mathcal{A}_\Sigma^*$ est donnée en chaque $A \in \mathcal{A}_\Sigma^*$ et chaque vecteurs horizontaux $\tau_1, \tau_2 \in H_A$ par :

$$\Omega_\alpha|_A(\tau_1, \tau_2) = - \star_g \Delta_{A,g}^{-1} \left([\tau_1 \wedge \star_g \tau_2] - [\tau_2 \wedge \star_g \tau_1] \right)$$

Preuve : Soit $A \in \mathcal{A}_\Sigma^*$ une connexion irréductible. Soient $\tau_1, \tau_2 \in H_A < T_A \mathcal{A}_\Sigma$ deux vecteurs horizontaux, i.e. $\delta_{A,g}\tau_1 = \delta_{A,g}\tau_2 = 0$ et $h\tau_1 = \tau_1$, $h\tau_2 = \tau_2$ pour h la projection horizontale. Étendons τ_1, τ_2 à des champs vectoriels constants sur $\mathcal{A}_\Sigma$, aussi dénotés τ_1, τ_2. Puisque τ_1 et τ_2 sont constants, ils commutent pour le crochet de champs vectoriels. On calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
& \Omega_\alpha|_A(\tau_1, \tau_2) \\
= \ & (\mathrm{d}\alpha)|_A(h\tau_1, h\tau_2) \\
= \ & (\mathrm{d}\alpha)|_A(\tau_1, \tau_2) \\
= \ & \tau_1 \alpha \tau_2 - \tau_2 \alpha \tau_1 - \alpha([\tau_1, \tau_2]) \\
= \ & \tau_1 \alpha \tau_2 - \tau_2 \alpha \tau_1 \\
= \ & \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \alpha|_{A+\epsilon\tau_1}(\tau_2) - \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \alpha|_{A+\epsilon\tau_2}(\tau_1) \\
= \ & \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \left((\Delta_{A+\epsilon\tau_1,g})^{-1} \delta_{A+\epsilon\tau_1,g} \right)(\tau_2) - \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \left((\Delta_{A+\epsilon\tau_2,g})^{-1} \delta_{A+\epsilon\tau_2,g} \right)(\tau_1) \\
= \ & \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \left((\Delta_{A+\epsilon\tau_1,g})^{-1} \right) \delta_{A,g}(\tau_2) + \Delta_{A,g}^{-1} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \left(\delta_{A+\epsilon\tau_1,g} \right)(\tau_2) \\
& - \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \left((\Delta_{A+\epsilon\tau_2,g})^{-1} \right) \delta_{A,g}(\tau_1) - \Delta_{A,g}^{-1} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \left(\delta_{A+\epsilon\tau_2,g} \right)(\tau_1) \\
= \ & -\Delta_{A,g}^{-1} \star_g [\tau_1 \wedge \star_g \tau_2] + \Delta_{A,g}^{-1} \star_g [\tau_2 \wedge \star_g \tau_1] \\
= \ & - \star_g \Delta_{A,g}^{-1} \left([\tau_1 \wedge \star_g \tau_2] - [\tau_2 \wedge \star_g \tau_1] \right)
\end{aligned}$$

□

Corollaire : La courbure Ω_α de la connexion de Coulomb α vaut, sur chaque vecteurs horizontaux $\tau_1, \tau_2 \in H_A$ en $A \in \mathcal{A}_\Sigma^*$:

$$\Omega_\alpha|_A(\tau_1, \tau_2) = -2 \star_g \Delta_{A,g}^{-1} [\tau_1 \wedge \star_g \tau_2]$$

Preuve : Il suffit d'utiliser l'égalité $[\tau_1 \wedge \star\tau_2] = -[\tau_2 \wedge \star\tau_1]$ dans l'égalité

$$\Omega_\alpha|_A(\tau_1, \tau_2) = -\star_g \Delta_{A,g}^{-1} \left([\tau_1 \wedge \star_g \tau_2] - [\tau_2 \wedge \star_g \tau_1]\right)$$

□

Remarque : Comme $\star_g$ est bijective et $\Delta_{A,g}^{-1}$ injective pour $A \in \mathcal{A}_\Sigma^*$, il suit que pour $\tau_1, \tau_2 \in H_A$ on a $\Omega_\alpha|_A(\tau_1, \tau_2)$ nul si et seulement si $[\tau_1 \wedge \star_g \tau_2]$ est nul.

33.13 Dérivée covariante $\mathrm{d}^\alpha\mu$ de μ par la connexion de Coulomb :

Proposition : La dérivée covariante $\mathrm{d}^\alpha\mu$ de l'application moment μ est donnée en chaque $A \in \mathcal{A}_\Sigma^*$ et chaque $\tau \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$ par :

$$(\mathrm{d}^\alpha\mu)|_A(\tau) = \mathrm{d}_A\tau - [F_A, (\Delta_{A,g}^{-1}\delta_{A,g}\tau)]$$

Preuve : Soient $A \in \mathcal{A}_\Sigma^*$ et $\tau \in T_A\mathcal{A}_\Sigma^*$ quelconques. On sait que $(\mathrm{d}\mu)|_A(\tau) = \mathrm{d}_A\tau$. En utilisant la projection horizontale $h : T\mathcal{A}_\Sigma^* \to H$ de la connexion de Coulomb, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}^\alpha\mu)|_A(\tau) &= (\mathrm{d}\mu)|_A(h_A\tau) \\
&= \mathrm{d}_A(h_A\tau) \\
&= \mathrm{d}_A(\tau - \mathrm{d}_A\Delta_{A,g}^{-1}\delta_{A,g}\tau) \\
&= \mathrm{d}_A\tau - \mathrm{d}_A^2\Delta_{A,g}^{-1}\delta_{A,g}\tau \\
&= \mathrm{d}_A\tau - [F_A \wedge (\Delta_{A,g}^{-1}\delta_{A,g}\tau)] \\
&= \mathrm{d}_A\tau - [F_A, (\Delta_{A,g}^{-1}\delta_{A,g}\tau)]
\end{aligned}$$

□

Remarque : Ceci peut se reformuler comme :

$$(\mathrm{d}^\alpha\mu)|_A(\tau) = \mathrm{d}_A\tau + [(\alpha|_A(\tau)), \mu|_A]$$

Ceci peut encore se reformuler comme :

$$\mathrm{d}^\alpha\mu = \mathrm{d}\mu + [\alpha, \mu]$$

Autrement dit, on retrouve la formule de dérivée covariante usuelle.

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}_\Sigma^O$. Alors $\ker(\mathrm{d}^\alpha\mu|_A) < T_A\mathcal{A}_\Sigma^O$.

Preuve : Soit $\tau \in \ker(\mathrm{d}^\alpha\mu|_A)$. Alors $0 = \mathrm{d}_A\tau - [F_A, (\Delta_{A,g}^{-1}\delta_{A,g}\tau)]$. Alors $\mathrm{d}_A\tau = [F_A, (\Delta_{A,g}^{-1}\delta_{A,g}\tau)]$. Alors il existe $\upsilon := (\Delta_{A,g}^{-1}\delta_{A,g}\tau) \in \Omega_\Sigma^0$ tel que $\mathrm{d}_A\tau = [F_A, \upsilon]$. C'est-à-dire, $\mathrm{d}_A\tau \in \mathrm{im}(\mathrm{d}_A^2 : \Omega_\Sigma^0 \to \Omega_\Sigma^2)$. En se souvenant que :

$$T_A\mathcal{A}_\Sigma^O = \{\tau \in T_A\mathcal{A}_\Sigma | \mathrm{d}_A\tau \in \mathrm{im}(\mathrm{d}_A^2 : \Omega_\Sigma^0 \to \Omega_\Sigma^2)\}$$

on a montré ce qu'on voulait. □

Corollaire : $\ker(\mathrm{d}_A \circ h_A) < T_A \mathcal{A}_\Sigma^{\mathcal{O}}$.

Preuve : $\ker(\mathrm{d}_A \circ h_A) = \ker((\mathrm{d}\mu)|_A \circ h_A) = \ker(\mathrm{d}^\alpha \mu|_A) < T_A \mathcal{A}_\Sigma^{\mathcal{O}}$. □

Proposition : $\frac{\ker(\mathrm{d}_A \circ h_A)}{\mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega_\Sigma^0})} < T_{[A]} \mathcal{M}_\Sigma^{\mathcal{O}}$.

Preuve : Par le dernier corollaire, on sait que $\ker(\mathrm{d}_A \circ h_A) < T_A \mathcal{A}_\Sigma^{\mathcal{O}}$. Si on quotiente à gauche et à droite par $\mathrm{im}(\mathrm{d}_A : \Omega_\Sigma^0 \to \Omega_\Sigma^1)$. il suit que :

$$\frac{\ker(\mathrm{d}_A \circ h_A)}{\mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega_\Sigma^0})} < \frac{T_A \mathcal{A}_\Sigma^{\mathcal{O}}}{\mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega_\Sigma^0})} \cong T_{[A]} \mathcal{M}_\Sigma^{\mathcal{O}}$$

□

Remarque : Cette dernière proposition se réécrit comme :

$$\ker(\mathrm{d}_A \circ h_A) \cap H_A < T_{[A]} \mathcal{M}_\Sigma^{\mathcal{O}}$$

ou encore comme :

$$\ker\left(\mathrm{d}_A - \mathrm{d}_A^2 \Delta_A^{-1} \delta_A\right) \cap \ker(\delta_A|_{\Omega^1}) < \ker(\pi_A \circ \mathrm{d}_A|_{\Omega^1}) \cap \ker(\delta_A|_{\Omega^1})$$

où π_A est la projection quotient suivante :

$$\pi_A : \Omega^2 \to \frac{\Omega^2}{\mathrm{im}(\mathrm{d}_A^2|_{\Omega^0})} = \ker(\delta_A^2|_{\Omega^2})$$

33.14 Distribution noyau de $\mathrm{d}_\alpha \mu_\sharp$:

Proposition : L'application moment $\mu : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathfrak{G}^*_\Sigma$ descend à une section

$$\mu_\sharp : \mathcal{M}_\Sigma \to \mathrm{Ad}^* \mathcal{A}_\Sigma$$

où :

$$\mathrm{Ad}^* \mathcal{A}_\Sigma := \mathcal{A}_\Sigma \times_{\mathrm{Ad}^*} \mathfrak{G}^*_\Sigma := \left(\mathcal{A}_\Sigma \times \mathfrak{G}^*_\Sigma\right) / \mathcal{G}_\Sigma$$

est le Ad^*-fibré associé à $\mathcal{A}_\Sigma \to \mathcal{M}_\Sigma$.

Preuve : Ceci découle de la Ad^*-équivariance de μ démontrée plus haut :

$$\mu|_{A \cdot \Lambda} = \mathrm{Ad}^*_{\Lambda^{-1}} \mu|_A, \qquad \forall A \in \mathcal{A}_\Sigma,\ \Lambda \in \mathcal{G}_\Sigma$$

□

Corollaire : Il est légitime de considérer la dérivée covariante $\mathrm{d}_\alpha \mu_\sharp$ de $\mu_\sharp$:

$$\mathrm{d}_\alpha \mu_\sharp \in \Omega^1(\mathcal{M}^*_\Sigma; \mathrm{Ad}^* \mathcal{A}_\Sigma)$$

Remarque : En considérant l'espace des orbites coadjointes $\mathcal{O} \subset \mathfrak{G}^*_\Sigma$, on a un feuilletage (possiblement singulier) de $\mathcal{M}^*_\Sigma$ dont les feuilles sont $\mathcal{M}^{\mathcal{O}}_\Sigma$. Le tangent à ce feuilletage induit une distribution (intégrable) sur $\mathcal{M}^*_\Sigma$ donné par $T\mathcal{M}^{\mathcal{O}}_\Sigma < T\mathcal{M}^*_\Sigma$.

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}^*_\Sigma$. Soit $\mathcal{O}$ l'orbite coadjointe de F_A en $\mathfrak{G}^*_\Sigma$. Alors :

$$\ker(\mathrm{d}_\alpha \mu_\sharp)|_{[A]} = T_{[A]} \mathcal{M}^{\mathcal{O}}_\Sigma$$

Preuve : On sait que $T_{[A]} \mathcal{M}^{\mathcal{O}}_\Sigma = \ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1})$. Il suffit donc de montrer que $\ker(\mathrm{d}_\alpha \mu_\sharp)|_{[A]} = \ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1})$. Montrons d'abord que :

$$\ker(\mathrm{d}_\alpha \mu_\sharp)|_{[A]} < \ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1})$$

Soit $\tau \in \ker(\mathrm{d}_\alpha \mu_\sharp)|_{[A]}$. Alors τ se relève à un vecteur horizontal en $H_A < T_A \mathcal{A}^*_\Sigma$ tel que $\tau \in \ker(\mathrm{d}^\alpha \mu)|_A$. On a donc d'une part $\delta_{A,g} \tau = 0$ (par horizontalité) et d'autre part $\mathrm{d}_A \tau = \mathrm{d}^2_A(\Delta^{-1}_{A,g} \delta_{A,g} \tau)$. D'où $\delta_{A,g} \tau = 0$ et $\mathrm{d}_A \tau = 0$. D'où $\tau \in \ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma})$. Montrons ensuite que :

$$\ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1}) < \ker(\mathrm{d}_\alpha \mu_\sharp)|_{[A]}$$

Soit $\tau \in \ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1})$. Alors $\mathrm{d}_A\tau = 0$ et $\delta_{A,g}\tau = 0$. Alors τ est horizontal et dans le noyau de $(\mathrm{d}^\alpha\mu)|_A$. Donc τ est dans le noyau de $(\mathrm{d}_\alpha\mu_\sharp)|_{[A]}$. □

Corollaire : La distribution $\ker(\mathrm{d}_\alpha\mu)$ est intégrable.

Remarque : La notion d'intégrabilité est reliée à

$$(\mathrm{d}_\alpha\mu)|_{[A]}([X_1, X_2]) = -[\Omega|_{[A]}, \mu|_{[A]}](X_1, X_2) = -(\mathrm{d}^2_\alpha\mu)(X_1, X_2), \quad \forall X_1, X_2 \in T_{[A]}\mathcal{M}^*_\Sigma$$

Revenir là-dessus pour connaître les conséquences du fait que $\ker(\mathrm{d}_\alpha\mu)$ est intégrable.

Remarque : En conclusion, on a la suite d'égalité très utile :

$$T_{[A]}\mathcal{M}^{\mathcal{O}}_\Sigma = \ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1}) = \ker(\mathrm{d}_\alpha\mu_\sharp)|_{[A]}$$

33.15 Décomposition de $T_A\mathcal{A}$ en somme directe orthogonale symplectique :

Rappel : Par le théorème de décomposition de Hodge covariant généralisé, l'espace $T_A\mathcal{A}_\Sigma = \Omega^1_\Sigma$ se décompose en la somme directe orthogonale suivante :

$$\begin{aligned}\Omega^1_\Sigma \;=\;& \left(\ker \Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma}\right) \oplus \left(\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)\right) \oplus \left(\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)\right)\\ &\oplus \left\{\tau \in \Omega^1_\Sigma | \exists \upsilon \in \Omega^0_\Sigma, \exists \eta \in \Omega^2_\Sigma : \tau = \mathrm{d}_A \upsilon = \delta_{A,g}\eta\right\}\end{aligned}$$

Proposition : Les sous-espaces $\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)$ et $\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)$ sont isomorphes via $\star_g$, i.e. :

$$\star_g\left(\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)\right) = \mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)$$

$$\star_g\left(\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)\right) = \delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)$$

Preuve : Montrons d'abord que $\star_g\left(\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)\right) \subset \mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)$. Soit $\tau \in \delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)$. Alors $\delta_{A,g}\tau = 0$ et il existe $\eta \in \Omega^2_\Sigma$ tel que $\tau = \delta_{A,g}\eta$. Posons $\tilde{\tau} := \star_g\tau$. On a alors d'une part $0 = \delta_{A,g}\tau = -\delta_{A,g}\star_g^2\tau = -\delta_{A,g}\star_g\tilde{\tau} = \pm\star_g \mathrm{d}_A\tilde{\tau}$, i.e. $\mathrm{d}_A\tilde{\tau} = 0$, et d'autre part $\tilde{\tau} = \star_g\tau = \star_g\delta_{A,g}\eta = \pm\mathrm{d}_A(\star_g\eta)$, i.e. $\tilde{\tau}$ est d_A-exact. Comme τ était quelconque en $\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)$, il suit que

$$\star_g\left(\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)\right) \subset \mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)$$

De la même manière on montre que

$$\star_g\left(\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)\right) \subset \delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)$$

Enfin, puisque $\star_g$ est injectif, il suit que les inclusions de la gauche vers la droite et de la droite vers la gauche sont des égalités. D'où l'isomorphisme recherché. □

Proposition : Les sous-espaces suivants de l'espace symplectique $(T_A\mathcal{A}_\Sigma, \omega) = (\Omega^1_\Sigma, \omega)$ sont symplectiques :

1. $\ker \Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma}$
2. $\left(\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)\right) \oplus \left(\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)\right)$
3. $\left\{\tau \in \Omega^1_\Sigma | \exists \upsilon \in \Omega^0_\Sigma, \exists \eta \in \Omega^2_\Sigma : \tau = \mathrm{d}_A \upsilon = \delta_{A,g}\eta\right\}$

Preuve : Il suffit de montrer que ces sous-espaces sont $J = \star_g$ invariants. Le premier espace est $J = \star_g$ invariant car $\star_g$ commute avec $\star_g$. Le second espace est $J = \star_g$ invariant par la dernière proposition. Montrons que le dernier espace est $J = \star_g$ invariant. Soit $\tau \in \left\{\tau \in \Omega^1_\Sigma | \exists \upsilon \in \Omega^0_\Sigma, \exists \eta \in \Omega^2_\Sigma : \tau = \mathrm{d}_A \upsilon = \delta_{A,g}\eta\right\}$. Alors $\tau = \mathrm{d}_A\upsilon$ et $\tau = \delta_{A,g}\eta$. Alors $\star_g\tau = (\star_g \mathrm{d}_A \star_g)(\star\upsilon) = \pm\delta_{A,g}(\star\upsilon)$ et $\star_g\tau = (\star_g\delta_{A,g}\star)(\star_g\eta) = \pm \mathrm{d}_A(\star_g\eta)$. D'où $\star_g\tau$ est d_A-exact et $\delta_{A,g}$-exact. D'où $\star_g\tau \in \left\{\tau \in \Omega^1_\Sigma | \exists \upsilon \in \Omega^0_\Sigma, \exists \eta \in \Omega^2_\Sigma : \tau = \mathrm{d}_A \upsilon = \delta_{A,g}\eta\right\}$. □

Proposition : Les sous-espaces $\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)$ et $\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)$ sont lagrangiens en l'espace symplectique

$$\left(\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)\right) \oplus \left(\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)\right)$$

Preuve : Montrons d'abord que $\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)$ est isotrope en $\left(\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)\right) \oplus \left(\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)\right)$. Soient $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)$. Alors $\tau_1 = \mathrm{d}_A\upsilon_1$ et $\tau_2 = \mathrm{d}_A\upsilon_2$ et $\mathrm{d}_A\tau_1 = \mathrm{d}_A\tau_2 = 0$. Par le théorème de Stokes on trouve directement :

$$\begin{aligned}
\omega(\tau_1,\tau_2) &= \omega(\mathrm{d}_A\upsilon_1, \mathrm{d}_A\upsilon_2)\\
&= \int_\Sigma (\mathrm{d}_A\upsilon_1) \wedge^\kappa (\mathrm{d}_A\upsilon_2)\\
&= -\int_\Sigma \upsilon_1 \wedge^\kappa (\mathrm{d}^2_A\upsilon_2)\\
&= -\int_\Sigma \upsilon_1 \wedge^\kappa (\mathrm{d}_A\tau_2)\\
&= -\int_\Sigma \upsilon_1 \wedge^\kappa (0)\\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)$ est isotrope en $\left(\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)\right) \oplus \left(\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)\right)$. Ensuite, on sait que les deux sous-espaces $\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)$ et $\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma}\right)$ forment une décomposition en somme directe orthogonale de l'espace $\left(\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)\right) \oplus$

$\left(\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}_A^2|_{\Omega^0_\Sigma}\right)\right)$. Puisque les sous-espaces $\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)$ et $\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}_A^2|_{\Omega^0_\Sigma}\right)$ sont isomorphes (via $\star_g$), le sous-espace $\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}_A^2|_{\Omega^0_\Sigma}\right)$ est maximal isotrope (i.e. lagrangien) en $\left(\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)\right) \oplus \left(\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}_A^2|_{\Omega^0_\Sigma}\right)\right)$. Par symétrie, il suit que la somme directe orthogonale $\left(\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)\right) \oplus \left(\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}_A^2|_{\Omega^0_\Sigma}\right)\right)$ est une somme directe orthogonale de deux sous-espaces lagrangiens $\left(\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)\right)$ et $\left(\mathrm{d}_A\left(\ker \mathrm{d}_A^2|_{\Omega^0_\Sigma}\right)\right)$. □

Corollaire : Si $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_\Sigma$, la décomposition en somme directe orthogonale de sous-espaces symplectiques s'écrit plus simplement :

$$T_A\mathcal{A}_\Sigma = \left(\ker \Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma}\right) \oplus \left(\mathrm{im}(\delta_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}) \oplus \mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^0_\Sigma})\right)$$

C'est-à-dire, on a deux sous-espaces symplectiques $\ker \Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma}$ et $\mathrm{im}(\delta_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}) \oplus \mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^0_\Sigma})$ de $T_A\mathcal{A}_\Sigma$. Ainsi, $T_{[A]}\mathcal{M}^{\mathrm{fl}}_\Sigma = \ker \Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma}$ est symplectique, i.e. $\mathcal{M}^{\mathrm{fl}}_\Sigma$ est symplectique (tel que prévu par la réduction de Marsden-Weinstein). Aussi, $\mathrm{im}(\delta_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma})$ et $\mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^0_\Sigma})$ sont lagrangiens en $\mathrm{im}(\delta_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}) \oplus \mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^0_\Sigma})$ et donc isotropes en $T_A\mathcal{A}_\Sigma$.

Proposition : $\mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_\Sigma$ est coïsotrope en $(\mathcal{A}_\Sigma, \omega)$.

Preuve : Soit $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_\Sigma$. Alors :

$$\begin{aligned}
T_A\mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_\Sigma &= T_A\mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_\Sigma \cap \Omega^1_\Sigma \\
&= T_A\mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_\Sigma \cap (H_A \oplus V_A) \\
&= (T_A\mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_\Sigma \cap H_A) \oplus (T_A\mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_\Sigma \cap V_A) \\
&= \{\tau \in \Omega^1_\Sigma | \mathrm{d}_A\tau = 0, \delta_{A,g}\tau = 0\} \oplus \{\tau \in \mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^0_\Sigma}) | \mathrm{d}_A\tau = 0\} \\
&= \ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma}) \oplus \mathrm{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^0_\Sigma}) \\
&= \ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma}) \oplus V_A
\end{aligned}$$

Mais $\ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma})$ est symplectique et V_A est isotrope. D'où $T_A\mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_\Sigma$ coïsotrope. D'où $\mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_\Sigma$ coïsotrope. □

33.16 Décomposition de $\mathfrak{G}_\Sigma$ et $\mathfrak{G}_\Sigma^*$ en sommes directes orthogonales :

Proposition : On a les deux décompositions en sommes directes orthogonales suivantes :

$$\mathfrak{G}_\Sigma = \Omega^0_\Sigma = \left(\ker(\mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma})\right) \oplus \left(\mathrm{im}(\delta^2_A|_{\Omega^2_\Sigma})\right)$$

$$\mathfrak{G}^*_\Sigma = \Omega^2_\Sigma = \left(\ker(\delta^2_A|_{\Omega^2_\Sigma})\right) \oplus \left(\mathrm{im}(\mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma})\right)$$

Preuve : Par symétrie il suffit de montrer que $\mathrm{im}(\delta^2_A|_{\Omega^2_\Sigma})^\perp = \left(\ker(\mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma})\right)$. On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(\delta^2_A|_{\Omega^2_\Sigma})^\perp &= \{\upsilon \in \Omega^0_\Sigma | (\upsilon, \mathrm{d}^2_A\eta)_{g,\kappa} = 0, \forall \eta \in \Omega^2_\Sigma\} \\
&= \{\upsilon \in \Omega^0_\Sigma | (\delta^2_A\upsilon, \eta)_{g,\kappa} = 0, \forall \eta \in \Omega^2_\Sigma\} \\
&= \{\upsilon \in \Omega^0_\Sigma | \delta^2_A\upsilon\} \\
&= \ker(\mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma})
\end{aligned}$$

□

Corollaire : Si $F_A \neq 0$, alors F_A n'est pas d^2_A-exact.

Preuve : On a $\delta^2_A F_A = 0$. Donc $F_A \in \left(\ker(\delta^2_A|_{\Omega^2_\Sigma})\right)$. Donc, si $F_A \neq 0$, il suit que $F_A \notin \mathrm{im}(\mathrm{d}^2_A|_{\Omega^0_\Sigma})$. □

Remarque : Ici, en utilisant, pour A irréductible, $\mathrm{d}_A|_{\Omega^0_\Sigma}$ et $\delta_A|_{\Omega^2_\Sigma}$ injectifs et $\mathrm{d}_A|_{\Omega^1_\Sigma}$ et $\delta_A|_{\Omega^1_\Sigma}$ surjectifs, je pourrais relier la dernière décomposition trouvée de $\mathfrak{G}_\Sigma$ et $\mathfrak{G}^*_\Sigma$ à la quadruple décomposition orthogonale de $\Omega^1_\Sigma = T_A\mathcal{A}_\Sigma$.

33.17 Métrique et forme symplectique vers $\mathcal{M}_\Sigma^*$ et $\mathcal{M}_\Sigma^O$:

Sur $\mathcal{A}_\Sigma$ on a une métrique riemannienne $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{g,\kappa}$ et une forme symplectique $\omega(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$. Pour faire descendre ces structures à $\mathcal{M}_\Sigma^*$ et $\mathcal{M}_\Sigma^O$, on doit les rendre horizontales.

Notation : Posons :

$$g_A(\,\cdot\,,\,\cdot\,) := (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{g,\kappa,A} := (h_A\,\cdot\,, h_A\,\cdot\,)_{g,\kappa} \in \Gamma^\infty(\odot^2 T^*\mathcal{A}_\Sigma)$$

$$\omega_A(\,\cdot\,,\,\cdot\,) := \omega|_A(h_A\,\cdot\,, h_A\,\cdot\,) \in \Gamma^\infty(\wedge^2 T^*\mathcal{A}_\Sigma)$$

Proposition : g_A et ω_A sont basiques.

Preuve : D'abord ces deux structures sont horizontales. Il faut alors montrer qu'elles sont $\mathcal{G}_\Sigma$ invariantes. Plus haut, dans la section sur les projections horizontales et verticales de la connexion de Coulomb, j'ai calculé que :

$$h_{\Psi_\Lambda(A)}(\Psi_\Lambda)_*|_A(\tau) = \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}} h_A\tau$$

On trouve alors directement, pour $\tau_1, \tau_2 \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$ et $\Lambda \in \mathcal{G}_\Sigma$, que :

$$\begin{aligned}
((\Psi_\Lambda^* g_A)(\tau_1,\tau_2) &= g_{\Psi_\Lambda(A)}((\Psi_\Lambda)_*\tau_1, (\Psi_\Lambda)_*\tau_2) \\
&= (h_{\Psi_\Lambda(A)}(\Psi_\Lambda)_*\tau_1, h_{\Psi_\Lambda(A)}(\Psi_\Lambda)_*\tau_2)_{g,\kappa} \\
&= (\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}} h_A\tau_1, \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}} h_A\tau_2)_{g,\kappa} \\
&= (h_A\tau_1, h_A\tau_2)_{g,\kappa} \\
&= g_A(\tau_1,\tau_2)
\end{aligned}$$

La preuve est la même pour ω_A :

$$\begin{aligned}
((\Psi_\Lambda^* \omega_A)(\tau_1,\tau_2) &= \omega_{\Psi_\Lambda(A)}((\Psi_\Lambda)_*\tau_1, (\Psi_\Lambda)_*\tau_2) \\
&= \omega(h_{\Psi_\Lambda(A)}(\Psi_\Lambda)_*\tau_1, h_{\Psi_\Lambda(A)}(\Psi_\Lambda)_*\tau_2) \\
&= \omega(\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}} h_A\tau_1, \mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}} h_A\tau_2) \\
&= \omega(h_A\tau_1, h_A\tau_2) \\
&= \omega_A(\tau_1,\tau_2)
\end{aligned}$$

□

Remarque : Les structures basiques g_A et ω_A descendent à $\mathcal{M}_\Sigma^* = \mathcal{A}_\Sigma^*/\mathcal{G}_\Sigma$. Ce sont ces deux dernières structures qui doivent être utilisées sur $\mathcal{M}_\Sigma^*$. En particulier, pour $\mathcal{O} \subset \mathfrak{G}_\Sigma^*$ une orbite coadjointe, la forme symplectique sur $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathcal{O}}$ est précisément ω_A. En effet :

Proposition : ω_A est la forme symplectique usuelle sur $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathcal{O}}$ correspondante à la réduction de Marsden-Weinstein.

Preuve : Dans la réduction de Marsden-Weinstein usuelle, la forme symplectique sur $N := \mu^{-1}(\mathcal{O})/G$ est celle ω_N définie par :

$$\omega_N|_{[x]}(v_1, v_2) = \omega|_x(v_1, v_2) - \langle \mu|_x, [\xi_1, \xi_2]\rangle$$

pour $v_1, v_2 \in T_x\mu^{-1}(\mathcal{O})$ où $\xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$ sont choisis de telle sorte que

$$\mathrm{ad}_{\xi_1}^*\mu|_x + (\mathrm{d}\mu)|_x(v_1) = 0 \quad \mathrm{ad}_{\xi_2}^*\mu|_x + (\mathrm{d}\mu)|_x(v_2) = 0$$

Dans le présent cas, ceci revient à dire que

$$\omega_N|_{[A]}(\tau_1, \tau_2) = \omega|_A(\tau_2, \tau_2) - \langle \mu|_A, [\upsilon_1, \upsilon_2]\rangle$$

pour $\tau_1, \tau_2 \in T_A\mu^{-1}(\mathcal{O})$ où $\upsilon_1, \upsilon_2 \in \mathfrak{G}_\Sigma$ sont choisis de telle sorte que

$$\mathrm{ad}_{\upsilon_1}^*\mu|_A + (\mathrm{d}\mu)|_A(\tau_1) = 0 \quad \mathrm{ad}_{\upsilon_2}^*\mu|_A + (\mathrm{d}\mu)|_A(\tau_2) = 0$$

C'est-à-dire,

$$[\upsilon_1, F_A] + \mathrm{d}_A\tau_1 = 0$$
$$[\upsilon_2, F_A] + \mathrm{d}_A\tau_2 = 0$$

C'est-à-dire,

$$\mathrm{d}_A\tau_1 = [F_A, \upsilon_1]$$
$$\mathrm{d}_A\tau_1 = [F_A, \upsilon_2]$$

C'est-à-dire,

$$\mathrm{d}_A\tau_1 = \mathrm{d}_A^2\upsilon_1$$
$$\mathrm{d}_A\tau_1 = \mathrm{d}_A^2\upsilon_1$$

Mais plus haut, j'ai identifié $T_{[A]}\mathcal{M}_\Sigma^{\mathcal{O}}$ à $\ker(\Delta_A|_{\Omega_\Sigma^1})$. C'est-à-dire, $\tau_1, \tau_2 \in \ker(\Delta_A|_{\Omega_\Sigma^1})$. C'est-à-dire, $\Delta_A\tau_1 = \Delta_A\tau_2 = 0$. Ainsi, $\mathrm{d}_A\tau_1 = \mathrm{d}_A\tau_2 = 0$. Ainsi, υ_1 et υ_2 peuvent être pris nuls. Le second terme de ω_N devient alors nul. Et comme τ_1 et τ_2 sont horizontaux, on a

$$\omega_A(\tau_1, \tau_2) = \omega(h_A\tau_1, h_A\tau_2) = \omega(\tau_1, \tau_2) = \omega_N(\tau_1, \tau_2)$$

$\square$

Remarque : L'égalité $\omega_A = \omega_N$ est simplement due au fait que j'utilise l'isomorphisme $T_{[A]}\mathcal{M}_\Sigma^{\mathcal{O}} = \ker(\Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma})$.

Remarque : ω_A n'est probablement pas fermée sur $\mathcal{M}_\Sigma^*$ (À CALCULER ! ! !). Néanmoins c'est forcément fermé sur chaque $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathcal{O}}$ car ω_A y est symplectique.

33.18 Dérivée extérieure de ω_A :

Proposition : Soient $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in T_{[A]}\mathcal{M}^*_\Sigma = \ker(\delta_A|_{\Omega^1_\Sigma})$. Alors :

$$\begin{array}{rcl}(\mathrm{d}\omega_A)(\tau_1,\tau_2,\tau_3) & = & -2([\tau_1 \wedge \star_g \tau_2], \Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_3)_{g,\kappa} \\ & & -2([\tau_2 \wedge \star_g \tau_3], \Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_1)_{g,\kappa} \\ & & -2([\tau_3 \wedge \star_g \tau_1], \Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2)_{g,\kappa}\end{array}$$

Preuve : Les vecteurs $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in T_{[A]}\mathcal{M}^*_\Sigma$ se relèvent à des vecteurs horizontaux en $T_A\mathcal{A}_\Sigma$, i.e. $\delta_A\tau_1 = \delta_A\tau_2 = \delta_A\tau_3 = 0$. Étendons ces vecteurs à des champs vectoriels constants sur $\mathcal{A}_\Sigma$. Ces champs vectoriels sont horizontaux en A mais pas forcément ailleurs. D'abord, en utilisant le fait que $\delta_A\tau_2 = 0$, on remarque que :

$$\begin{array}{rl} & \tau_1 h_A \tau_2 \\ = & \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} h_{A+\epsilon\tau_1}\tau_2 \\ = & \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} (\tau_2 - v_{A+\epsilon\tau_1}\tau_2) \\ = & -\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} v_{A+\epsilon\tau_1}\tau_2 \\ = & -\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \mathrm{d}_{A+\epsilon\tau_1}\Delta^{-1}_{A+\epsilon\tau_1}\delta_{A+\epsilon\tau_1}\tau_2 \\ = & -\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \left(\mathrm{d}_{A+\epsilon\tau_1}\Delta_A^{-1}\delta_A\tau_2 + \mathrm{d}_A\Delta^{-1}_{A+\epsilon\tau_1}\delta_A\tau_2 + \mathrm{d}_A\Delta_A^{-1}\delta_{A+\epsilon\tau_1}\tau_2\right) \\ = & -\mathrm{d}_A\Delta_A^{-1}\left(\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\delta_{A+\epsilon\tau_1}\tau_2\right) \\ = & \mathrm{d}_A\Delta_A^{-1}\star_g[\tau_1\wedge\star_g\tau_2]\end{array}$$

Ainsi :

$$\tau_1 h_A \tau_2 = \mathrm{d}_A\Delta_A^{-1}\star_g[\tau_1\wedge\star_g\tau_2] = -\mathrm{d}_A\Delta_A^{-1}\star_g[\tau_2\wedge\star_g\tau_1] = -\tau_2 h_A \tau_1$$

En particulier, en utilisant le fait que sur une k-forme on a $\star\delta_A = (-1)^k\mathrm{d}_A\star$, on trouve aussi

$$\tau_1 h_A \tau_2 = \mathrm{d}_A\Delta_A^{-1}\star_g[\tau_1\wedge\star_g\tau_2] = \mathrm{d}_A\star_g\Delta_A^{-1}[\tau_1\wedge\star_g\tau_2] = \star_g\delta_A\Delta_A^{-1}[\tau_1\wedge\star_g\tau_2]$$

Alors :

$$\begin{aligned}
& (\mathrm{d}\omega_A)(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\
= \; & \tau_1 \omega_A(\tau_2, \tau_3) + \tau_2 \omega_A(\tau_3, \tau_1) + \tau_3 \omega_A(\tau_1, \tau_2) \\
= \; & \tau_1 \omega(h_A \tau_2, h_A \tau_3) + \tau_2 \omega(h_A \tau_3, h_A \tau_1) + \tau_3 \omega(h_A \tau_1, h_A \tau_2) \\
= \; & \omega(\tau_1 h_A \tau_2, h_A \tau_3) + \omega(h_A \tau_2, \tau_1 h_A \tau_3) + \omega(\tau_2 h_A \tau_3, h_A \tau_1) \\
& + \omega(h_A \tau_3, \tau_2 h_A \tau_1) + \omega(\tau_3 h_A \tau_1, h_A \tau_2) + \omega(h_A \tau_1, \tau_3 h_A \tau_2) \\
= \; & \omega(\tau_1 h_A \tau_2, \tau_3) + \omega(\tau_2, \tau_1 h_A \tau_3) + \omega(\tau_2 h_A \tau_3, \tau_1) \\
& + \omega(\tau_3, \tau_2 h_A \tau_1) + \omega(\tau_3 h_A \tau_1, \tau_2) + \omega(\tau_1, \tau_3 h_A \tau_2) \\
= \; & \omega(\tau_1 h_A \tau_2, \tau_3) - \omega(\tau_1 h_A \tau_3, \tau_2) + \omega(\tau_2 h_A \tau_3, \tau_1) \\
& - \omega(\tau_2 h_A \tau_1, \tau_3) + \omega(\tau_3 h_A \tau_1, \tau_2) - \omega(\tau_3 h_A \tau_2, \tau_1) \\
= \; & \omega(\tau_1 h_A \tau_2 - \tau_2 h_A \tau_1, \tau_3) + \omega(\tau_2 h_A \tau_3 - \tau_3 h_A \tau_2, \tau_1) \\
& + \omega(\tau_3 h_A \tau_1 - \tau_1 h_A \tau_3, \tau_2) \\
= \; & 2\omega(\tau_1 h_A \tau_2, \tau_3) + 2\omega(\tau_2 h_A \tau_3, \tau_1) + 2\omega(\tau_3 h_A \tau_1, \tau_2) \\
= \; & 2\omega(\star_g \delta_A \Delta_A^{-1}[\tau_1 \wedge \star_g \tau_2], \tau_3) + 2\omega(\star_g \delta_A \Delta_A^{-1}[\tau_2 \wedge \star_g \tau_3], \tau_1) \\
& + 2\omega(\star_g \delta_A \Delta_A^{-1}[\tau_3 \wedge \star_g \tau_1], \tau_2) \\
= \; & -2(\delta_A \Delta_A^{-1}[\tau_1 \wedge \star_g \tau_2], \tau_3)_{g,\kappa} - 2(\delta_A \Delta_A^{-1}[\tau_2 \wedge \star_g \tau_3], \tau_1)_{g,\kappa} \\
& - 2(\delta_A \Delta_A^{-1}[\tau_3 \wedge \star_g \tau_1], \tau_2)_{g,\kappa} \\
= \; & -2(\Delta_A^{-1}[\tau_1 \wedge \star_g \tau_2], \mathrm{d}_A \tau_3)_{g,\kappa} - 2(\Delta_A^{-1}[\tau_2 \wedge \star_g \tau_3], \mathrm{d}_A \tau_1)_{g,\kappa} \\
& - 2(\Delta_A^{-1}[\tau_3 \wedge \star_g \tau_1], \mathrm{d}_A \tau_2)_{g,\kappa} \\
= \; & -2([\tau_1 \wedge \star_g \tau_2], \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A \tau_3)_{g,\kappa} - 2([\tau_2 \wedge \star_g \tau_3], \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A \tau_1)_{g,\kappa} \\
& - 2([\tau_3 \wedge \star_g \tau_1], \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A \tau_2)_{g,\kappa}
\end{aligned}$$

D'où l'égalité recherchée :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\omega_A)(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \;=\; & -2([\tau_1 \wedge \star_g \tau_2], \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A \tau_3)_{g,\kappa} \\
& -2([\tau_2 \wedge \star_g \tau_3], \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A \tau_1)_{g,\kappa} \\
& -2([\tau_3 \wedge \star_g \tau_1], \Delta_A^{-1} \mathrm{d}_A \tau_2)_{g,\kappa}
\end{aligned}$$

□

Question : Y a-t-il moyen de simplifier ça encore ?

Proposition : ω_A est une forme symplectique sur chaque $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathcal{O}}$.

Preuve : Il faut montrer que ω_A est fermée et non dégénérée. La fermeture de ω_A découle du fait que pour $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in T_{[A]}\mathcal{M}_\Sigma^{\mathcal{O}} = \ker(\Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma})$ on a $\mathrm{d}_A\tau_1 = \mathrm{d}_A\tau_2 = \mathrm{d}_A\tau_3 = 0$ et donc $(\mathrm{d}\omega_A)(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = 0$. La non dégénérescence découle du fait que $T_{[A]}\mathcal{M}_\Sigma^{\mathcal{O}} = \ker(\Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma})$ est symplectique car est J-invariant et J est ω-compatible. $\square$

Remarque : Ainsi, la différentielle $\mathrm{d}\omega_A$ ne mesure que la composante $\delta\left(\ker \delta_A^2|_{\Omega^2_\Sigma}\right)$ de $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \in T_{[A]}\mathcal{M}_\Sigma^* = \ker(\delta_A|_{\Omega^1_\Sigma}) = H_A$.

33.19 Flot de Yang-Mills (sur $\mathcal{M}^*_\Sigma$) :

Proposition : $\delta^2_{A,g} F_A = 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}_\Sigma$.

Preuve : (première preuve :) On sait que $\delta^2_{A,g} F_A = - \star_g [F_A \wedge \star_g F_A] = - \star_g [F_A, \star_g F_A]$. Puisque $\wedge^0 T^*\Sigma$ et $\wedge^2 T^*\Sigma$ ont fibres de dimension 1, il existe $\upsilon \in \Omega^0(\Sigma; \mathrm{Ad}P)$ tel que $F_A = \upsilon \otimes \Omega_g$. Ainsi, $\star_g F_A = \star_g(\upsilon \otimes \Omega_g) = \upsilon \otimes \star_g \Omega_g = \upsilon s_g = \upsilon$. Ainsi $[F_A, \star_g F_A] = [\upsilon \otimes \Omega_g, \star_g F_A] = [\upsilon \otimes \Omega_g, \upsilon] = [\upsilon, \upsilon] \otimes \Omega_g = 0$. □

Preuve : (seconde preuve) : On sait que $\delta^2_A = -[F_A \wedge \star_g F_A]$. Il suffit alors de montrer que $[F_A \wedge \star_g F_A] = 0$. D'abord, on peut permuter F_A et $\star_g F_A$ en $[\,\cdot \wedge \cdot\,]$, ce qui change le signe par l'identité $[\upsilon \wedge \eta] = -[\eta \wedge \upsilon]$ pour $\upsilon \in \Omega^0_\Sigma$, $\eta \in \Omega^2_\Sigma$. Ensuite, on peut envoyer le $\star_g$ de l'autre côté du wedge par l'identité $[\star_g \eta_1 \wedge \eta_2] = [\eta_1 \wedge \star_g \eta_2]$. C'est-à-dire :

$$[F_A \wedge \star_g F_A] = -[\star_g F_A \wedge F_A] = -[F_A \wedge \star_g F_A]$$

D'où $[F_A \wedge \star_g F_A] = 0$. □

Corollaire : $\nabla S_{\mathrm{YM}}|_A \in \delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right) < H_A$.

Preuve : $\delta_{A,g}\left(\nabla S_{\mathrm{YM}}|_A\right) = \delta^2_{A,g} F_A = 0$. □

Proposition : Le champ gradient de Yang-Mills ∇S_{YM} descend à un champ vectoriel sur $\mathcal{M}^*_\Sigma$.

Preuve : Il suffit de montrer que ∇S_{YM} est un champ vectoriel horizontal qui est $\mathcal{G}_\Sigma$-invariant. Par la dernière proposition, ∇S_{YM} est horizontal. La $\mathcal{G}_\Sigma$-invariance découle de celles de S_{YM} et de $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_{g,\kappa}$. □

Remarque : On sait que $T_{[A]}\mathcal{M}^*_\Sigma = \ker(\delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma}) = \left(\ker \Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma}\right) \oplus \left(\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)\right)$. On vient de voir que ∇S_{YM} repose dans la partie $\delta_{A,g}\left(\ker \delta^2_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}\right)$. Cette partie de $T_{[A]}\mathcal{M}^*_\Sigma$ est précisément $\ker \omega_A$ sur $\mathcal{M}^*_\Sigma$. Le champ vectoriel gradient de Yang-Mills repose donc dans le noyau de ω_A. En particulier, il est orthogonal aux feuilles $\mathcal{M}^{\mathcal{O}}_\Sigma$ de $\mathcal{M}^*_\Sigma$.

Proposition : Les seules connexions de Yang-Mills irréductibles sont plates.

Preuve : On sait que $\nabla S_{\mathrm{YM}}|_A = \delta_A F_A$. Mais $\delta_{A,g} : \Omega^2_\Sigma \to \Omega^1_\Sigma$ est injective pour A irréductible. □

Corollaire : Le champ gradient ∇S_{YM} n'est jamais nul sur $\mathcal{M}^*_\Sigma \backslash \mathcal{M}^{\mathrm{fl}}_\Sigma$.

Remarque : Ce dernier corollaire me semble être super utile pour faire couler les strip en $\mathcal{M}^*_\Sigma$ à des strip en $\mathcal{M}^{\mathrm{fl}}_\Sigma$.

33.20 Égalité utile :

Proposition : Soit $\tau \in \Omega^1_\Sigma$ quelconque. Alors :

$$\mathrm{d}_A[\tau \wedge \star F_A] = 0$$
$$\mathrm{d}_A[(\star\tau) \wedge \star F_A] = 0$$
$$\delta_A[\tau \wedge \star F_A] = 0$$
$$\delta_A[(\star\tau) \wedge \star F_A] = 0$$
$$\Delta_A[\tau \wedge \star F_A] = 0$$
$$\Delta_A[(\star\tau) \wedge \star F_A] = 0$$

Preuve : Montrons d'abord la première égalité. Souvenons-nous que $\delta_A^2\beta = (-1)^{nk+k+1}s_g \star_g [F_A \wedge (\star_g\beta)]$ pour tout $\beta \in \Omega^k_\Sigma$. Ici, $n = 2$ et $s_g = 1$. Ainsi, si β est en Ω^0_Σ ou Ω^1_Σ on a $\delta_A^2\beta = 0$ et si $\beta \in \Omega^2_\Sigma$, on a :

$$\delta_A^2\beta = -\star_g [F_A \wedge (\star_g\beta)]$$

Aussi, si $\beta \in \Omega^k_\Sigma$, on a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \delta_{A+\epsilon\tau}\beta = -\star_g [\tau \wedge \star_g\beta]$$

Souvenons-nous aussi que $\star\delta_A\beta = (-1)^k\mathrm{d}_A \star \beta$ pour $\beta \in \Omega^k_\Sigma$. Souvenons-nous aussi que $[\star\eta_1 \wedge \eta_2] = [\eta_1 \wedge \star\eta_2]$ pour $\eta_1, \eta_2 \in \Omega^2_\Sigma$. Donc, en utilisant l'égalité $\delta_A^2 F_A = 0$, on trouve :

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \delta_{A+\epsilon\tau}\delta_{A+\epsilon\tau}F_{A+\epsilon\tau} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} (\delta_{A+\epsilon\tau}\delta_A F_A + \delta_A\delta_{A+\epsilon\tau}F_A + \delta_A\delta_A F_{A+\epsilon\tau}) \\
&= -\star [\tau \wedge \star\delta_A F_A] - \delta_A \star [\tau \wedge \star F_A] + \delta_A^2 \mathrm{d}_A\tau \\
&= -\star [\tau \wedge \mathrm{d}_A \star F_A] + \star\mathrm{d}_A[\tau \wedge \star F_A] - \star[F_A \wedge \star\mathrm{d}_A\tau] \\
&= -\star [\tau \wedge \mathrm{d}_A \star F_A] + \star\mathrm{d}_A[\tau \wedge \star F_A] + \star[(\star\mathrm{d}_A\tau) \wedge F_A] \\
&= -\star [\tau \wedge \mathrm{d}_A \star F_A] + \star\mathrm{d}_A[\tau \wedge \star F_A] + \star[(\mathrm{d}_A\tau) \wedge \star F_A] \\
&= \star\left([(\mathrm{d}_A\tau) \wedge \star F_A] - [\tau \wedge \mathrm{d}_A \star F_A]\right) + \star\mathrm{d}_A[\tau \wedge \star F_A] \\
&= \star\mathrm{d}_A[\tau \wedge \star F_A] + \star\mathrm{d}_A[\tau \wedge \star F_A] \\
&= 2 \star \mathrm{d}_A[\tau \wedge \star F_A]
\end{aligned}$$

D'où la première égalité $\mathrm{d}_A[\tau \wedge \star F_A] = 0$. La seconde égalité est obtenue de la première en substituant τ par $\star\tau$. La troisième découle de la première égalité et du fait que $\star[\tau \wedge \star F_A] = [(\star\tau) \wedge \star F_A]$. La quatrième découle de la troisième en substituant τ par $\star\tau$. La cinquième égalité découle de la première et de la troisième égalité en utilisant $\Delta_A = \mathrm{d}_A\delta_A + \delta_A\mathrm{d}_A$. La sixième égalité découle de la cinquième en substituant τ par $\star\tau$. □

Remarque : Bien que je ne pense pas avoir fait d'erreur de calcul, il me semble que cette égalité est louche.

Corollaire : Soit $\tau \in \Omega^1_\Sigma$ quelconque. Alors :

$$[(\star\tau) \wedge (\delta_A F_A)] = -[(\mathrm{d}_A\tau) \wedge \star F_A]$$

$$[\tau \wedge (\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A \star \tau) \wedge \star F_A]$$
$$[(\star\tau) \wedge (\star\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A \star \tau) \wedge \star F_A]$$
$$[\tau \wedge (\star\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A\tau) \wedge \star F_A]$$

Preuve : D'abord, pour la première égalité, il suffit de développer l'égalité de la dernière proposition $\mathrm{d}_A[\tau \wedge \star F_A] = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}_A[\tau \wedge \star F_A] \\ &= [(\mathrm{d}_A\tau) \wedge \star F_A] - [\tau \wedge (\mathrm{d}_A \star F_A)] \\ &= [(\mathrm{d}_A\tau) \wedge \star F_A] - [(\star\tau) \wedge (\star\mathrm{d}_A \star F_A)] \\ &= [(\mathrm{d}_A\tau) \wedge \star F_A] + [(\star\tau) \wedge (\delta_A F_A)] \end{aligned}$$

D'où la première égalité :

$$[(\star\tau) \wedge (\delta_A F_A)] = -[(\mathrm{d}_A\tau) \wedge \star F_A]$$

Ensuite, pour la seconde égalité, en substituant τ par $\star\tau$ et en utilisant $\star^2|_{\Omega^1_\Sigma} = -1$, on a :

$$[\tau \wedge (\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A \star \tau) \wedge \star F_A]$$

Ensuite, pour la troisième égalité, souvenons-nous que pour tous $\tau_1, \tau_2 \in \Omega^1_\Sigma$ on a $[(\star\tau_1) \wedge (\star\tau_2)] = [\tau_1 \wedge \tau_2]$. En utilisant la seconde égalité, on trouve alors directement :

$$[(\star\tau) \wedge (\star\delta_A F_A)] = [\tau \wedge (\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A \star \tau) \wedge \star F_A]$$

Enfin, pour la dernière égalité, on utilise $\star^2|_{\Omega^1_\Sigma} = -1$ et $[(\star\tau_1)\wedge(\star\tau_2)] = [\tau_1\wedge\tau_2]$ et la première égalité :

$$[\tau \wedge (\star\delta_A F_A)] = -[(\star\star\tau)\wedge(\star\delta_A F_A)] = -[(\star\tau)\wedge(\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A\tau)\wedge\star F_A]$$

□

Corollaire : Pour $\tau \in \Omega^1_\Sigma$ et $A \in \mathcal{A}_\Sigma$, on a les quatre égalités suivantes :

$$[(\star\tau)\wedge(\delta_A F_A)] = -\star\,\delta_A^2\mathrm{d}_A\tau$$

$$[\tau\wedge(\delta_A F_A)] = \star\delta_A^2\mathrm{d}_A\star\tau$$

$$[(\star\tau)\wedge(\star\delta_A F_A)] = \star\delta_A^2\mathrm{d}_A\star\tau$$

$$[\tau\wedge(\star\delta_A F_A)] = \star\delta_A^2\mathrm{d}_A\tau$$

Preuve : Il suffit d'utiliser l'identité $\delta_A^2\eta = [(\star\eta)\wedge(\star F_A)]$ sur les quatre égalités du dernier corollaire :

$$[(\star\tau)\wedge(\delta_A F_A)] = -[(\mathrm{d}_A\tau)\wedge\star F_A] = -\star\,[(\star\mathrm{d}_A\tau)\wedge\star F_A] = -\star\,\delta_A^2\mathrm{d}_A\tau$$

$$[\tau\wedge(\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A\star\tau)\wedge\star F_A] = \star[(\star\mathrm{d}_A\star\tau)\wedge\star F_A] = \star\delta_A^2\mathrm{d}_A\star\tau$$

$$[(\star\tau)\wedge(\star\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A\star\tau)\wedge\star F_A] = \star[(\star\mathrm{d}_A\star\tau)\wedge\star F_A] = \star\delta_A^2\mathrm{d}_A\star\tau$$

$$[\tau\wedge(\star\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A\tau)\wedge\star F_A] = \star[(\star\mathrm{d}_A\tau)\wedge\star F_A] = \star\delta_A^2\mathrm{d}_A\tau$$

□

Remarque : En bref, on a :

$$[(\star\tau)\wedge(\delta_A F_A)] = -[(\mathrm{d}_A\tau)\wedge\star F_A] = -\star\,\delta_A^2\mathrm{d}_A\tau$$

$$[\tau\wedge(\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A\star\tau)\wedge\star F_A] = \star\delta_A^2\mathrm{d}_A\star\tau$$

$$[(\star\tau)\wedge(\star\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A\star\tau)\wedge\star F_A] = \star\delta_A^2\mathrm{d}_A\star\tau$$

$$[\tau\wedge(\star\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A\tau)\wedge\star F_A] = \star\delta_A^2\mathrm{d}_A\tau$$

Remarque : Enfin, on a $[\tau\wedge\star F_A] \in \ker(\Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma})$. Donc $[\tau\wedge\star F_A]$ est non seulement horizontal pour la connexion de Coulomb, mais peut être vu comme vecteur tangent à $\mathcal{M}^{\mathcal{O}}_\Sigma$.

33.21 Dérivée de Lie de l'application moment d'Atiyah-Bott par le flot de Yang-Mills :

Proposition : La dérivée de Lie de l'application moment d'Atiyah-Bott par le gradient de Yang-Mills est donnée en tout $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ par :

$$\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\mu = \Delta_A F_A$$

Preuve : Sachant que μ est une 0-forme à valeurs en $\mathfrak{G}_\Sigma^*$ telle que $\mu|_A = F_A$ vérifiant $(\mathrm{d}\mu)|_A = \mathrm{d}_A$, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\mu &= \iota_{\delta_A F_A}(\mathrm{d}\mu)|_A \\
&= (\mathrm{d}\mu)|_A(\delta_A F_A) \\
&= \mathrm{d}_A \delta_A F_A \\
&= \Delta_A F_A
\end{aligned}$$

□

33.22 Dérivée de Lie de ω_A par le flot de Yang-Mills :

Proposition : Pour tous $\tau_2, \tau_3 \in T_{[A]}\mathcal{M}_\Sigma^* = \ker(\delta_A|_{\Omega^1_\Sigma})$, la dérivée de Lie de ω_A sur $\mathcal{M}_\Sigma^*$ par le gradient de Yang-Mills $(\nabla S_{\mathrm{YM}})|_A = \delta_A F_A$ est donné en tout $[A] \in \mathcal{M}_\Sigma^*$ par :

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\omega_A\right)(\tau_2,\tau_3) &= -2([\delta_A F_A \wedge \star_g \tau_2], \Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_3)_{g,\kappa}\\ &\quad -2([\tau_2 \wedge \star_g \tau_3], F_A)_{g,\kappa}\\ &\quad -2([\tau_3 \wedge \star_g \delta_A F_A], \Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2)_{g,\kappa}\end{aligned}$$

Preuve : D'abord :

$$\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\omega_A = \iota_{\delta_A F_A}\mathrm{d}\omega_A + \mathrm{d}(\iota_{\delta_A F_A}\omega_A)$$

Mais on sait que $\delta_A F_A \in \delta_A\left(\ker \delta_A^2|_{\Omega^2_\Sigma}\right) = \ker(\omega_A)$. Donc $\iota_{\delta_A F_A}\omega_A = 0$. En particulier, $\mathrm{d}(\iota_{\delta_A F_A}\omega_A) = 0$. D'où :

$$\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\omega_A = \iota_{\delta_A F_A}\mathrm{d}\omega_A$$

Mais on a calculé $(\mathrm{d}\omega_A)(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ plus haut. En prenant $\tau_1 = \delta_A F_A$, on sait que :

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\omega_A)(\tau_1,\tau_2,\tau_3) &= -2([\delta_A F_A \wedge \star_g \tau_2], \Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_3)_{g,\kappa}\\ &\quad -2([\tau_2 \wedge \star_g \tau_3], \Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\delta_A F_A)_{g,\kappa}\\ &\quad -2([\tau_3 \wedge \star_g \delta_A F_A], \Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2)_{g,\kappa}\end{aligned}$$

En remarquant que $\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\delta_A = \Delta_A^{-1}\Delta_A = 1_{\Omega^2_\Sigma}$, on a donc :

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\omega_A\right)(\tau_2,\tau_3) &= \left(\iota_{\delta_A F_A}\mathrm{d}\omega_A\right)(\tau_2,\tau_3)\\ &= (\mathrm{d}\omega_A)(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\\ &= -2([\delta_A F_A \wedge \star_g \tau_2], \Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_3)_{g,\kappa}\\ &\quad -2([\tau_2 \wedge \star_g \tau_3], F_A)_{g,\kappa}\\ &\quad -2([\tau_3 \wedge \star_g \delta_A F_A], \Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2)_{g,\kappa}\end{aligned}$$

$\square$

Corollaire : Pour tous $\tau_1, \tau_2 \in T_{[A]}\mathcal{M}_\Sigma^{\mathcal{O}} = \ker(\Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma})$ on a :

$$\left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\omega_A\right)(\tau_1,\tau_2) = -2([\tau_1 \wedge \star_g \tau_2], F_A)_{g,\kappa}$$

Preuve : Pour $\tau_1, \tau_2 \in \ker(\Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma})$ on a $\mathrm{d}_A\tau_1 = \mathrm{d}_A\tau_2 = 0$. On utilise alors la dernière proposition. □

Corollaire : Pour tous $\tau_1, \tau_2 \in T_{[A]}\mathcal{M}^{\mathcal{O}}_\Sigma = \ker(\Delta_A|_{\Omega^1_\Sigma})$ on a :

$$\langle \mu|_A, \Delta_{A,g}\Omega_\alpha|_A(\tau_1,\tau_2)\rangle = \left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\omega_A\right)(\tau_1,\tau_2)$$

Remarque : Je ne sais pas trop à quoi peut servir cette formule, mais c'est joli. Ça relie :

- l'application moment d'Atiyah-Bott $\mu|_A = F_A$,
- la courbure Ω_α de la connexion de Coulomb α,
- la dérivée de Lie de la 2-forme ω_A sur l'espace de module $\mathcal{M}^*_\Sigma$ par le gradient de Yang-Mills $\nabla S_{\mathrm{YM}}|_A = \delta_A F_A$,
- les vecteurs tangents $\tau_1, \tau_2 \in T_{[A]}\mathcal{M}^{\mathcal{O}}_\Sigma$ d'une réduction de Marsden-Weinstein $\mathcal{M}^{\mathcal{O}}_\Sigma$ d'orbite coadjointe $\mathcal{O} \subset \mathfrak{G}^*_\Sigma$ dans le dual de l'algèbre de Lie du groupe de jauge $\mathcal{G}_\Sigma$.

Proposition : Pour tous $\tau_1, \tau_2 \in T_{[A]}\mathcal{M}^*_\Sigma = \ker(\delta_A|_{\Omega^1_\Sigma})$, la dérivée de Lie de ω_A sur $\mathcal{M}^*_\Sigma$ par le gradient de Yang-Mills $(\nabla S_{\mathrm{YM}})|_A = \delta_A F_A$ est donné en tout $[A] \in \mathcal{M}^*_\Sigma$ par :

$$\begin{aligned}&\left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\omega_A\right)(\tau_1,\tau_2)\\ = \;& 2([(\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge(\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2)] + [(\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge(\mathrm{d}_A\tau_2)] - [\tau_1\wedge\star_g\tau_2], F_A)_{g,\kappa}\end{aligned}$$

Preuve : Souvenons-nous que pour tout $\tau \in \Omega^1_\Sigma$, on a les deux égalités utiles suivantes :

$$[(\star\tau)\wedge(\delta_A F_A)] = -[(\mathrm{d}_A\tau)\wedge\star F_A]$$
$$[\tau\wedge(\star\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A\tau)\wedge\star F_A]$$

On calcule alors directement :

$$\begin{aligned}&\left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\omega_A\right)(\tau_1,\tau_2)\\ =\;& -2([\delta_A F_A\wedge\star_g\tau_1], \Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2)_{g,\kappa}\\ & -2([\tau_1\wedge\star_g\tau_2], F_A)_{g,\kappa}\\ & -2([\tau_2\wedge\star_g\delta_A F_A], \Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_1)_{g,\kappa}\\ =\;& 2([(\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge\star_g F_A], \Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2)_{g,\kappa}\\ & -2([\tau_1\wedge\star_g\tau_2], F_A)_{g,\kappa}\\ & -2([(\mathrm{d}_A\tau_2)\wedge\star_g F_A], \Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_1)_{g,\kappa}\end{aligned}$$

où d'abord :

$$\begin{aligned}
& 2([(\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge\star_g F_A],\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2)_{g,\kappa} \\
= \;& 2\omega([(\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge\star_g F_A],\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2) \\
= \;& -2\omega(\star\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2,[(\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge\star_g F_A]) \\
= \;& -2\int_\Sigma(\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2)\wedge^\kappa[(\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge\star_g F_A] \\
= \;& -2\int_\Sigma[(\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2)\wedge(\mathrm{d}_A\tau_1)]\wedge^\kappa\star_g F_A \\
= \;& -2([(\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2)\wedge(\mathrm{d}_A\tau_1)],F_A)_{g,\kappa} \\
= \;& 2([(\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge(\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2)],F_A)_{g,\kappa}
\end{aligned}$$

et où ensuite :

$$\begin{aligned}
& -2([(\mathrm{d}_A\tau_2)\wedge\star_g F_A],\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_1)_{g,\kappa} \\
= \;& -2\omega([(\mathrm{d}_A\tau_2)\wedge\star_g F_A],\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_1) \\
= \;& 2\omega(\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_1,[(\mathrm{d}_A\tau_2)\wedge\star_g F_A]) \\
= \;& 2\int_\Sigma(\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge^\kappa[(\mathrm{d}_A\tau_2)\wedge\star_g F_A] \\
= \;& 2\int_\Sigma[(\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge(\mathrm{d}_A\tau_2)]\wedge^\kappa\star_g F_A \\
= \;& 2([(\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge(\mathrm{d}_A\tau_2)],F_A)_{g,\kappa}
\end{aligned}$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\omega_A\right)(\tau_1,\tau_2) \\
= \;& 2([(\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge\star_g F_A],\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2)_{g,\kappa} \\
& -2([\tau_1\wedge\star_g\tau_2],F_A)_{g,\kappa} \\
& -2([(\mathrm{d}_A\tau_2)\wedge\star_g F_A],\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_1)_{g,\kappa} \\
= \;& 2([(\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge(\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2)],F_A)_{g,\kappa} \\
& -2([\tau_1\wedge\star_g\tau_2],F_A)_{g,\kappa} \\
& +2([(\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge(\mathrm{d}_A\tau_2)],F_A)_{g,\kappa} \\
= \;& 2([(\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge(\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_2)]+[(\star_g\Delta_A^{-1}\mathrm{d}_A\tau_1)\wedge(\mathrm{d}_A\tau_2)]-[\tau_1\wedge\star_g\tau_2],F_A)_{g,\kappa}
\end{aligned}$$

□

Question : Peut-on encore simplifier ça ?

33.23 Dérivée de Lie de ω par le flot de Yang-Mills :

Proposition : La dérivée de Lie de ω sur $\mathcal{A}_\Sigma$ par le gradient de Yang-Mills est donnée, en tout $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ et tous $\tau_1, \tau_2 \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$ par :

$$\left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\omega\right)(\tau_1,\tau_2) = 2([\tau_1 \wedge \star\tau_2], F_A)_{g,\kappa} - 2(\tau_1, \star\delta_A \mathrm{d}_A \tau_2)_{g,\kappa}$$

Preuve : D'abord, $\mathrm{d}\omega = 0$. Ainsi :

$$\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\omega = \mathrm{d}(\iota_{\delta_A F_A}\omega) + \iota_{\delta_A F_A}\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\iota_{\delta_A F_A}\omega)$$

Soient $\tau_1, \tau_2 \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$ qu'on étend à des champs vectoriels constants. Alors :

$$\begin{array}{rl}
& \left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\omega\right)(\tau_1,\tau_2) \\
= & (\mathrm{d}(\iota_{\delta_A F_A}\omega))(\tau_1,\tau_2) \\
= & \tau_1\omega(\delta_A F_A, \tau_2) - \tau_2\omega(\delta_A F_A, \tau_1) \\
= & \omega((\tau_1\delta_A)F_A, \tau_2) + \omega(\delta_A(\tau_1 F_A), \tau_2) - \omega((\tau_2\delta_A)F_A, \tau_1) - \omega(\delta_A(\tau_2 F_A), \tau_1) \\
= & \omega(-\star[\tau_1 \wedge \star F_A], \tau_2) + \omega(\delta_A \mathrm{d}_A \tau_1, \tau_2) \\
& -\omega(-\star[\tau_2 \wedge \star F_A], \tau_1) - \omega(\delta_A \mathrm{d}_A \tau_2, \tau_1) \\
= & \omega([\tau_1 \wedge \star F_A], \star\tau_2) + (\star\delta_A \mathrm{d}_A \tau_1, \tau_2)_{g,\kappa} \\
& -\omega([\tau_2 \wedge \star F_A], \star\tau_1) - (\star\delta_A \mathrm{d}_A \tau_2, \tau_1)_{g,\kappa} \\
= & -\omega([\star F_A \wedge \tau_1], \star\tau_2) + (\star\delta_A \mathrm{d}_A \tau_1, \tau_2)_{g,\kappa} \\
& +\omega([\star F_A \wedge \tau_2], \star\tau_1) - (\tau_1, \star\delta_A \mathrm{d}_A \tau_2)_{g,\kappa} \\
= & -\omega(\star F_A, [\tau_1 \wedge \star\tau_2]) - (\delta_A \mathrm{d}_A \tau_1, \star\tau_2)_{g,\kappa} \\
& +\omega(\star F_A, [\tau_2 \wedge \star\tau_1]) - (\tau_1, \star\delta_A \mathrm{d}_A \tau_2)_{g,\kappa} \\
= & (F_A, [\tau_1 \wedge \star\tau_2])_{g,\kappa} - (\tau_1, \delta_A \mathrm{d}_A \star \tau_2)_{g,\kappa} \\
& -(F_A, [\tau_2 \wedge \star\tau_1])_{g,\kappa} - (\tau_1, \star\delta_A \mathrm{d}_A \tau_2)_{g,\kappa} \\
= & 2(F_A, [\tau_1 \wedge \star\tau_2])_{g,\kappa} - 2(\tau_1, \star\delta_A \mathrm{d}_A \tau_2)_{g,\kappa} \\
= & 2([\tau_1 \wedge \star\tau_2], F_A)_{g,\kappa} - 2(\tau_1, \star\delta_A \mathrm{d}_A \tau_2)_{g,\kappa}
\end{array}$$

□

Corollaire : Si $\tau_1, \tau_2 \in \ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma})$ sont horizontaux, on a :

$$\left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\omega\right)(\tau_1,\tau_2) = 2([\tau_1 \wedge \star\tau_2], F_A)_{g,\kappa}$$

Preuve : Si $\tau_1, \tau_2 \in \ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma})$, alors $\mathrm{d}_A \tau_2 = 0$. □

Remarque : Je trouve un signe opposé à ce que j'avais trouvé pour ω_A :

$$\left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A} \omega_A\right)(\tau_1, \tau_2) = -2([\tau_1 \wedge \star_g \tau_2], F_A)_{g,\kappa}$$

À revérifier. Pourtant j'ai revérifié et ne trouve pas d'erreur de signe.

33.24 Dérivée de Lie de la connexion de Coulomb par le flot de Yang-Mills :

Proposition : La dérivée de Lie de la connexion de Coulomb α par le gradient de Yang-Mills est donnée en tout $A \in \mathcal{A}_\Sigma^*$ et tout vecteur horizontal $\tau \in H_A = \ker \delta_A$ par :

$$\left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\alpha\right)|_A(\tau) = 2 \star_g \Delta_{A,g}^{-1}[(\mathrm{d}_A\tau) \wedge \star_g F_A]$$

Preuve : Souvenons-nous que :

$$\Omega_\alpha|_A(\tau_1, \tau_2) = -2 \star_g \Delta_{A,g}^{-1}[\tau_1 \wedge \star_g \tau_2]$$

En utilisant le fait que $\delta_A^2 F_A = 0$ et l'égalité $[(\star\tau) \wedge (\delta_A F_A)] = -[(\mathrm{d}_A\tau) \wedge \star F_A]$ de la dernière section, on calcule directement :

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\alpha\right)|_A(\tau) &= (\mathrm{d}\iota_{\delta_A F_A}\alpha)|_A(\tau) + (\iota_{\delta_A F_A}\mathrm{d}\alpha)|_A(\tau) \\
&= \tau(\iota_{\delta_A F_A}\alpha)|_A + (\mathrm{d}\alpha)|_A(\delta_A F_A, \tau) \\
&= \tau(\Delta_A^{-1}\delta_A^2 F_A)|_A + \Omega_\alpha|_A(\delta_A F_A, \tau) \\
&= -2 \star_g \Delta_{A,g}^{-1}[\delta_A F_A \wedge \star_g \tau] \\
&= -2 \star_g \Delta_{A,g}^{-1}[\star_g \tau \wedge \delta_A F_A] \\
&= 2 \star_g \Delta_{A,g}^{-1}[(\mathrm{d}_A\tau) \wedge \star_g F_A]
\end{aligned}$$

□

Corollaire : Si $\tau \in \ker \Delta_{A,g}$, alors :

$$\left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\alpha\right)|_A(\tau) = 0$$

Preuve : Il suffit de mettre $\mathrm{d}_A\tau = 0$ en

$$\left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\alpha\right)|_A(\tau) = 2 \star_g \Delta_{A,g}^{-1}[(\mathrm{d}_A\tau) \wedge \star_g F_A]$$

□

33.25 Dérivée de Lie de τ par le flot de Yang-Mills :

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}_\Sigma$. Soit $\tau \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$ qu'on étend à un champ vectoriel constant sur $\mathcal{A}_\Sigma$. Alors la dérivée de Lie de $\delta_A F_A$ par τ est donnée par :

$$\mathcal{L}_\tau(\delta_A F_A) = - \star [\tau \wedge \star F_A] + \delta_A \mathrm{d}_A \tau$$

Preuve : Souvenons-nous que $\mathcal{L}_X Y = [X, Y] = XY - YX$. Ici, τ est constant. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_\tau(\delta_A F_A) & = & \tau(\delta_A F_A) - (\delta_A F_A)(\tau) \\ & = & \tau(\delta_A F_A) \\ & = & \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \delta_{A+\epsilon\tau} F_{A+\epsilon\tau} \\ & = & \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \delta_{A+\epsilon\tau} F_A + \delta_A F_{A+\epsilon\tau} \\ & = & - \star [\tau \wedge \star F_A] + \delta_A \mathrm{d}_A \tau \end{array}$$

□

Corollaire : Soit $A \in \mathcal{A}_\Sigma$. Soit $\tau \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$ qu'on étend à un champ vectoriel constant sur $\mathcal{A}_\Sigma$. Alors la dérivée de Lie de τ par $\delta_A F_A$ est donnée par :

$$\mathcal{L}_{\delta_A F_A}(\tau) = \star[\tau \wedge \star F_A] - \delta_A \mathrm{d}_A \tau$$

Preuve : Par la dernière proposition :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_{\delta_A F_A}(\tau) & = & (\delta_A F_A)(\tau) - (\tau)(\delta_A F_A) \\ & = & -((\tau)(\delta_A F_A) - (\delta_A F_A)(\tau)) \\ & = & -\mathcal{L}_\tau(\delta_A F_A) \\ & = & \star[\tau \wedge \star F_A] - \delta_A \mathrm{d}_A \tau \end{array}$$

□

33.26 Dérivée extérieure du laplacien $\Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma}$:

Proposition : La dérivée extérieure du laplacien $\Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma} \in \Omega^1(\mathcal{A}_\Sigma;\Omega^1_\Sigma)$ est donnée sur tout $\tau_1,\tau_2 \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$ par :

$$(\mathrm{d}\Delta_A)(\tau_1,\tau_2) = \ldots$$

Preuve : Soient $\tau_1,\tau_2 \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$. On étend τ_1,τ_2 à des champs vectoriels constants sur $\mathcal{A}_\Sigma$. Souvenons-nous que pour $s_g = 1$ et $n = 2$ et $k = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \Delta_{A+\epsilon\tau_1}\tau_2 &= [\tau_1 \wedge (\delta_A\tau_2)] - \mathrm{d}_A \star_g [\tau_1 \wedge (\star_g\tau_2)] \\
&\quad - \star_g [\tau_1 \wedge (\star_g\mathrm{d}_A\tau_2)] + \delta_A[\tau_1 \wedge \tau_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \Delta_{A+\epsilon\tau_2}\tau_1 &= [\tau_2 \wedge (\delta_A\tau_1)] - \mathrm{d}_A \star_g [\tau_2 \wedge (\star_g\tau_1)] \\
&\quad - \star_g [\tau_2 \wedge (\star_g\mathrm{d}_A\tau_1)] + \delta_A[\tau_2 \wedge \tau_1]
\end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\Delta_A)(\tau_1,\tau_2) &= \tau_1(\Delta_A\tau_2) - \tau_2(\Delta_A\tau_1) - \Delta_A([\tau_1,\tau_2]) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \Delta_{A+\epsilon\tau_1}\tau_2 - \Delta_{A+\epsilon\tau_2}\tau_1 \\
&= [\tau_1 \wedge (\delta_A\tau_2)] - \mathrm{d}_A \star_g [\tau_1 \wedge (\star_g\tau_2)] \\
&\quad - \star_g [\tau_1 \wedge (\star_g\mathrm{d}_A\tau_2)] + \delta_A[\tau_1 \wedge \tau_2] \\
&\quad -[\tau_2 \wedge (\delta_A\tau_1)] + \mathrm{d}_A \star_g [\tau_2 \wedge (\star_g\tau_1)] \\
&\quad + \star_g [\tau_2 \wedge (\star_g\mathrm{d}_A\tau_1)] - \delta_A[\tau_2 \wedge \tau_1] \\
&= [\tau_1 \wedge (\delta_A\tau_2)] - \mathrm{d}_A \star_g [\tau_1 \wedge (\star_g\tau_2)] \\
&\quad - \star_g [\tau_1 \wedge (\star_g\mathrm{d}_A\tau_2)] + \delta_A[\tau_1 \wedge \tau_2] \\
&\quad +[(\delta_A\tau_1) \wedge \tau_2] + \mathrm{d}_A \star_g [(\star_g\tau_1) \wedge \tau_2] \\
&\quad - \star_g [(\star_g\mathrm{d}_A\tau_1) \wedge \tau_2] - \delta_A[\tau_1 \wedge \tau_2] \\
&= [(\delta_A\tau_1) \wedge \tau_2] + [\tau_1 \wedge (\delta_A\tau_2)] \\
&\quad - \star_g [(\star_g\mathrm{d}_A\tau_1) \wedge \tau_2] - \star_g[\tau_1 \wedge (\star_g\mathrm{d}_A\tau_2)] \\
&\quad +\mathrm{d}_A \star_g [(\star_g\tau_1) \wedge \tau_2] - \mathrm{d}_A \star_g [\tau_1 \wedge (\star_g\tau_2)] \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

À TERMINER ! ! ! □

33.27 Dérivée de Lie du laplacien par le flot de Yang-Mills :

Proposition : La dérivée de Lie de $\Delta_A \in \Omega^1(\mathcal{A}_\Sigma;\Omega^1_\Sigma)$ par le gradient de Yang-Mills est donnée en tout $A \in \mathcal{A}_\Sigma$ et tout $\tau \in T_A\mathcal{A}_\Sigma$ par :

$$\left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\Delta_A\right)(\tau) = \ldots$$

Preuve : (preuve 1 :) Étendons τ à un champ vectoriel constant sur $\mathcal{A}_\Sigma$. Souvenons-nous que :

$$\mathrm{d}_A[\tau \wedge \star F_A] = 0$$
$$\mathrm{d}_A[(\star\tau) \wedge \star F_A] = 0$$
$$\Delta_A[\tau \wedge \star F_A] = 0$$
$$\Delta_A[(\star\tau) \wedge \star F_A] = 0$$
$$\delta_A^2\eta = \star[\eta \wedge \star F_A] = [(\star\eta) \wedge (\star F_A)]$$
$$[(\star\tau) \wedge (\delta_A F_A)] = -[(\mathrm{d}_A\tau) \wedge \star F_A] = -\star\delta_A^2\mathrm{d}_A\tau$$
$$[\tau \wedge (\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A \star \tau) \wedge \star F_A] = \star\delta_A^2\mathrm{d}_A \star \tau$$
$$[(\star\tau) \wedge (\star\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A \star \tau) \wedge \star F_A] = \star\delta_A^2\mathrm{d}_A \star \tau$$
$$[\tau \wedge (\star\delta_A F_A)] = [(\mathrm{d}_A\tau) \wedge \star F_A] = \star\delta_A^2\mathrm{d}_A\tau$$

et que pour $n = 2$ on a :

$$\star\delta_A = (-1)^k\mathrm{d}_A\star$$
$$\delta_A\star = (-1)^{k+1}\star\mathrm{d}_A$$

et que :

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\beta)(X,Y) &= X(\beta(Y)) - Y(\beta(X)) - \beta([X,Y])\\ &= X(\beta(Y)) - Y(\beta(X)) - \beta(\mathcal{L}_X Y)\\ &= X(\beta(Y)) - Y(\beta(X)) + \beta(\mathcal{L}_Y X)\end{aligned}$$

On a deux manières de calculer une dérivée de Lie de forme différentielle β :

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\beta)(Y) &= (\iota_X\mathrm{d}\beta + \mathrm{d}\iota_X\beta)(Y)\\ &= (\mathrm{d}\alpha)(X,Y) + Y(\alpha(X))\\ &= X(\beta(Y)) - Y(\beta(X)) - \beta([X,Y]) + Y(\beta(X))\\ &= X(\beta(Y)) - \beta([X,Y])\\ &= X(\alpha(Y)) + \beta([Y,X])\\ &= X(\beta(Y)) + \beta(\mathcal{L}_Y X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X\beta)(Y) &= \mathcal{L}_X(\beta(Y)) - \beta(\mathcal{L}_X(Y)) \\
&= X(\beta(Y)) - \beta([X,Y]) \\
&= X(\beta(Y)) + \beta([Y,X]) \\
&= X(\beta(Y)) + \beta(\mathcal{L}_Y X)
\end{aligned}$$

Souvenons-nous que si $\eta \in \Omega^2_\Sigma$, on a :

$$\delta_A^2\eta = -\star[F_A \wedge \star\eta] = \star[(\star\eta)\wedge F_A] = \star[\eta \wedge \star F_A]$$

En prenant $X = \delta_A F_A$, $Y = \tau$, $\beta = \Delta_A$, on calcule alors directement ce qu'on cherche :

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A}\Delta_A\right)(\tau) \\
= \; & (\delta_A F_A)(\Delta_A\tau) + \Delta_A(\mathcal{L}_\tau(\delta_A F_A)) \\
= \; & \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \Delta_{A+\epsilon\delta_A F_A}(\tau) + \Delta_A(\mathcal{L}_\tau(\delta_A F_A)) \\
= \; & [(\delta_A F_A)\wedge(\delta_A\tau)] - \mathrm{d}_A\star[(\delta_A F_A)\wedge(\star\tau)] \\
& -\star[(\delta_A F_A)\wedge(\star\mathrm{d}_A\tau)] + \delta_A[(\delta_A F_A)\wedge\tau] \\
& +\Delta_A(-\star[\tau\wedge\star F_A] + \delta_A\mathrm{d}_A\tau) \\
= \; & [(\delta_A F_A)\wedge(\delta_A\tau)] - \mathrm{d}_A\star[(\star\tau)\wedge(\delta_A F_A)] \\
& -\star[(\delta_A F_A)\wedge(\star\mathrm{d}_A\tau)] + \delta_A[\tau\wedge(\delta_A F_A)] \\
& -\Delta_A\star[\tau\wedge\star F_A] + \Delta_A\delta_A\mathrm{d}_A\tau \\
= \; & -[(\delta_A\tau)\wedge(\delta_A F_A)] + \mathrm{d}_A\star[(\mathrm{d}_A\tau)\wedge\star F_A] \\
& +\star[(\star\mathrm{d}_A\tau)\wedge(\delta_A F_A)] + \delta_A[(\mathrm{d}_A\star\tau)\wedge\star F_A] \\
& -\star\Delta_A[\tau\wedge\star F_A] + \Delta_A\delta_A\mathrm{d}_A\tau \\
= \; & -[(\delta_A\tau)\wedge(\delta_A F_A)] + \mathrm{d}_A\delta_A^2\mathrm{d}_A\tau \\
& +\star[(\star\mathrm{d}_A\tau)\wedge(\delta_A F_A)] + \delta_A\star\delta_A^2\mathrm{d}_A\star\tau \\
& +\Delta_A\delta_A\mathrm{d}_A\tau
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
\delta_A\star\delta_A^2\mathrm{d}_A\star\tau &= \delta_A\star\delta_A\delta_A\mathrm{d}_A\star(\tau) \\
&= -\delta_A\star\delta_A\delta_A\star(\delta_A\tau) \\
&= \delta_A\star\delta_A\star(\mathrm{d}_A\delta_A\tau) \\
&= \delta_A\star\star(\mathrm{d}_A\mathrm{d}_A\delta_A\tau) \\
&= \delta_A\mathrm{d}_A^2\delta_A\tau
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A} \Delta_A\right)(\tau) \\
= \;& -[(\delta_A \tau) \wedge (\delta_A F_A)] + \mathrm{d}_A \delta_A^2 \mathrm{d}_A \tau \\
& + \star\left[(\star \mathrm{d}_A \tau) \wedge (\delta_A F_A)\right] + \delta_A \star \delta_A^2 \mathrm{d}_A \star \tau \\
& + \Delta_A \delta_A \mathrm{d}_A \tau \\
= \;& -[(\delta_A \tau) \wedge (\delta_A F_A)] + \mathrm{d}_A \delta_A^2 \mathrm{d}_A \tau \\
& + \star\left[(\star \mathrm{d}_A \tau) \wedge (\delta_A F_A)\right] + \delta_A \mathrm{d}_A^2 \delta_A \tau \\
& + \Delta_A \delta_A \mathrm{d}_A \tau
\end{aligned}$$

À TERMINER ! ! ! □

Remarque : J'aimerais annuler plus de termes dans cette dernière égalité, mais je n'y arrive pas. Voir feuilles du 2018-02-27 au 2018-03-01.

Corollaire : Si $\tau \in \ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma})$, alors :

$$\left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A} \Delta_A\right)(\tau) = 0$$

Preuve : Si $\tau \in \ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma})$, alors $\mathrm{d}_A \tau = 0$ et $\delta_{A,g} \tau = 0$. D'où :

$$\left(\mathcal{L}_{\delta_A F_A} \Delta_A\right)(\tau) = -0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

□

Corollaire : La distribution $\ker(\Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma})$ est laissée invariante par le flot de Yang-Mills.

Corollaire : Le feuilletage de $\mathcal{M}^*_\Sigma$ en feuilles $\mathcal{M}^{\mathcal{O}}_\Sigma$ est laissé invariant par le flot de Yang-Mills.

Remarque : Ce dernier corollaire est exactement ce que je voulais avoir. Ceci dit, je dois revérifier mes calculs. En effet, plus haut j'avais montré que la dérivée de Lie de ω_A par ∇S_{YM} ne semblait pas nulle restreinte aux feuilles $\mathcal{M}^{\mathcal{O}}_\Sigma$. Bref, revérifier tout ça.

33.28 Lagrangienne naturelle en $\mathcal{A}_\Sigma$ et $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}}$:

Remarque : La surface Σ borde naturellement un corps à anses Y_0. Ceci induit naturellement une lagrangienne $\mathcal{L}_0$ en $\mathcal{A}_\Sigma$ et une L_0 en $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}}$.

Rappel : $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}} := \mathcal{A}_\Sigma^{\text{fl}}/\mathcal{G}_\Sigma$ est équivalent à $R(\Sigma) := \text{Hom}(\pi_1, \text{SU}(2))/SU(2)$ où :

$$\pi_1 := \pi_1(\Sigma) = \langle a_1, b_1, ..., a_g, b_g | \; [a_1, b_1] \cdot ... \cdot [a_g, b_g] = 1\rangle$$

où g est le genre de Σ. De la même manière,

$$\text{Hom}(\pi_1, \text{SU}(2)) = \langle A_1, B_1, ..., A_g, B_g \in \text{SU}(2) | [A_1, B_1] \cdot ... \cdot [A_g, B_g] = 1\rangle$$

On a $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}} = R(\Sigma) = \text{Hom}(\pi_1, \text{SU}(2))/\text{SU}(2)$ où l'action de $\text{SU}(2)$ sur $\text{Hom}(\pi_1, \text{SU}(2))$ est donnée pour tout $g \in G$ (ne pas confondre $g \in G$ et g le genre de Σ) par :

$$\begin{aligned} g \cdot (A_1, B_1, ..., A_g, B_g) &= (\iota_g A_1, \iota_g B_1, ..., \iota_g A_g, \iota_g B_g) \\ &= (gA_1g^{-1}, gB_1g^{-1}, ..., gA_gg^{-1}, gB_gg^{-1}) \end{aligned}$$

Les points de $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}}$ peuvent donc être vus à la fois comme classes d'équivalences de connexions $[A]$ ou comme classes d'équivalences de $2g$-tuples $[A_1, B_1, ..., A_g, B_g]$ d'éléments de $\text{SU}(2)$. Le corps à anses Y_0 a pour sa part le groupe fondamental

$$\pi_1(Y_0) = \langle b_1, b_2, ..., b_g\rangle$$

Définition : L'ensemble $L_0 \subset \mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}} = R(\Sigma)$ est par définition :

$$\begin{aligned} L_0 &:= \{[A_1, 0, A_2, 0, ..., A_g, 0] | A_1, ..., A_g \in \text{SU}(2)\} \\ &= \{[A_1, B_1, ..., A_g, B_g] \in R(\Sigma) | B_1, ..., B_g = 0\} \end{aligned}$$

Remarque : L'ensemble L_0 peut être vu comme étant l'ensemble des classes de jauges de connexions plates qui s'étendent à une classe de jauge de connexions plates sur Y_0.

Définition : $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{A}_\Sigma^{\text{fl}} \subset \mathcal{A}_\Sigma$ est par définition la préimage

$$\mathcal{L}_0 := \pi^{-1}(L_0)$$

de $L_0 \subset \mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}} \subset \mathcal{M}_\Sigma$ par la projection $\pi : \mathcal{A}_\Sigma \to \mathcal{M}_\Sigma = \mathcal{A}_\Sigma/\mathcal{G}_\Sigma$.

Remarque : $\mathcal{L}_0$ peut être vu comme étant l'ensemble des connexions plates qui, à transformation de jauge près, s'étendent à une connexion plate sur Y_0.

Proposition : $\mathcal{L}_0$ est un sous-ensemble $\mathcal{G}_\Sigma$-invariant de $\mathcal{A}_\Sigma$.

Preuve : $\mathcal{L}_0$ est défini par la préimage de L_0 par π. □

Proposition : L_0 est lagrangien en $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}}$.

Preuve : ... ... TO DO ! ! ! ... ... preuve par la dimension ? ou encore par hamiltoniens qui commutent ? pour ça j'ai besoin de regarder le crochet de Poisson de fonctions sur $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}}$. ... □

Proposition : $\mathcal{L}_0$ est lagrangien en $\mathcal{A}_\Sigma$.

Preuve : Soit $A \in \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{A}_\Sigma^{\text{fl}} \subset \mathcal{A}_\Sigma$. On sait que $T_A\mathcal{A}_\Sigma$ admet une décomposition en somme directe orthogonale de sous-espaces symplectiques :

$$T_A\mathcal{A}_\Sigma = \left(\ker \Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma}\right) \oplus \left(\operatorname{im}(\delta_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}) \oplus \operatorname{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^0_\Sigma})\right)$$

On sait aussi que

$$T_A\mathcal{L}_0 = (T_AL_0) \oplus (\operatorname{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^0_\Sigma}))$$

Puisque T_AL_0 est lagrangien en $T_{[A]}\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}} = \ker \Delta_{A,g}|_{\Omega^1_\Sigma}$ et puisque $\operatorname{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^0_\Sigma})$ est lagrangien en $\operatorname{im}(\delta_{A,g}|_{\Omega^2_\Sigma}) \oplus \operatorname{im}(\mathrm{d}_A|_{\Omega^0_\Sigma})$, il suit que $T_A\mathcal{L}_0$ est lagrangien en $T_A\mathcal{A}_\Sigma$. D'où $\mathcal{L}_0$ lagrangien en $\mathcal{A}_\Sigma$. □

Remarque : La dernière proposition est vraie pour toute lagrangienne en $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}}$. C'est-à-dire, si L est une lagrangienne en $\mathcal{M}_\Sigma^{\text{fl}}$, alors $\pi^{-1}(L)$ est une lagrangienne en $\mathcal{A}_\Sigma$ et cette lagrangienne est naturellement $\mathcal{G}_\Sigma$-invariante.

33.29 Autres hamiltoniens sur $\mathcal{A}_\Sigma$ (vieux) :

Plus haut on a étudié le champ vectoriel hamiltonien X_H et le gradient ∇H de l'hamiltonien de Yang-Mills en dimension 2, i.e. $H = S_{\text{YM}}$. Il est possible de considérer d'autres hamiltoniens sur $\mathcal{A}_\Sigma$. En effet, soit φ_s une famille de sections de $\mathrm{Ad}P_\Sigma$. Cette famille induit un hamiltonien non autonome, i.e. dépendant du temps, donné par :

$$H_s(A) := \int_\Sigma F_A \wedge^\kappa \varphi_s$$

Proposition : La différentielle $\mathrm{d}H_s$ est donnée par :

$$\mathrm{d}H_s|_A(\tau^\sharp) = \int_\Sigma (\mathrm{d}_A\tau) \wedge^\kappa \varphi_s$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H_s|_A(\tau^\sharp) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} H_s(A + t\tau^\sharp) \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \int_\Sigma F_{A+t\tau^\sharp} \wedge^\kappa \varphi_s \\ &= \int_\Sigma (\mathrm{d}_A\tau) \wedge^\kappa \varphi_s \end{aligned}$$

□

Remarque : La dernière proposition est un peu triviale car $\mu|_A = F_A$ et $\mathrm{d}\mu|_A = \mathrm{d}_A$.

Proposition : Le champ vectoriel hamiltonien X_{H_s} est donné par :

$$X_{H_s}|_A = \mathrm{d}^A\varphi_s^\sharp$$

Preuve : Donnons à Σ une métrique auxiliaire g. Souvenons nous que, pour Σ de dimension 2, on a $\star_g^2 = (-1)^k$ sur les k-formes. Souvenons-nous aussi que

$\delta_{A,g} = (-1)^k \star_g^{-1} \mathrm{d}_A \star_g^{-1}$. On calcule alors directement :

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}(X_{H_s}|_A, \tau^\sharp) &= -\mathrm{d}H_s|_A(\tau^\sharp) \\
&= -\int_\Sigma (\mathrm{d}_A\tau) \wedge^\kappa \varphi_s \\
&= -\int_\Sigma (\mathrm{d}_A\tau) \wedge^\kappa \star_g^2 \varphi_s \\
&= -(\mathrm{d}_A\tau, \star_g\varphi_s)_g \\
&= -(\tau, \delta_{A,g} \star_g \varphi_s)_g \\
&= -\hat{\omega}(\tau, J\delta_{A,g} \star_g \varphi_s) \\
&= -\hat{\omega}(\tau, \star_g\delta_{A,g} \star_g \varphi_s) \\
&= \hat{\omega}(\star_g\delta_{A,g} \star_g \varphi_s, \tau) \\
&= \hat{\omega}(\star_g((-1)^2 \star_g^{-1} \mathrm{d}_A \star_g \star_g\varphi_s), \tau) \\
&= \hat{\omega}(\mathrm{d}_A \star_g^2 \varphi_s, \tau) \\
&= \hat{\omega}(\mathrm{d}_A\varphi_s, \tau)
\end{aligned}$$

Par non dégénérescence de $\hat{\omega}$ sur $\mathcal{A}_\Sigma$, l'égalité recherchée

$$X_{H_s}|_A = \mathrm{d}^A\varphi_s^\sharp$$

découle. □

Remarque : Dans la dernière preuve il manque des $\sharp$. À AJOUTER.

Remarque : Dans la dernière preuve, bien qu'elle dépende de g auxiliaire sur Σ, le résultat final ne dépend pas de g.

Remarque : Le champ vectoriel hamiltonien trouvé donne pour orbites hamiltoniennes

$$A_s^{(s)} = X_{H_s}|_{A_s}$$

l'équation

$$A_s^{(s)} = \mathrm{d}^{A_s}\varphi_s^\sharp$$

Cette dernière équation est précisément celle d'orbites de jauges. Ainsi, les orbites hamiltoniennes des hamiltoniens du type $H_s(A) = \int_\Sigma F_A \wedge^\kappa \varphi_s$ sont précisément les orbites de jauges. En particulier, elles correspondent à des points fixes en $\mathcal{M}_\Sigma = \mathcal{A}_\Sigma/\mathcal{G}_\Sigma$.

Remarque : Ces derniers hamiltoniens pourraient être utilisés dans la fonctionnelle d'Hamilton-Jacobi sur l'espace des chemins en $\mathcal{A}_\Sigma$ pour retrouver la décomposition simple de la fonctionnelle de Chern-Simons sur $Y = \Sigma \times [0, 1]$.

-> TO DO ! ! ! (me baser sur mon pdf "Fonctionnelle d'Hamilton-Jacobi")

34 Cohomologie équivariante :

34.1 Introduction :

Le but de cette section est de tenter de résumer quelques résultats de cohomologie équivariante. C'est Jacques Hurtubise qui m'a conseillé d'étudier la cohomologie équivariante. Ça semble relié aux histoires d'espaces de module étendus de connexions de Manolescu et Woodward.

Intuitivement l'idée est : On veut étudier la topologie de l'espace de module de connexions. Par contre, il y a des singularités car le groupe de jauge n'agit pas librement sur l'espace des connexions. La topologie de l'espace de module est donc difficile à gérer. On considère alors plutôt une action libre du groupe de jauge sur un produit cartésien de l'espace de connexions avec un espace contractile (l'espace universel).

Bref, je vais poser les notions élémentaires de groupe classifiant et d'espace universel, puis je vais développer la théorie au cas du groupe de jauge. La plupart des résultats se trouvent dans :

- [AB] : (1982) *The Yang-Mills Equations over Riemann Surfaces* (M. F. Atiyah AND R. Bott)
- [AB-2] : (1984) *The moment map and equivariant cohomology* (M. F. Atiyah AND R. Bott)
- [DK] : (1990) *The Geometry of Four-Manifolds* (S. K. Donaldson AND P. B. Kronheimer)

Quelques preuves complémentaires se trouvent sur wikipédia, sur stackexchange et sur math.overflow (voir Google : classifying space gauge group).

Pour plus de détails, voir fichiers "2016-04-24 Espace classifiant.txt", "2018-03-13 cohomologie équivariante.txt", "2018-03-14 espace classifiant du groupe de jauge.txt".

34.2 Espace universel et espace classifiant :

Proposition : Soit G un groupe de Lie compact. Alors il existe un espace contractile EG sur lequel G agit librement.

Preuve : Il existe une injection de G en $\mathrm{U}(n)$ pour un certain n assez grand. Si on trouve $E\,\mathrm{U}(n)$, alors on peut prendre $EG := E\,\mathrm{U}(n)$. □

Définition : L'espace EG est dit être l'*espace universel* pour le groupe G. L'espace $BG := EG/G$ est dit être l'*espace classifiant* pour le groupe G. Le G-fibré principal $\pi : EG \to BG$ est dit être le *G-fibré universel*.

Théorème : Soit M une variété paracompacte. Soit $P \to M$ un G-fibré principal. Alors il existe une application continue

$$f : M \to BG \quad \text{(unique à homotopie près)}$$

telle que P est isomorphe au fibré pull-back $f^*(EG)$.

Remarque : Ce dernier théorème se reformule comme : Soit G un groupe. Soit BG son espace classifiant. Les classes d'isomorphismes de G-fibrés principaux $P \to M$ sont en correspondance bijective avec l'ensemble $[M, BG]$ des classes d'homotopies d'applications $f : M \to BG$. La correspondance est donnée par rappel du G-fibré principal universel sur BG. Ainsi, l'espace classifiant BG peut servir à classifier les G-fibrés principaux.

Remarque : Une autre utilité des espaces EG et BG est pour définir la notion de cohomologie équivariante. En effet, si on a une G-action sur X qui n'est pas libre, on a X/G qui peut ne pas être une variété (donc impossibilité d'utiliser directement la cohomologie de de Rham). On utilise alors la cohomologie équivariante, ce qui sera décrit à l'instant.

Remarque : Si H et G sont deux groupes, et $H \to G$ est un homomorphisme de groupes topologiques qui est aussi une équivalence homotopique, alors $BG \to BH$ est une équivalence homotopique.

Remarque : Si $G = \mathrm{SU}(2)$, alors

$$EG = S^\infty \subset \mathbb{H}^\infty$$

$$BG = EG/G = S^\infty/SU(2) = \mathbb{HP}^\infty$$

où $\mathbb{H}$ est les quaternions, S^∞ est sphère de dimension infinie, $\mathbb{HP}^\infty$ est l'espace quaternionique projectif de dimension infini.

34.3 Cohomologie équivariante :

Supposons qu'on ait une G-action de groupe sur une variété M. On veut étudier les groupes d'homotopie et de cohomologie de M/G. Problème : M/G est probablement singulier, pas Hausdorff, etc. Solution : étudier plutôt la topologie de $M_G := EG \times_G M$. Bref, on multiplie M par un espace contractile donc on a même type d'homotopie. Et G agit librement sur $EG \times M$, par définition de EG, donc M_G est agréable.

Soit G un groupe, M un espace topologique, EG l'espace universel de G, $BG := EG/G$ l'espace classifiant de G. Posons :

$$M_G = EG \times_G M$$

où G agit par la droite sur EG et par la gauche sur M. On identifie $(pg, x) \sim (p, gx)$ pour $p \in EG$, $g \in G$, $x \in M$.

Remarque : On a donc un M-fibré

$$M \hookrightarrow M_G \twoheadrightarrow BG$$

Définition : La *cohomologie équivariante* de M est par définition la cohomologie de $M_G = EG \times_G M$, i.e. :

$$H_G^*(M) := H^*(M_G)$$

Remarque : Bref, l'idée est qu'on veut les groupes d'homotopie ou encore de cohomologie d'un espace topologique (peut-être singulier, e.g. pas Hausdorff) obtenu par quotient d'action de groupe $M = P/G$. L'idée est de regarder la topologie de $M_G = EG \times_G M$. L'intérêt est que même si G n'agit pas librement sur M, il agit librement sur $EG \times_G M$ Et comme EG est contractile, alors M et M_G sont des espaces homotopiquement équivalents.

Proposition : La cohomologie équivariante d'un point est donnée par :

$$H_G^*(\{\text{pt.}\}) = H^*(BG)$$

Preuve : Prenons $M = \{\text{pt.}\}$. On calcule alors directement :

$$\begin{aligned} H_G^*(\{\text{pt.}\}) &= H_G^*(M) \\ &= H^*(M_G) \\ &= H^*(EG \times_G M) \\ &= H^*(EG \times_G \{\text{pt.}\}) \\ &= H^*(EG/G) \\ &= H^*(BG) \end{aligned}$$

□

Proposition : Si G agit librement sur M, alors

$$H_G^*(M) = H^*(M/G)$$

Preuve : Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} EG \arrow[d] & EG \times M \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ BG & M_G \arrow[l, "\pi"'] \arrow[r, "\sigma"] & M/G \end{tikzcd}$$

Comme G agit librement sur M, on a un G-fibré principal $G \hookrightarrow M \to M/G$. Ainsi, tout comme un a un M-fibré $M \hookrightarrow M_G \to BG$ associé au G-fibré $G \hookrightarrow EG \to BG$, on a un EG-fibré $EG \hookrightarrow M_G \to M/G$ associé au G-fibré $G \hookrightarrow M \to M/G$. Mais EG est contractile, donc $H^*(M_G) = H^*(M/G)$. On calcule alors directement :

$$H_G^*(M) = H^*(M_G) = H^*(M/G)$$

□

34.4 Espace classifiant du groupe de jauge :

Proposition : Soit $G \hookrightarrow P \to M$ un G-fibré principal. Alors l'espace classifiant du groupe de jauge est :

$$B\mathcal{G} = \mathrm{Map}_P(M, BG)$$

Preuve : Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} EG & \longleftarrow & EG \times P & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ BG & \longleftarrow & P_G & \longrightarrow & M \end{array}$$

où $P_G := EG \times_G P$. Au G-fibré principal $P \to M$ est associé le fibré $EG \hookrightarrow P_G \to M$. Les sections de ce fibré associé peuvent être vues comme applications équivariantes $\sigma^\sharp : P \to EG$. Puisque G agit librement sur EG, le groupe de jauge $\mathcal{G}$ agit librement, par pull-back, sur l'espace de ces dernières applications $\sigma^\sharp$. Puisque EG est contractile, l'espace des applications $\sigma^\sharp$ est contractile. Il suit que l'espace des $\sigma^\sharp$ est un espace universel $E\mathcal{G}$ pour $\mathcal{G}$. Ainsi, en passant modulo $\mathcal{G}$, l'espace des $f : M \to BG$, tels que $\overline{f} \in [M, BG]$ correspond à $P \to M$, est $B\mathcal{G} = E\mathcal{G}/\mathcal{G}$. D'où

$$B\mathcal{G} = \mathrm{Map}_P(M, BG) := \{f \in \mathrm{Map}(M, BG) | \overline{f} \in [M, BG] \text{ corresp. à } P\}$$

$\square$

Remarque : En fait je ne sais pas trop pourquoi il faut se restreindre aux f dont la classe d'homotopie $\overline{f} \in [M, BG]$ correspond au fibré $P \to M$. Revoir [AB], p. 540.

Remarque : Considérons un SU(2)-fibré principal $P \to M$. On a vu plus haut que $E\mathrm{SU}(2) = S^\infty \subset \mathbb{H}^\infty$ et $B\mathrm{SU}(2) = \mathbb{H}\mathrm{P}^\infty$. Ainsi, $B\mathcal{G} = \mathrm{Map}_P(M, BG) = Map_P(M, \mathbb{H}\mathrm{P}^\infty)$. C'est-à-dire, l'espace classifiant du groupe de jauge est ici l'espace des applications de M vers l'espace projectif quaternionique de dimension infinie (qui correspondent au fibré P). Dans le cas où il n'y a que des fibré P triviaux, e.g. si $M = \Sigma^2$ ou $M = Y^3$, alors $B\mathcal{G} = \mathrm{Map}(M, \mathbb{H}\mathrm{P}^\infty)$ (i.e. on peut oublier l'indice P).

35 Conjecture d'Atiyah-Floer :

35.1 Introduction :

Le but de cette section est de tenter une première approche à la conjecture d'Atiyah-Floer.

35.2 Le lieu :

Soit Y une 3-sphère d'homologie entière munie d'un $\mathrm{SU}(2)$-fibré principal (forcément) trivial $P_Y \to Y$. Donnons-nous un scindement de Heegaard $\Sigma \hookrightarrow Y$. On gonfle Σ à $\Sigma \times [0,1]$ et dès lors on voit Y comme

$$Y = Y_0 \bigsqcup_{\Sigma} (\Sigma \times [0,1]) \bigsqcup_{\Sigma} Y_1$$

où Y_0 et Y_1 sont des corps à anses. Soit $X := Y \times \mathbb{R}$. Il est muni du $\mathrm{SU}(2)$-fibré principal trivial $P_X \to X$ donné par $P_X := P_Y \times \mathbb{R}$. La 4-variété X se décompose comme

$$X = X_0 \bigsqcup_{\Sigma\times\mathbb{R}} (\Sigma \times [0,1] \times \mathbb{R}) \bigsqcup_{\Sigma\times\mathbb{R}} X_1$$

où $X_0 := Y_0 \times \mathbb{R}$ et $X_1 := Y_1 \times \mathbb{R}$.

Remarque : La partie $\Sigma \times [0,1]$ du centre de Y est le « Y » de la section sur la décomposition simple de la théorie de Yang-Mills. De même, le $\Sigma \times [0,1] \times \mathbb{R}$ du centre de X est le « X » de la section sur la décomposition double de la théorie de Yang-Mills.

Avant d'aller plus loin, je dois considérer l'espace des connexions plates sur Σ qui s'étendent à une connexion plate sur Y_0 (de même pour Y_1).

35.3 Espaces de connexions :

On sait que $\partial Y_0 = \Sigma$ et $\partial Y_1 = \Sigma$. Je veux considérer l'ensemble des connexions plates sur P_Σ qui s'étendent à une connexion plate sur Y_0 (resp. Y_1). Déjà, toute connexion (plate ou non) sur P_Σ s'étend à une panoplie de connexions sur P_{Y_0} (resp. P_{Y_1}) mais qui ne sont pas forcément plates. Considérons les injections

$$\iota_{\Sigma,0} : \Sigma \hookrightarrow Y_0 \quad \text{et} \quad \iota_{\Sigma,1} : \Sigma \hookrightarrow Y_1$$

Elles induisent deux injections :

$$\iota^\sharp_{\Sigma,0} : P_\Sigma \hookrightarrow P_{Y_0} \quad \text{et} \quad \iota^\sharp_{\Sigma,1} : P_\Sigma \hookrightarrow P_{Y_1}$$

Ces deux dernières injections induisent deux applications de rappels

$$\left(\iota^\sharp_{\Sigma,0}\right)^* : \mathcal{A}_{Y_0} \to \mathcal{A}_\Sigma \quad \text{et} \quad \left(\iota^\sharp_{\Sigma,1}\right)^* : \mathcal{A}_{Y_1} \to \mathcal{A}_\Sigma$$

qui sont essentiellement la restriction de connexions à P_Σ. Puisque toute connexion sur P_Σ peut être vu comme restriction d'une certaine connexion sur P_{Y_0} (resp. P_{Y_1}), alors les deux applications $\left(\iota^\sharp_{\Sigma,0}\right)^*$ et $\left(\iota^\sharp_{\Sigma,1}\right)^*$ sont surjectives (mais non injective). Remarquons que ces deux dernières applications sont linéaires. À partir d'ici j'écrirai $i = 0, 1$ au lieu des cas séparés pour Y_0 et Y_1.

Remarquons que l'espace des connexions plates sur P_Σ qui s'étendent à une connexion plate sur P_{Y_i} est donné par l'image de $\mathcal{A}^{\text{fl}}_{Y_i}$ par $\left(\iota^\sharp_{\Sigma,i}\right)^*$, i.e. est

$$\mathcal{L}_i := \left(\iota^\sharp_{\Sigma,i}\right)^* \left(\mathcal{A}^{\text{fl}}_{Y_i}\right) \subset \mathcal{A}^{\text{fl}}_\Sigma$$

On remarque alors un phénonène intéressant : la pré-image de $\mathcal{L}_i$ par l'application $\left(\iota^\sharp_{\Sigma,i}\right)^*$ est plus grosse que $\mathcal{A}^{\text{fl}}_{Y_i}$:

$$\mathcal{A}^{\text{fl}}_{Y_i} \subset \widehat{\mathcal{L}_i} := \left(\left(\iota^\sharp_{\Sigma,i}\right)^*\right)^{-1} (\mathcal{L}_i) \subset \mathcal{A}_{Y_i}$$

En effet, $\widehat{\mathcal{L}_i}$ peut contenir des connexions qui ne sont pas forcément plates sur $P_{Y_i} \backslash P_\Sigma$. La question se pose : à quoi ressemble le sous-ensemble $\widehat{\mathcal{L}_i}$?

Définition : $\Omega^1_{\partial Y_i}(Y_i; \mathrm{Ad}P_{Y_i}) := \{\tau \in \Omega^1(Y_i; \mathrm{Ad}P_{Y_i}) | (\iota_{\Sigma,i})^*\tau = \tau|_{\partial Y_i} = 0\}$.

Proposition : Tout élément $\hat{A} \in \widehat{\mathcal{L}_i}$ s'écrit $\hat{A} = A + \tau^\sharp$ pour un certain $A \in \mathcal{A}^{\text{fl}}_{Y_i}$ et un certain $\tau \in \Omega^1_{\partial Y_i}(Y_i; \mathrm{Ad}P_{Y_i})$.

Preuve : Soit $\hat{A} \in \widehat{\mathcal{L}_i}$. Par définition de $\widehat{\mathcal{L}_i}$, il existe un $A' \in \mathcal{L}_i \subset \mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_{\Sigma}$ tel que $\left(\iota^{\sharp}_{\Sigma,i}\right)^*(\hat{A}) = A'$. Puisque $A' \in \mathcal{L}_i$, il existe une connexion plate $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_{Y_i}$ telle que $\left(\iota^{\sharp}_{\Sigma,i}\right)^*(A) = A'$. Posons $\tau^\sharp := \hat{A} - A$. On remarque alors que $\tau \in \Omega^1(Y_i; \mathrm{Ad}P_{Y_i})$ doit forcément vérifier :

$$\tau^\sharp|_{\partial Y_i} = (\iota^{\sharp}_{\Sigma,i})^*\tau^\sharp = (\iota^{\sharp}_{\Sigma,i})^*(\hat{A} - A) = (\iota^{\sharp}_{\Sigma,i})^*(\hat{A}) - (\iota^{\sharp}_{\Sigma,i})^*(A) = A' - A' = 0$$

D'où $\tau \in \Omega^1_{\partial Y_i}(Y_i; \mathrm{Ad}P_{Y_i})$. D'où le fait que $\hat{A}$ se décompose comme $A + \tau^\sharp$ pour $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_{Y_i}$ et $\tau \in \Omega^1_{\partial Y_i}(Y_i; \mathrm{Ad}P_{Y_i})$. □

Proposition : Soit $\hat{A} \in \widehat{\mathcal{L}_i}$. Alors

$$F_{\hat{A}} = \mathrm{d}_A\tau + \frac{1}{2}[\tau \wedge \tau]$$

pour un certain $\tau \in \Omega^1_{\partial Y_i}(Y_i; \mathrm{Ad}P_{Y_i})$.

Preuve : Soit $\hat{A} \in \widehat{\mathcal{L}_i}$. Par la dernière proposition il existe $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{fl}}_{Y_i}$ et $\tau \in \Omega^1_{\partial Y_i}(Y_i; \mathrm{Ad}P_{Y_i})$ tels que $\hat{A} = A + \tau^\sharp$. En utilisant le fait que $F_A = 0$, on calcule directement :

$$F_{\hat{A}} = F_{A+\tau^\sharp} = F_A + \mathrm{d}_A\tau + \frac{1}{2}[\tau \wedge \tau] = \mathrm{d}_A\tau + \frac{1}{2}[\tau \wedge \tau]$$

□

Remarque : Ce qu'il y a à retenir de cette section : les connexions en $\mathcal{L}_i \subset \mathcal{A}_\Sigma$ correspondent à des connexions en $\widehat{\mathcal{L}_i} \subset \mathcal{A}_{Y_i}$. Ainsi, dans la conjecture d'Atiyah-Floer, je n'ai pas besoin d'avoir une famille de connexions plates sur les P_{Y_i}, je peux considérer le cas plus large des connexions en $\widehat{\mathcal{L}_i}$.

Remarque : Il semble alors pertinent de trouver une fonctionnelle du type Yang-Mills sur X telle que sur les deux côtés $Y_i \times \mathbb{R}$ on ait des chemins de connexions reposant en $\widehat{\mathcal{L}_i}$.

35.4 Courbes J-holomorphes (cas simple canonique) :

Soit $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ en coordonnées $\{p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n\}$ où $\omega_0 = \sum_{i=1}^{2n} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$. Soit $J_0 := \sum_{i=1}^{2n} \mathrm{d}p_i \otimes \frac{\partial}{\partial q_i} - \mathrm{d}q_i \otimes \frac{\partial}{\partial p_i}$. Alors $g_0(\,\cdot\,,\,\cdot\,) := \omega(\,\cdot\,, J\,\cdot\,)$ est donnée par

$$g_0 := \sum_{i=1}^{2n} \mathrm{d}p_i \otimes \mathrm{d}p_i + \mathrm{d}q_i \otimes \mathrm{d}q_i$$

Considérons la fonctionnelle

$$S_{\text{symp}}(u) := \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} (\|u^{(s)}\|_{g_0}^2 + \|u^{(t)}\|_{g_0}^2)\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

Proposition : Les points critiques de S_{symp} vérifient $\Delta u_k = 0$ pour $k = 1, ..., 2n$ où $u = (u_1, ..., u_{2n})$.

Preuve : Le lagrangien de la fonctionnelle S_{symp} est

$$L(u, u^{(s)}, u^{(t)}, s, t) := \|u^{(s)}\|_{g_0}^2 + \|u^{(t)}\|_{g_0}^2$$

Les surfaces $u(s, t)$ se décomposent en coordonnées comme

$$u(s, t) = (p_1(s, t), ..., p_n(s, t), q_1(s, t), ..., q_n(s, t))$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial L}{\partial p_k^{(s)}}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial p_k^{(t)}}\right) = \frac{\partial L}{\partial p_k}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k^{(s)}}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k^{(t)}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

pour $k \in \{1, ..., n\}$. On trouve alors directement les égalités suivantes :

$$p_k^{(s,s)} + p_k^{(t,t)} = 0$$

$$q_k^{(s,s)} + q_k^{(t,t)} = 0$$

Autrement dit, $\Delta u_k = 0$ pour $k = 1, ..., 2n$. $\square$

Proposition : Les courbes J-holomorphes sont des points critiques de S_{symp}.

Preuve : Soit $u : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$ telle que $\overline{\partial}_J u = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_J \overline{\partial}_J u \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} - J_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} + J_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) u \\ &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} u - J_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} + J_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u \\ &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} u + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u \\ &= \Delta u \end{aligned}$$

D'où $\Delta u = 0$. D'où $u \in \text{crit}(S_{\text{symp}})$. □

Remarque : Les courbes J-holomorphes, i.e. $\overline{\partial}_J u = 0$, sont des cas particuliers de surfaces harmoniques, i.e. $\Delta u = u^{(s,s)} + u^{(t,t)} = 0$. Ceci est à comparer au fait que les instantons, i.e. $(1 + \star) F_A = 0$, sont des cas particuliers de connexions de Yang-Mills, i.e. $\delta_A F_A = 0$.

Remarque : Ici je n'ai développé que pour $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Le cas plus général avec

$$S_{\text{symp}}(u) := \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} (\|u^{(s)}\|^2_{g_{s,t}} + \|u^{(t)}\|^2_{g_{s,t}}) \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

semble impliquer des dérivées de $g_{s,t}$ en s et en t.

Remarque : Après avoir infructueusement tenté de calculer directement les points critiques de S_{symp} dans le cas $u : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathcal{A}_\Sigma$ (i.e. en dimension infinie, affine) voici une autre méthode. Elle s'agit de voir S_{symp} comme restriction de S_{YM} à un sous-ensemble de $\mathcal{A}_X$. Ce que je développe à l'instant.

35.5 Deux espaces restreints :

Notation : Posons

$$\mathcal{B}_\Sigma := \mathcal{A}_\Sigma \times \Omega^1(\Sigma; \text{Ad}P_\Sigma) \times \Omega^1(\Sigma; \text{Ad}P_\Sigma)$$

$$\mathcal{B}'_\Sigma := \mathcal{A}_\Sigma \times \{0\} \times \{0\} \subset \mathcal{B}$$

Plus haut on a vu l'égalité

$$\mathcal{A}_X = \{\tilde{u} : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathcal{B}_\Sigma\}$$

Suivant cette notation, posons :

$$\mathcal{A}'_X := \{\tilde{u} : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathcal{B}'_\Sigma\} \subset \mathcal{A}_X$$

En particulier, je dirai qu'une connexion $A \in \mathcal{A}_X$ vérifie la condition $(*)$ si elle repose en $\mathcal{A}'_X$, i.e. si elle vérifie $\varphi = 0$ et $\psi = 0$.

Remarque : Dû à l'isomorphisme $\mathcal{B}'_\Sigma \cong \mathcal{A}_\Sigma$, on a l'isomorphisme

$$\mathcal{A}'_X \cong \{u : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathcal{A}_\Sigma\}$$

35.6 Décomposition double restreintes :

Une manière de relier la théorie de Yang-Mills à celle symplectique est de considérer les divers résultats de double décomposition en théorie de Yang-Mills et de lui mettre les deux conditions $\varphi_{s,t} = 0$ et $\psi_{s,t} = 0$. C'est-à-dire, $\varphi = 0$, $\psi = 0$. C'est-à-dire, de se restreindre au sous-ensemble $\mathcal{A}'_X$. Alors que les éléments de $A \in \mathcal{A}_X$ se décomposent comme :

$$A = \tilde{A} + \varphi^\sharp \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp \mathrm{d}t^\sharp$$

les éléments $A \in \mathcal{A}'_X$ sont simplement de la forme $A = \tilde{A}$. Il en découle les propositions suivantes.

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}'_X$. Alors la forme de courbure se décompose comme :

$$F_A = F_{\tilde{A}} - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp \wedge \mathrm{d}s - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp \wedge \mathrm{d}t$$

Preuve : Il suffit de mettre $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ dans la double décomposition de la forme de courbure :

$$F_A = F_{\tilde{A}} + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}s + (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \wedge \mathrm{d}t + (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi,\psi])\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

□

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}'_X$. Alors la fonctionnelle de Yang-Mills $S_{\mathrm{YM}^4}(A, g)$ s'y décompose comme

$$S_{\mathrm{YM}}(A) = S_{\mathrm{symp}}(A_{s,t}, g_{s,t}) + \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} S_{\mathrm{YM}^2}(A_{s,t}, g_{s,t})\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

où

$$S_{\mathrm{YM}^2}(A_{s,t}, g_{s,t}) := \frac{1}{2}\|F_{A_{s,t}}\|^2_{g_{s,t}} = \frac{1}{2}(F_{A_{s,t}}, F_{A_{s,t}})_{g_{s,t}}$$

est la fonctionnelle de Yang-Mills en dimension 2 sur $\mathcal{A}_\Sigma$ et où

$$S_{\mathrm{symp}}(A_{s,t}, g_{s,t}) := \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \left(\|(A^{(s)}_{s,t})_\sharp\|^2_{g_{s,t}} + \|(A^{(t)}_{s,t})_\sharp\|^2_{g_{s,t}}\right) \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

est la fonctionnelle d'énergie symplectique pour la surface $A_{s,t}$ en $\mathcal{A}_\Sigma$.

Preuve : Il suffit de mettre $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ dans la décomposition double de la fonctionnelle de Yang-Mills :

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{YM}}(A) = \; & \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \|F_{A_{s,t}}\|^2_{g_{s,t}}\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
& +\frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \|\mathrm{d}_{A_{s,t}}\varphi_{s,t} - (A^{(s)}_{s,t})_\sharp\|^2_{g_{s,t}}\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
& +\frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \|\mathrm{d}_{A_{s,t}}\psi_{s,t} - (A^{(t)}_{s,t})_\sharp\|^2_{g_{s,t}}\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
& +\frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \|\psi^{(s)}_{s,t} - \varphi^{(t)}_{s,t} + [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]\|^2_{g_{s,t}}\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

Remarque : Autrement dit, la fonctionnelle de Yang-Mills en dimension 4 restreinte à $\mathcal{A}'_X$ est égale à la fonctionnelle d'énergie symplectique perturbée par le terme hamiltonien Yang-Mills en dimension 2.

Proposition : Soit $A \in \mathcal{A}'_X$. Alors l'équation ASD sur F_A se décompose comme :

$$(A^{(s)}_{s,t})_\sharp + \star_{g_{s,t}}(A^{(t)}_{s,t})_\sharp = 0 \quad \text{et} \quad F_{A_{s,t}} = 0$$

Preuve : En mettant $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ dans la décomposition double

$$\star_{g_{s,t}} F_{A_{s,t}} = \varphi_{s,t}^{(t)} - \psi_{s,t}^{(s)} - [\varphi_{s,t}, \psi_{s,t}]$$

$$\star_{g_{s,t}} \left(\mathrm{d}_{A_{s,t}} \varphi_{s,t} - (A_{s,t}^{(s)})_\sharp \right) = \mathrm{d}_{A_{s,t}} \psi_{s,t} - (A_{s,t}^{(t)})_\sharp$$

de l'équation ASD $\star_g F_A = -F_A$ on trouve les deux égalités suivantes :

$$\star_{g_{s,t}} F_{A_{s,t}} = 0 \quad \text{et} \quad -\star_{g_{s,t}} \left((A_{s,t}^{(s)})_\sharp \right) = -(A_{s,t}^{(t)})_\sharp$$

C'est-à-dire, on trouve :

$$F_{A_{s,t}} = 0 \quad \text{et} \quad (A_{s,t}^{(s)})_\sharp + \star_{g_{s,t}} (A_{s,t}^{(t)})_\sharp = 0$$

□

Remarque : L'équation ASD doublement décomposée pour $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ est précisément l'équation CR de connexions plates :

$$0 = \overline{\partial}_{J_{s,t}} u_{s,t} = u_{s,t}^{(s)} + J_{s,t} u_{s,t}^{(t)} \quad \text{et} \quad F_{A_{s,t}} = 0$$

où $J_{s,t} = \star_{g_{s,t}}^\sharp$ et où $u_{s,t} = A_{s,t}$. Ainsi, Pour $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, il y a une bijection entre les instantons et les courbes pseudo-holomorphes de connexions plates ! Ce qui est le Saint-Graal de la conjecture d'Atiyah-Floer ! Tout le défi revient alors à construire une bijection ASD <-> CR plat pour φ et ψ non nuls.

Proposition : L'équation de Yang-Mills $\delta_A F_A = 0$ se décompose sous les conditions $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ en les trois égalités suivantes :

$$0 = \delta_{A_{s,t}} F_{A_{s,t}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(\star_{g_{s,t}} (A_{s,t}^{(s)})_\sharp \right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\star_{g_{s,t}} (A_{s,t}^{(t)})_\sharp \right)$$

$$0 = \delta_{A_{s,t}} (A_{s,t}^{(s)})_\sharp$$

$$0 = \delta_{A_{s,t}} (A_{s,t}^{(t)})_\sharp$$

pour $(s, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$.

Preuve : On a vu que la double décomposition de la courbure F_A sous la condition $(*)$ est :

$$F_A = F_{\tilde{A}} - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp \wedge \mathrm{d}s - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp \wedge \mathrm{d}t$$

On calcule d'abord ceci :

$$\begin{aligned}
0 &= \delta_A|_X F_A \\
&= \delta_A|_X \left(F_{\tilde{A}} - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp \wedge \mathrm{d}s - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&= \delta_A|_X F_{\tilde{A}} - \delta_A|_X \left((\tilde{A}^{(s)})_\sharp \wedge \mathrm{d}s\right) - \delta_A|_X \left((\tilde{A}^{(t)})_\sharp \wedge \mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

Souvenons-nous que $\delta_g = (-1)^{nk+n+1} \star \mathrm{d}\star$ pour $s_g = 1$. Donc, pour toute 2-forme α sur X^4 on a $\delta_g\alpha = -\star_g \mathrm{d} \star_g \alpha$. Ici, $F_{\tilde{A}}$, $(\tilde{A}^{(s)})_\sharp \wedge \mathrm{d}s$ et $(\tilde{A}^{(t)})_\sharp \wedge \mathrm{d}t$ sont 2-formes, i.e. $k = 2$, sur un espace de dimension $n = 4$ où $s_g = 1$. On trouve alors :

$$0 = -\star_g \mathrm{d}_A|_X \star_g F_{\tilde{A}} + \star_g \mathrm{d}_A|_X \star_g \left((\tilde{A}^{(s)})_\sharp \wedge \mathrm{d}s\right) + \star_g \mathrm{d}_A|_X \star_g \left((\tilde{A}^{(t)})_\sharp \wedge \mathrm{d}t\right)$$

Pour toute k-forme $\alpha \in \Omega^k(X)$ sans ds ni dt sous les mêmes conditions $\dim X = n = 4$ et $s_g = 1$, on a les quatre égalités suivantes de double de décomposition de $\star_g$:

$$\star_g\alpha = (\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

$$\star_g(\alpha \wedge \mathrm{d}s) = (-1)^k (\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}t$$

$$\star_g(\alpha \wedge \mathrm{d}t) = (-1)^{k-1} (\star_{\tilde{g}}\alpha) \wedge \mathrm{d}s$$

$$\star_g(\alpha \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t) = \star_{\tilde{g}}\alpha$$

En utilisant ces égalités ainsi que $\delta_A = (-1)^{nk+n+1} \star_g \mathrm{d}_A \star_g$ pour $s_g = 1$, on trouve :

$$\begin{aligned}
0 &= -\star_g \mathrm{d}_A|_X \star_g F_{\tilde{A}} + \star_g \mathrm{d}_A|_X \star_g \left((\tilde{A}^{(s)})_\sharp \wedge \mathrm{d}s\right) + \star_g \mathrm{d}_A|_X \star_g \left((\tilde{A}^{(t)})_\sharp \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&= -\star_g \mathrm{d}_A|_X \left(\star_{\tilde{g}} F_{\tilde{A}} \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t\right) - \star_g \mathrm{d}_A|_X \left(\star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(s)})_\sharp \wedge \mathrm{d}t\right) + \star_g \mathrm{d}_A|_X \left(\star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(t)})_\sharp \wedge \mathrm{d}s\right) \\
&= -\star_g \left(\left(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} \star_{\tilde{g}} F_{\tilde{A}}\right) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&\quad -\star_g \left(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} \star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(s)})_\sharp \wedge \mathrm{d}t\right) - \star_g \left(\mathrm{d}s \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(s)})_\sharp\right) \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&\quad +\star_g \left(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} \star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(t)})_\sharp \wedge \mathrm{d}s\right) + \star_g \left(\mathrm{d}t \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(t)})_\sharp\right) \wedge \mathrm{d}s\right) \\
&= -\star_{\tilde{g}} \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} \star_{\tilde{g}} F_{\tilde{A}} \\
&\quad + \left(\star_{\tilde{g}} \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} \star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(s)})_\sharp\right) \wedge \mathrm{d}s + \star_g \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(s)})_\sharp\right) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&\quad + \left(\star_{\tilde{g}} \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} \star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(t)})_\sharp\right) \wedge \mathrm{d}t + \star_g \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(t)})_\sharp\right) \wedge \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t\right) \\
&= \delta_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} F_{\tilde{A}} \\
&\quad - \left(\delta_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} (\tilde{A}^{(s)})_\sharp\right) \wedge \mathrm{d}s + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(s)})_\sharp\right) \\
&\quad - \left(\delta_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} (\tilde{A}^{(t)})_\sharp\right) \wedge \mathrm{d}t + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(t)})_\sharp\right) \\
&= \delta_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} F_{\tilde{A}} + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(s)})_\sharp\right) + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(t)})_\sharp\right) \\
&\quad - \left(\delta_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} (\tilde{A}^{(s)})_\sharp\right) \wedge \mathrm{d}s - \left(\delta_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} (\tilde{A}^{(t)})_\sharp\right) \wedge \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ce qui implique les trois égalités suivantes :

$$0 = \delta_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} F_{\tilde{A}} + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(s)})_\sharp\right) + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\star_{\tilde{g}} (\tilde{A}^{(t)})_\sharp\right)$$

$$0 = \delta_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} (\tilde{A}^{(s)})_\sharp$$

$$0 = \delta_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} (\tilde{A}^{(t)})_\sharp$$

En tirant les quatre égalités trouvées à Σ, on trouve alors les trois égalités suivantes :

$$0 = \delta_{A_{s,t}} F_{A_{s,t}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\star_{g_{s,t}} (A^{(s)}_{s,t})_\sharp\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\star_{g_{s,t}} (A^{(t)}_{s,t})_\sharp\right)$$

$$0 = \delta_{A_{s,t}}(A_{s,t}^{(s)})_\sharp$$
$$0 = \delta_{A_{s,t}}(A_{s,t}^{(t)})_\sharp$$

□

Proposition : Soit $A_{s,t}$ une famille à 2-paramètres de connexions sur P_Σ. Alors :

$$\left(F_{A_{s,t}}\right)^{(s)} = \mathrm{d}_{A_{s,t}}(A_{s,t}^{(s)})_\sharp$$
$$\left(F_{A_{s,t}}\right)^{(t)} = \mathrm{d}_{A_{s,t}}(A_{s,t}^{(t)})_\sharp$$

Preuve : Il suffit de démontrer la première égalité sur P_Σ. On calcule directement :

$$\begin{aligned}
\left(F^\sharp_{A_{s,t}}\right)^{(s)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F^\sharp_{A_{s,t}} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathrm{d}A_{s,t} + \frac{1}{2}[A_{s,t}\wedge A_{s,t}]\right) \\
&= \mathrm{d}A_{s,t}^{(s)} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[A_{s,t}\wedge A_{s,t}] \\
&= \mathrm{d}A_{s,t}^{(s)} + \frac{1}{2}[A_{s,t}^{(s)}\wedge A_{s,t}] + \frac{1}{2}[A_{s,t}\wedge A_{s,t}^{(s)}] \\
&= \mathrm{d}A_{s,t}^{(s)} + [A_{s,t}\wedge A_{s,t}^{(s)}] \\
&= \mathrm{d}^{A_{s,t}}A_{s,t}^{(s)}
\end{aligned}$$

□

Proposition : Les familles de connexions CR plates, i.e. $\overline{\partial}_{J_{s,t}}A_{s,t} = 0$ et $F_{A_{s,t}} = 0$, vérifient les trois égalités de la double décomposition de l'équation de YM sous les conditions $\varphi = 0$ et $\psi = 0$.

Preuve : Soit $A_{s,t}$ une famille de connexions CR plates, i.e. $\overline{\partial}_{J_{s,t}}A_{s,t} = 0$ et $F_{A_{s,t}} = 0$. L'équation CR se reformule sur la base comme :

$$(A_{s,t}^{(s)})_\sharp + \star_{g_{s,t}}(A_{s,t}^{(t)})_\sharp = 0$$

D'où les deux égalités

$$\star_{g_{s,t}}(A_{s,t}^{(t)})_\sharp = -(A_{s,t}^{(s)})_\sharp$$
$$\star_{g_{s,t}}(A_{s,t}^{(s)})_\sharp = (A_{s,t}^{(t)})_\sharp$$

La première égalité à vérifier est vérifiée :

$$\begin{aligned}\delta_{A_{s,t}} F_{A_{s,t}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\star_{g_{s,t}} (A_{s,t}^{(s)})_\sharp\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\star_{g_{s,t}} (A_{s,t}^{(t)})_\sharp\right) &= \delta_{A_{s,t}}(0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left((A_{s,t}^{(t)})_\sharp\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((A_{s,t}^{(s)})_\sharp\right) \\ &= 0 + (A_{s,t}^{(s,t)})_\sharp - (A_{s,t}^{(s,t)})_\sharp \\ &= 0\end{aligned}$$

La seconde égalité à vérifier est vérifiée :

$$\begin{aligned}\delta_{A_{s,t}} (A_{s,t}^{(s)})_\sharp &= -\star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} \star_{g_{s,t}} (A_{s,t}^{(s)})_\sharp \\ &= -\star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} (A_{s,t}^{(t)})_\sharp \\ &= -\star_{g_{s,t}} \left(F_{A_{s,t}}\right)^{(t)} \\ &= -\star_{g_{s,t}} (0)^{(t)} \\ &= 0\end{aligned}$$

La troisième à vérifier est vérifiée :

$$\begin{aligned}\delta_{A_{s,t}} (A_{s,t}^{(t)})_\sharp &= -\star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} \star_{g_{s,t}} (A_{s,t}^{(t)})_\sharp \\ &= \star_{g_{s,t}} \mathrm{d}_{A_{s,t}} (A_{s,t}^{(s)})_\sharp \\ &= \star_{g_{s,t}} \left(F_{A_{s,t}}\right)^{(s)} \\ &= \star_{g_{s,t}} (0)^{(s)} \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Remarque : En posant $H := S_{\mathrm{YM}^2}$, $u_{s,t} := A_{s,t}$, $J_{s,t} = \star_{g_{s,t}}^\sharp$, l'équation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\star_{g_{s,t}} (A_{s,t}^{(s)})_\sharp\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\star_{g_{s,t}} (A_{s,t}^{(t)})_\sharp\right) + \delta_{A_{s,t}} F_{A_{s,t}} = 0$$

est la version *théorie de jauge* de l'équation de « *surfaces harmoniques perturbées par un terme hamiltonien* » :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(J_{s,t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u_{s,t}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J_{s,t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{s,t}\right) + (\nabla H)|_{u_{s,t}} = 0$$

Cette équation semble être l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle d'énergie symplectique perturbée par un terme hamiltonien

$$S_{\mathrm{symp}}(u) = \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \left(\|(u_{s,t}^{(s)})_\sharp\|_{g_{s,t}} + \|(u_{s,t}^{(t)})_\sharp\|_{g_{s,t}} + H \circ u_{s,t}\right) \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

pour surfaces u dans une variété symplectique affine de dimension infinie. En particulier, on pourrait poser une sorte de « *laplacien* »

$$\Delta_{s,t}(\,\cdot\,) := J_{s,t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(J_{s,t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\,\cdot\,)\right) + J_{s,t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J_{s,t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\,\cdot\,)\right)$$

défini sur l'espace des surfaces $u : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathcal{A}_\Sigma$. L'équation qui nous intéresserait serait alors celle de « *surfaces harmoniques perturbées* » pour notre laplacien $\Delta_{s,t}$.

$$\Delta_{s,t}u_{s,t} + (\nabla H)|_{u_{s,t}} = 0$$

35.7 Aire symplectique et classe de Pontrjagin :

Proposition : La restriction de la fonctionnelle de Yang-Mills S_{YM^4} à $\mathcal{A}'_X \cap \mathcal{A}^-_X$ est égale à l'aire symplectique de bandes en $\mathcal{A}_\Sigma$.

Preuve : Soit $A \in \mathcal{A}'_X \cap \mathcal{A}^-_X$. Par une proposition plus haut, puisque $A \in \mathcal{A}'_X$, on a :

$$S_{\mathrm{YM}^2}(A) = S_{\mathrm{symp}}(A_{s,t}, g_{s,t}) + \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} S_{\mathrm{YM}^2}(A_{s,t}, g_{s,t})\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$$

Ensuite, puisque $A \in \mathcal{A}'_X \cap \mathcal{A}^-_X$, la surface $A_{s,t}$ est CR, i.e. $\star^\sharp_{g_{s,t}} A^{(s)}_{s,t} = A^{(t)}_{s,t}$, et plate, i.e. $F_{A_{s,t}} = 0$. La nullité de la courbure de $A_{s,t}$ implique directement

$S_{\mathrm{YM}^2}(A_{s,t}, g_{s,t}) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{YM}^2}(A) &= S_{\mathrm{symp}}(A_{s,t}, g_{s,t}) + \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} S_{\mathrm{YM}^2}(A_{s,t}, g_{s,t})\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \left(\|(A^{(s)}_{s,t})_\sharp\|^2_{g_{s,t}} + \|(A^{(t)}_{s,t})_\sharp\|^2_{g_{s,t}}\right)\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t + \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} (0)\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \left(\int_\Sigma (A^{(s)}_{s,t})_\sharp \wedge^\kappa \star_{g_{s,t}} (A^{(s)}_{s,t})_\sharp + \int_\Sigma (A^{(t)}_{s,t})_\sharp \wedge^\kappa \star_{g_{s,t}} (A^{(t)}_{s,t})_\sharp\right)\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \left(\int_\Sigma (A^{(s)}_{s,t})_\sharp \wedge^\kappa (A^{(t)}_{s,t})_\sharp - \int_\Sigma (A^{(t)}_{s,t})_\sharp \wedge^\kappa (A^{(s)}_{s,t})_\sharp\right)\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \left(\int_\Sigma (A^{(s)}_{s,t})_\sharp \wedge^\kappa (A^{(t)}_{s,t})_\sharp + \int_\Sigma \wedge (A^{(s)}_{s,t})_\sharp \wedge^\kappa (A^{(t)}_{s,t})_\sharp\right)\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \left(\int_\Sigma (A^{(s)}_{s,t})_\sharp \wedge^\kappa (A^{(t)}_{s,t})_\sharp\right)\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \omega(A^{(s)}_{s,t}, A^{(t)}_{s,t})\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t \\
&= \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} (A_{s,t})^*\omega
\end{aligned}$$

La fonctionnelle de Yang-Mills en dimension 4 restreinte à $\mathcal{A}'_X \cap \mathcal{A}^-_X$ est donc égale à l'aire symplectique de bandes. □

-> L'aire symplectique est un invariant topologique (car aire sympl. = Pontrjagin qui est un invariant topologique dépendant des conditions aux bords de A, etc.).

->S_{YM^4} lorsque restreinte à $\mathcal{A}^-_X$ est égale à quelque chose comme la classe de Pontrjagin, i.e. un invariant de fibré. Ainsi, quand on se restreint de plus à $\mathcal{A}'_X$, la classe de Pontrjagin est égale à l'aire symplectique... À CREUSER D'AVANTAGE ! ! !

TO DO : poser la classe de Pontrjagin par Chern-Weil etc. Relier ça à YM. Enfin, relier ça à aire symplectique. TO DO ! ! !

EN FAIT : Ici tout est mélangé, aire symplectique, YM, Pontrjagin, etc., faire le ménage, mettre ça au clair, c'est un fouillis.

35.8 Résumé de ce qu'on vient de voir :

En résumé, qu'a-t-on vu dans cette section ? D'abord, on a la bijection

$$\mathcal{A}'_X \cong \{u : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathcal{A}_\Sigma\}$$

Ensuite (en oubliant les conditions aux bords), on a une bijection entre $\mathcal{A}'_X \cap \mathcal{A}^-_X$ et les courbes (i.e. surfaces) $A_{s,t}$ pseudo-holomorphe plates en $\mathcal{A}_\Sigma$. Ensuite, sous la condition $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, la fonctionnelle de Yang-Mills en dimension 4 est égale à la fonctionnelle d'énergie symplectique perturbée par l'hamiltonien Yang-Mills en dimension 2. Enfin, pour $A \in \mathcal{A}'_X \cap \mathcal{A}^-_X$, la classe de Pontrjagin est égale à l'aire symplectique (revenir là-dessus, avec conditions aux bords, etc.).

Question : Pourrions-nous avoir une application moment $\mu : \mathcal{A}_\Sigma \times ... \to ...$ telle que $\mu^{-1}(0)$ est précisément $\mathcal{A}_X$ sous condition $(*)$? Cette application moment correspondrait à l'action de $\mathcal{G}_\Sigma$ ou $\mathcal{G}_X$ sur le triple $(A_{s,t}, \varphi_{s,t}, \psi_{s,t})$.

Remarque : Maintenant que j'ai une correspondance bijective entre ASD et CR plat pour $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, il reste à construire une bijection ASD et CR plat pour φ et ψ non nuls. Il me semble que ça doit passer par le flot gradient descendant de nos fonctionnelles (Yang-Mills et symplectique).

Remarque : L'équation YM $\delta_A F_A = 0$ restreinte à $A \in \mathcal{A}'_X$ implique trois équations dont $\Delta_{s,t} A_{s,t} + \delta^\sharp_{A_{s,t}} F^\sharp_{A_{s,t}} = 0$. De même, l'équation ASD $\star_g F_A = -F_A$ restreinte à $A \in \mathcal{A}'_X$ implique $F_{A_{s,t}} = 0$ et $\overline{\partial}_{J_{s,t}} A_{s,t} = 0$. Il m'aurait semblé qu'on aurait plutôt obtenu quelque chose comme une perturbation hamiltonienne de surfaces pseudo-holomorphes du type $\overline{\partial} u = \nabla H|_u$. Ce qui n'est pas le cas. Bref, la perturbation hamiltonienne n'est que pour la surface harmonique et ne se trouve pas dans l'équation de surfaces pseudo-holomorphe.

35.9 Double décomposition du gradient de YM^4 :

Proposition : Soit

$$A_\lambda = \tilde{A}_\lambda + \varphi^\sharp_\lambda \mathrm{d}s^\sharp + \psi^\sharp_\lambda \mathrm{d}t^\sharp$$

un chemin de connexions en $\mathcal{A}_X$. Il lui correspond un chemin de surfaces

$$\tilde{u}_{s,t,\lambda} = (A_{s,t,\lambda}, \varphi_{s,t,\lambda}, \psi_{s,t,\lambda})$$

Le chemin A_λ est une courbe intégrale du gradient descendant de S_{YM^4}, i.e. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}A_\lambda = -\delta^\sharp_{A_\lambda} F^\sharp_{A_\lambda}$, si et seulement si le chemin de surfaces $\tilde{u}_{s,t,\lambda}$ vérifie les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned}
(A^{(\lambda)}_{s,t,\lambda})_\sharp &= -\delta_{A_{s,t,\lambda}} F_{A_{s,t,\lambda}} \\
&\quad - \left[\varphi_{s,t\lambda}, \mathrm{d}_{A_{s,t\lambda}}\varphi_{s,t,\lambda} - (A^{(s)}_{s,t,\lambda})_\sharp\right] + \star_{g_{s,t}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t,\lambda}}\varphi_{s,t,\lambda} - (A^{(s)}_{s,t,\lambda})_\sharp) \\
&\quad - \left[\psi_{s,t,\lambda}, \mathrm{d}_{A_{s,t,\lambda}}\psi_{s,t,\lambda} - (A^{(t)}_{s,t,\lambda})_\sharp\right] + \star_{g_{s,t}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t,\lambda}}\psi_{s,t,\lambda} - (A^{(t)}_{s,t,\lambda})_\sharp)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi^{(\lambda)}_{s,t,\lambda} &= \delta_{A_{s,t,\lambda}}(A^{(s)}_{s,t,\lambda})_\sharp - \Delta_{A_{s,t,\lambda}}\varphi_{s,t,\lambda} \\
&\quad - \star_{g_{s,t}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \star_{g_{s,t}} (\psi^{(s)}_{s,t,\lambda} - \varphi^{(t)}_{s,t,\lambda} + [\varphi_{s,t,\lambda}, \psi_{s,t,\lambda}]) \\
&\quad - \left[\psi_{s,t,\lambda}, \psi^{(s)}_{s,t,\lambda} - \varphi^{(t)}_{s,t,\lambda} + [\varphi_{s,t,\lambda}, \psi_{s,t,\lambda}]\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi^{(\lambda)}_{s,t,\lambda} &= \delta_{A_{s,t,\lambda}}(A^{(t)}_{s,t,\lambda})_\sharp - \Delta_{A_{s,t,\lambda}}\psi_{s,t,\lambda} \\
&\quad + \star_{g_{s,t}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \star_{g_{s,t}} (\psi^{(s)}_{s,t,\lambda} - \varphi^{(t)}_{s,t,\lambda} + [\varphi_{s,t,\lambda}, \psi_{s,t,\lambda}]) \\
&\quad + \left[\varphi_{s,t,\lambda}, \psi^{(s)}_{s,t,\lambda} - \varphi^{(t)}_{s,t,\lambda} + [\varphi_{s,t,\lambda}, \psi_{s,t,\lambda}]\right]
\end{aligned}$$

où ici $\Delta_{A_{s,t,\lambda}} = \delta_{A_{s,t,\lambda}}\mathrm{d}_{A_{s,t,\lambda}}$ est l'opérateur de Laplace-de Rham covariant sur les sections du fibré $\mathrm{Ad}P_\Sigma$.

Preuve : Soit A_λ une courbe intégrale du gradient descendant de la fonctionnelle de Yang-Mills en dimension 4 :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}A_\lambda = -\delta^\sharp_{A_\lambda} F^\sharp_{A_\lambda}$$

Puisque

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}A_\lambda = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\tilde{A}_\lambda + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\varphi^\sharp_\lambda \mathrm{d}s^\sharp + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\psi^\sharp_\lambda \mathrm{d}t^\sharp$$

il suit sur la base X que

$$(A_\lambda^{(\lambda)})_\sharp = (\tilde{A}_\lambda^{(\lambda)})_\sharp + \varphi_\lambda^{(\lambda)}\mathrm{d}s + \psi_\lambda^{(\lambda)}\mathrm{d}t$$

L'équation du gradient descendant $(A_\lambda^{(\lambda)})_\sharp = -\delta_{A_\lambda} F_{A_\lambda}$ devient alors :

$$(\tilde{A}_\lambda^{(\lambda)})_\sharp + \varphi_\lambda^{(\lambda)}\mathrm{d}s + \psi_\lambda^{(\lambda)}\mathrm{d}t = -\delta_{A_\lambda} F_{A_\lambda}$$

En utilisant la double décomposition de $\delta_A F_A$ obtenue un peu plus haut on obtient la double décomposition de $-\delta_A F_A$:

$$\begin{aligned}
& -\delta_A|_X F_A \\
= \quad & -\delta_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}} F_{\tilde{A}} \\
& - \left[\varphi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp\right] + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \star_{\tilde{g}} (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) \\
& - \left[\psi, \mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp\right] + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \star_{\tilde{g}} (\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) \\
& + \left(-\delta_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi - (\tilde{A}^{(s)})_\sharp) - \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \star_{\tilde{g}} (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi, \psi]) - \left[\psi, \psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi, \psi]\right]\right) \mathrm{d}s \\
& + \left(-\delta_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}}|_{\Sigma_{s,t}}\psi - (\tilde{A}^{(t)})_\sharp) + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \star_{\tilde{g}} (\psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi, \psi]) + \left[\varphi, \psi^{(s)} - \varphi^{(t)} + [\varphi, \psi]\right]\right) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned}
& (\tilde{A}_\lambda^{(\lambda)})_\sharp + \varphi_\lambda^{(\lambda)}\mathrm{d}s + \psi_\lambda^{(\lambda)}\mathrm{d}t \\
= \quad & -\delta_{A_\lambda}|_X F_{A_\lambda} \\
= \quad & -\delta_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}} F_{\tilde{A}_\lambda} \\
& - \left[\varphi_\lambda, \mathrm{d}_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi_\lambda - (\tilde{A}_\lambda^{(s)})_\sharp\right] + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \star_{\tilde{g}} (\mathrm{d}_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi_\lambda - (\tilde{A}_\lambda^{(s)})_\sharp) \\
& - \left[\psi_\lambda, \mathrm{d}_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}}\psi_\lambda - (\tilde{A}_\lambda^{(t)})_\sharp\right] + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \star_{\tilde{g}} (\mathrm{d}_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}}\psi_\lambda - (\tilde{A}_\lambda^{(t)})_\sharp) \\
& - \left(\delta_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi_\lambda - (\tilde{A}_\lambda^{(s)})_\sharp)\right) \mathrm{d}s \\
& - \left(\star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \star_{\tilde{g}} (\psi_\lambda^{(s)} - \varphi_\lambda^{(t)} + [\varphi_\lambda, \psi_\lambda]) + \left[\psi_\lambda, \psi_\lambda^{(s)} - \varphi_\lambda^{(t)} + [\varphi_\lambda, \psi_\lambda]\right]\right) \mathrm{d}s \\
& - \left(\delta_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}}(\mathrm{d}_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}}\psi_\lambda - (\tilde{A}_\lambda^{(t)})_\sharp)\right) \mathrm{d}t \\
& + \left(\star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \star_{\tilde{g}} (\psi_\lambda^{(s)} - \varphi_\lambda^{(t)} + [\varphi_\lambda, \psi_\lambda]) + \left[\varphi_\lambda, \psi_\lambda^{(s)} - \varphi_\lambda^{(t)} + [\varphi_\lambda, \psi_\lambda]\right]\right) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

D'où les trois égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}_\lambda^{(\lambda)})_\sharp &= -\delta_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}} F_{\tilde{A}_\lambda} \\
&\quad - \left[\varphi_\lambda, \mathrm{d}_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi_\lambda - (\tilde{A}_\lambda^{(s)})_\sharp\right] + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \star_{\tilde{g}} (\mathrm{d}_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi_\lambda - (\tilde{A}_\lambda^{(s)})_\sharp) \\
&\quad - \left[\psi_\lambda, \mathrm{d}_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}}\psi_\lambda - (\tilde{A}_\lambda^{(t)})_\sharp\right] + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \star_{\tilde{g}} (\mathrm{d}_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}}\psi_\lambda - (\tilde{A}_\lambda^{(t)})_\sharp)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda^{(\lambda)} &= -\delta_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}} (\mathrm{d}_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}}\varphi_\lambda - (\tilde{A}_\lambda^{(s)})_\sharp) \\
&\quad - \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \star_{\tilde{g}} (\psi_\lambda^{(s)} - \varphi_\lambda^{(t)} + [\varphi_\lambda, \psi_\lambda]) - \left[\psi_\lambda, \psi_\lambda^{(s)} - \varphi_\lambda^{(t)} + [\varphi_\lambda, \psi_\lambda]\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_\lambda^{(\lambda)} &= -\delta_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}} (\mathrm{d}_{\tilde{A}_\lambda}|_{\Sigma_{s,t}}\psi_\lambda - (\tilde{A}_\lambda^{(t)})_\sharp) \\
&\quad + \star_{\tilde{g}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \star_{\tilde{g}} (\psi_\lambda^{(s)} - \varphi_\lambda^{(t)} + [\varphi_\lambda, \psi_\lambda]) + \left[\varphi_\lambda, \psi_\lambda^{(s)} - \varphi_\lambda^{(t)} + [\varphi_\lambda, \psi_\lambda]\right]
\end{aligned}$$

Ces trois équations se réécrivent sur Σ comme :

$$\begin{aligned}
(A_{s,t,\lambda}^{(\lambda)})_\sharp &= -\delta_{A_{s,t,\lambda}} F_{A_{s,t,\lambda}} \\
&\quad - \left[\varphi_{s,t\lambda}, \mathrm{d}_{A_{s,t\lambda}}\varphi_{s,t,\lambda} - (A_{s,t,\lambda}^{(s)})_\sharp\right] + \star_{g_{s,t}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t,\lambda}}\varphi_{s,t,\lambda} - (A_{s,t,\lambda}^{(s)})_\sharp) \\
&\quad - \left[\psi_{s,t,\lambda}, \mathrm{d}_{A_{s,t,\lambda}}\psi_{s,t,\lambda} - (A_{s,t,\lambda}^{(t)})_\sharp\right] + \star_{g_{s,t}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \star_{g_{s,t}} (\mathrm{d}_{A_{s,t,\lambda}}\psi_{s,t,\lambda} - (A_{s,t,\lambda}^{(t)})_\sharp)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{s,t,\lambda}^{(\lambda)} &= \delta_{A_{s,t,\lambda}}(A_{s,t,\lambda}^{(s)})_\sharp - \delta_{A_{s,t,\lambda}}\mathrm{d}_{A_{s,t,\lambda}}\varphi_{s,t,\lambda} \\
&\quad - \star_{g_{s,t}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \star_{g_{s,t}} (\psi_{s,t,\lambda}^{(s)} - \varphi_{s,t,\lambda}^{(t)} + [\varphi_{s,t,\lambda}, \psi_{s,t,\lambda}]) \\
&\quad - \left[\psi_{s,t,\lambda}, \psi_{s,t,\lambda}^{(s)} - \varphi_{s,t,\lambda}^{(t)} + [\varphi_{s,t,\lambda}, \psi_{s,t,\lambda}]\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{s,t,\lambda}^{(\lambda)} &= \delta_{A_{s,t,\lambda}}(A_{s,t,\lambda}^{(t)})_\sharp - \delta_{A_{s,t,\lambda}}\mathrm{d}_{A_{s,t,\lambda}}\psi_{s,t,\lambda} \\
&\quad + \star_{g_{s,t}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \star_{g_{s,t}} (\psi_{s,t,\lambda}^{(s)} - \varphi_{s,t,\lambda}^{(t)} + [\varphi_{s,t,\lambda}, \psi_{s,t,\lambda}]) \\
&\quad + \left[\varphi_{s,t,\lambda}, \psi_{s,t,\lambda}^{(s)} - \varphi_{s,t,\lambda}^{(t)} + [\varphi_{s,t,\lambda}, \psi_{s,t,\lambda}]\right]
\end{aligned}$$

En remarquant que $\delta_{A_{s,t,\lambda}}\mathrm{d}_{A_{s,t,\lambda}}$ est l'opérateur de Laplace-de Rham covariant $\Delta_{A_{s,t,\lambda}}$ sur les sections du fibré $\mathrm{Ad}P_\Sigma$, on trouve les équations recherchées. □

35.10 Gradient descendant de YM^4 sur $\mathcal{A}'_X$:

Remarque : On vient de calculer la double décomposition du gradient de S_{YM^4}. On peut alors l'évaluer au temps $\lambda = 0$ pour certaines conditions initiales. Par exemple : que vaut le gradient descendant de S_{YM^4} sous conditions initiales $\tilde{u}_{s,t,0} = (A_{s,t,0}, \varphi_{s,t,0}, \psi_{s,t,0})$ pour $A_{s,t,0}$ pseudo-holomorphe plat et $\varphi_{s,t,0} = \psi_{s,t,0} = 0$? Nul besoin de calculer pour connaître la réponse : les $A_{s,t}$ CR plat avec $\varphi_{s,t} = \psi_{s,t} = 0$ correspondent à des instantons, i.e. des points critiques de S_{YM^4}, i.e. des points fixes du flot de Yang-Mills. Ainsi, le gradient de Yang-Mills est nul sur $\mathcal{A}^-_X \cap \mathcal{A}'_X$. Maintenant : que vaut le gradient descendant de S_{YM^4} sur $\mathcal{A}'_X$?

Proposition : Le gradient descendant de S_{YM^4} en la condition initiale $\tilde{u}_{s,t,0} = (A_{s,t,0}, 0, 0)$ est donné par :

$$\begin{aligned} A^{(\lambda)}_{s,t,0} &= -\delta^{\sharp}_{A_{s,t,0}} F^{\sharp}_{A_{s,t,0}} - \Delta_{s,t} A_{s,t,0} \\ \varphi^{(\lambda)}_{s,t,0} &= \delta_{A_{s,t,0}} (A^{(s)}_{s,t,0})_{\sharp} \\ \psi^{(\lambda)}_{s,t,0} &= \delta_{A_{s,t,0}} (A^{(t)}_{s,t,0})_{\sharp} \end{aligned}$$

Preuve : Il suffit de mettre $\varphi_{s,t,0} = \psi_{s,t,0} = 0$ dans la double décomposition du gradient descendant de Yang-Mills de la dernière section. □

Remarque : Même si dans nos conditions initiales on a $\varphi_{s,t,0}$ et $\psi_{s,t,0}$ nuls, le gradient descendant de S_{YM^4} les fera évoluer vers des valeurs non nulles.

35.11 Gradient descendant de YM^4 sur pour CR plat :

Remarque : Jusqu'ici j'ai regardé le gradient descendant de S_{YM^4} pour conditions initiales en $\mathcal{A}^-_X \cap \mathcal{A}'_X$, i.e. CR plat avec $\varphi = \psi = 0$, puis pour $\mathcal{A}'_X$, i.e. $\varphi = \psi = 0$. Considérons ici le cas où $A_{s,t,0}$ est CR plat mais où $\varphi_{s,t,0}$ et $\psi_{s,t,0}$ ne sont pas forcément nuls.

Proposition : Prenons pour conditions initiales $\tilde{u}_{s,t,0}$ où $A_{s,t,0}$ est CR plate et où $\varphi_{s,t,0}$ et $\psi_{s,t,0}$ ne sont pas forcément nulles. Alors, le gradient descendant de S_{YM^4}

en ces conditions initiales est donné par :

$$... = ...$$

====

TO DO : regarder le gradient descendant de Yang-Mills pour la condition initiale où $\varphi_{s,t,0}$ et $\psi_{s,t,0}$ ne sont pas forcément nuls mais où $A_{s,t,0}$ est CR plat !

=====

remarque : quand je veux une correspondance ASD et CR plat, je n'ai pas besoin d'avoir ϕ et ψ nuls ! En fait, ils peuvent être ce qu'on veut ! Je ne prends que la valeur de u en $\tilde{u}$. Il y aurait moyen de considérer la projection $\pi_{\mathcal{A}_\Sigma} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}_\Sigma$ etc. et ce qui m'importe est $u = \pi_{\mathcal{A}_\Sigma}(\tilde{u})$.

36 Flot de Yang-Mills :

36.1 Introduction :

Le but de cette section est de relier les instantons en $\mathcal{A}_X$ à des courbes pseudo-holomorphes en $\mathcal{A}_\Sigma$, pour $X = \Sigma \times [0,1] \times \mathbb{R}$.

L'idée est la suivante : on considère deux fonctionnelles sur $\mathcal{A}_\Sigma$. Une est l'énergie symplectique. Ses points critiques sont des courbes pseudo-holomoprhes. L'autre est la fonctionnelle de Yang-Mills décomposée. Ses points critiques sont des connexions de Yang-Mills. L'idée pour relier les instantons aux courbes pseudo-holomorphes, est de laisser *couler* les points critiques d'une fonctionnelle sous le flot gradient de l'autre fonctionnelle. Ainsi, un instanton glissera vers une courbe pseudo-holomorphe et, inversement, une courbe pseudo-holomorphe glissera vers un instanton.

Une autre manière serait de considérer le cobordisme $\mathrm{crit}(S_\sigma)$ entre les ensembles $\mathrm{crit}(S_0)$ et $\mathrm{crit}(S_1)$ des deux fonctionnelles S_0 et S_1 reliées par la famille de fonctionnelles $S_\sigma := \sigma S_1 + (1-\sigma)S_0$ pour $\sigma \in [0,1]$.

36.2 Énergie symplectique :

Ici : poser la fonctionnelle d'énergie symplectique. Montrer que ses points critiques sont des courbes pseudo-holomorphes. Puis regarder le flot gradient de la fonctionnelle d'énergie symplectique.

36.3 Énergie symplectique :

Correspondances ASD <-> CR et YM <-> Harmonique, i.e.

$$\star_g F_A = -F_A \leftrightarrow \overline{\partial}_J u = 0$$

$$\delta_A F_A = 0 \leftrightarrow \Delta u = 0$$

i.e.

$$\{A \in \mathcal{A}_X | \star_g F_A = -F_A\} \subset \{A \in \mathcal{A}_X | \delta_A F_A = 0\}$$

doit correspondre à

$$\{u | \overline{\partial}_J u = 0\} \subset \{u | \Delta u = 0\}$$

Les fonctionnelles sont YM et sont $\int (\|u^{(s)}\|_g^2 + \|u^{(t)}\|_g^2) \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$.

Quand je veux faire couler u CR à un A ASD, je dois faire attention à ce qu'il n'atterrisse pas à une connexion de YM qui n'est pas un instanton. De même, si je veux faire couler A ASD à un u CR, je dois faire attention à ce qu'il n'atterrisse pas à une surface harmonique $\Delta u = 0$ qui n'est pas CR.

====

L'idée est de prendre $S_0(A) = S_{\mathrm{YM}}(A)$ et $S_1(\tilde{u}) := \int (\|u^{(s)}\|_g^2 + \|u^{(t)}\|_g^2) \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}t$. Ainsi on a deux fonctionnelles. Les points critiques de S_0 sont les $\delta_A F_A = 0$ ayant pour sous-ensemble les $\star_g F_A = -F_A$. Les points critiques de S_1 sont les $\Delta u = 0$ ayant pour sous-ensemble les $\overline{\partial}_J u = 0$. Je veux interpoler entre les points critiques de S_0 et ceux de S_1. L'idée est de considérer les points critiques $\mathrm{crit}(S_\sigma)$ de la famille de fonctions

$$S_\sigma := \sigma S_1 + (1 - \sigma) S_0$$

pour $\sigma \in [0, 1]$. Remarquons que ça donne un cobordisme entre les points critiques de S_0 et ceux de S_1. Pour avoir une bijection entre les points critiques de S_0 et ceux de S_1 il suffit de montrer que c'est le cobordisme identité. Sinon, je dois étudier la forme du cobordisme via la théorie de Morse (via une fonction hauteur $\sigma : \mathcal{A}_X \times [0, 1] \to \mathbb{R}; (A, \sigma) \mapsto \sigma$ où σ dénote la fonction et le point en $[0, 1]$).

C'est une approche possible. L'autre approche est de faire couler $\mathrm{crit}(S_0)$ à $\mathrm{crit}(S_1)$ via $-\nabla S_1$, et inversement, faire couler $\mathrm{crit}(S_1)$ à $\mathrm{crit}(S_0)$ via $-\nabla S_0$.

=====

Les conditions aux bords lagrangiennes sont dans les feuilles. À mettre à l'ordi.

Question : Les instantons c'est des minimum locaux ou globaux de $S_{\mathrm{YM}}(A)$? Les minimums globaux c'est les connexions plates. Les instantons c'est donc des minimums locaux (comparativement aux connexions de YM génériques qui semblent être des points de selles ?). Attention : les pts. crit. de S_{YM} ne sont pas isolés, S_{YM} n'est pas Morse, etc... on doit quotienter par le gr. de jauge $\mathcal{G}$. TO DO ! ! !

Remarque : Le point clé pour faire couler une surface J-holomorphe en $\mathcal{M}_\Sigma$ à surface J-holomorphe en $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$ via flot de YM^2 est que les seuls points critiques de S_{YM} en dimension 2 sont les connexions plates (toujours avec $\mathrm{SU}(2)$). En effet, les connexions de YM vérifient $\delta_A F_A = 0$. Mais sur le lieu irréductible on a $\delta_A : \Omega^2_\Sigma \to \Omega^1_\Sigma$ qui est injectif. Donc c'est nul ssi $F_A = 0$. Bref, à part ce qui est réductible, ça devrait couler jusqu'à $\mathcal{M}_\Sigma^{\mathrm{fl}}$. EN FAIT CE QUE JE VIENS DE DIRE EST FAUX ! ! ! (je ne sais plus pourquoi, retrouver ça dans mes feuilles et discussions avec J. Hurtubise).

37 Calculs brouillons :

37.1 Introduction :

Ici c'est juste des calculs brouillons. Des fois, quand les équations sont trop longues, LaTeX est plus efficace au copy/paste qu'à la main.

37.2 Calcul 1 type Kaluza-Klein (2019-05-22) :

Sur $\mathbb{R}^4$, coord. (x^i). On considère une métrique :

$$g_{ij} = \begin{cases} h^2 - A^k A_k & \text{pour } i = 0,\ j = 0 \\ A_j & \text{pour } i = 0,\ j \neq 0 \\ A_i & \text{pour } i \neq 0,\ j = 0 \\ -\tilde{g}_{ij} & \text{pour } i \neq 0,\ j \neq 0 \end{cases}$$

On suppose tout indépendant du temps $x^0 = ct$. Métrique inverse :

$$g^{ij} = \begin{cases} h^{-2} & \text{pour } i = 0,\ j = 0 \\ h^{-2}A^j & \text{pour } i = 0,\ j \neq 0 \\ h^{-2}A^i & \text{pour } i \neq 0,\ j = 0 \\ -\tilde{g}^{ij} + h^{-2}A^iA^j & \text{pour } i \neq 0,\ j \neq 0 \end{cases}$$

Soit $\|A\|_{\tilde{g}}^2 := \tilde{g}^{ij}A_iA_j = A^kA_k$. Soit $F_{ij} := \partial_i A_j - \partial_j A_i$. Les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k de g sont, pour $i \neq 0$, $j \neq 0$, $k \neq 0$, donnés par :

$$\Gamma_{00}^0 = -A^m\partial_m \ln(h) + \frac{1}{2}h^{-2}A^m\partial_m\|A\|_{\tilde{g}}^2$$

$$\Gamma_{i0}^0 = \partial_i \ln(h) - \frac{1}{2}h^{-2}\partial_i\|A\|_{\tilde{g}}^2 + \frac{1}{2}h^{-2}A^mF_{im}$$

$$\Gamma_{0j}^0 = \partial_j \ln(h) - \frac{1}{2}h^{-2}\partial_j\|A\|_{\tilde{g}}^2 + \frac{1}{2}h^{-2}A^mF_{jm}$$

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}h^{-2}(\partial_i A_j + \partial_j A_i) - h^{-2}A_k\tilde{\Gamma}^k_{ij}$$

$$\Gamma^k_{00} = \tilde{g}^{km}h\partial_m h - \frac{1}{2}\tilde{g}^{km}\partial_m\|A\|^2_{\tilde{g}} - h^{-1}A^kA^m\partial_m h + \frac{1}{2}h^{-2}A^kA^m\partial_m\|A\|^2_{\tilde{g}}$$

$$\Gamma^k_{i0} = A^kh^{-1}\partial_i h - \frac{1}{2}h^{-2}A^k\partial_i\|A\|^2_{\tilde{g}} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{km}F_{im} + \frac{1}{2}h^{-2}A^kA^mF_{im}$$

$$\Gamma^k_{0j} = A^kh^{-1}\partial_j h - \frac{1}{2}h^{-2}A^k\partial_j\|A\|^2_{\tilde{g}} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{km}F_{jm} + \frac{1}{2}h^{-2}A^kA^mF_{jm}$$

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}h^{-2}A^k(\partial_i A_j + \partial_j A_i) + \tilde{\Gamma}^k_{ij} - h^{-2}A^kA_m\tilde{\Gamma}^m_{ij}$$

Calcul de la courbure de Ricci. On a :

$$\begin{aligned} R_{ij} &= -\partial_j\Gamma^0_{i0} + \sum_{k\neq 0}(\partial_k\Gamma^k_{ij} - \partial_j\Gamma^k_{ik}) + \Gamma^0_{ij}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{i0}\Gamma^0_{j0} \\ &\quad + \sum_{k\neq 0}(\Gamma^0_{ij}\Gamma^k_{k0} - \Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{j0} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^0_{0k} - \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk}) \\ &\quad + \sum_{k,l\neq 0}(\Gamma^l_{ij}\Gamma^k_{kl} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl}) \end{aligned}$$

Là la somme est sur $k \neq 0$, $l \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
& R_{00} \\
= \; & \partial_k \Gamma^k_{00} + \Gamma^0_{00}\Gamma^k_{k0} - \Gamma^0_{0k}\Gamma^k_{00} + \Gamma^l_{00}\Gamma^k_{kl} - \Gamma^l_{0k}\Gamma^k_{0l} \\
= \; & \partial_k \left(\tilde{g}^{km} h \partial_m h - \frac{1}{2}\tilde{g}^{km}\partial_m \|A\|^2_{\tilde{g}} - A^k A^m \partial_m \ln(h) + \frac{1}{2}h^{-2}A^k A^m \partial_m \|A\|^2_{\tilde{g}}\right) \\
& + \left(-A^m \partial_m \ln(h) + \frac{1}{2}h^{-2}A^m \partial_m \|A\|^2_{\tilde{g}}\right) \\
& \cdot \left(A^k \partial_k \ln(h) - \frac{1}{2}h^{-2}A^k \partial_k \|A\|^2_{\tilde{g}} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{kn}F_{kn} + \frac{1}{2}h^{-2}A^k A^n F_{kn}\right) \\
& - \left(\partial_k \ln(h) - \frac{1}{2}h^{-2}\partial_k \|A\|^2_{\tilde{g}} + \frac{1}{2}h^{-2}A^n F_{kn}\right) \\
& \cdot \left(\tilde{g}^{km} h \partial_m h - \frac{1}{2}\tilde{g}^{km}\partial_m \|A\|^2_{\tilde{g}} - A^k A^m \partial_m \ln(h) + \frac{1}{2}h^{-2}A^k A^m \partial_m \|A\|\right) \\
& + \left(\tilde{g}^{lm} h \partial_m h - \frac{1}{2}\tilde{g}^{lm}\partial_m \|A\|^2_{\tilde{g}} - A^l A^m \partial_m \ln(h) + \frac{1}{2}h^{-2}A^l A^m \partial_m \|A\|^2_{\tilde{g}}\right) \\
& \cdot \left(\frac{1}{2}h^{-2}A^k(\partial_k A_l + \partial_l A_k) + \tilde{\Gamma}^k_{kl} - h^{-2}A^k A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl}\right) \\
& - \left(A^l \partial_k \ln(h) - \frac{1}{2}h^{-2}A^l \partial_k \|A\|^2_{\tilde{g}} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{ln}F_{kn} + \frac{1}{2}h^{-2}A^l A^n F_{kn}\right) \\
& \cdot \left(A^k \partial_l \ln(h) - \frac{1}{2}h^{-2}A^k \partial_l \|A\|^2_{\tilde{g}} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{km}F_{lm} + \frac{1}{2}h^{-2}A^k A^m F_{lm}\right)
\end{aligned}
$$

Pour simplifier la notation, posons :

$$B_i := \partial_i \|A\|^2_{\tilde{g}}$$

$$C_i := \partial_i \ln(h)$$

$$\|\nabla_{\tilde{g}} h\|^2_{\tilde{g}} := \tilde{g}^{km}(\partial_k h)(\partial_m h)$$

$$D_i = A^m F_{im}$$

$$E = A^k C_k$$

$$G = A^k B_k$$

$$H = A^k D_k$$

Alors :

$$\begin{aligned}
& R_{00} \\
= \;& (\partial_k \tilde{g}^{km}) h^2 C_m + \|\nabla_{\tilde{g}} h\|_{\tilde{g}}^2 + \tilde{g}^{km} h (\partial_k \partial_m h) - \frac{1}{2}(\partial_k \tilde{g}^{km}) B_m - \frac{1}{2}\tilde{g}^{km}(\partial_k B_m) \\
& -(\partial_k A^k) E - A^k (\partial_k A^m) C_m - A^k A^m (\partial_k C_m) \\
& -h^{-2} E A^m B_m + \frac{1}{2} h^{-2} (\partial_k A^k) A^m B_m + \frac{1}{2} h^{-2} A^k (\partial_k A^m) B_m + \frac{1}{2} h^{-2} A^k A^m (\partial_k B_m) \\
& + \left(-E + \frac{1}{2} h^{-2} A^m B_m\right) \\
& \cdot \left(E - \frac{1}{2} h^{-2} A^k B_k - \frac{1}{2}\tilde{g}^{kn} F_{kn} + \frac{1}{2} h^{-2} A^k D_k\right) \\
& - \left(C_k - \frac{1}{2} h^{-2} B_k + \frac{1}{2} h^{-2} D_k\right) \\
& \cdot \left(\tilde{g}^{km} h^2 C_m - \frac{1}{2}\tilde{g}^{km} B_m - A^k E + \frac{1}{2} h^{-2} A^k A^m B_m\right) \\
& + \left(\tilde{g}^{lm} h^2 C_m - \frac{1}{2}\tilde{g}^{lm} B_m - A^l E + \frac{1}{2} h^{-2} A^l A^m B_m\right) \\
& \cdot \left(\frac{1}{2} h^{-2} A^k \partial_k A_l + \frac{1}{2} h^{-2} A^k \partial_l A_k + \tilde{\Gamma}^k_{kl} - h^{-2} A^k A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl}\right) \\
& - \left(A^l C_k - \frac{1}{2} h^{-2} A^l B_k - \frac{1}{2}\tilde{g}^{ln} F_{kn} + \frac{1}{2} h^{-2} A^l D_k\right) \\
& \cdot \left(A^k C_l - \frac{1}{2} h^{-2} A^k B_l - \frac{1}{2}\tilde{g}^{km} F_{lm} + \frac{1}{2} h^{-2} A^k D_l\right)
\end{aligned}$$

On trouve donc :

$$
\begin{aligned}
& R_{00} \\
= \; & (\partial_k \tilde{g}^{km}) h^2 C_m + \|\nabla_{\tilde{g}} h\|_{\tilde{g}}^2 + \tilde{g}^{km} h (\partial_k \partial_m h) - \frac{1}{2} (\partial_k \tilde{g}^{km}) B_m - \frac{1}{2} \tilde{g}^{km} (\partial_k B_m) \\
& - (\partial_k A^k) E - A^k (\partial_k A^m) C_m - A^k A^m (\partial_k C_m) \\
& - h^{-2} E G + \frac{1}{2} h^{-2} (\partial_k A^k) G + \frac{1}{2} h^{-2} A^k (\partial_k A^m) B_m + \frac{1}{2} h^{-2} A^k A^m (\partial_k B_m) \\
& - E^2 + \frac{1}{2} h^{-2} E G + \frac{1}{2} E \tilde{g}^{kn} F_{kn} - \frac{1}{2} E h^{-2} H \\
& + \frac{1}{2} h^{-2} E G - \frac{1}{4} h^{-4} A^k B_k G - \frac{1}{4} h^{-2} \tilde{g}^{kn} F_{kn} G + \frac{1}{4} h^{-4} H G \\
& - h^2 \tilde{g}^{km} C_k C_m + \frac{1}{2} \tilde{g}^{km} C_k B_m + E^2 - \frac{1}{2} h^{-2} E G \\
& + \frac{1}{2} \tilde{g}^{km} C_m B_k - \frac{1}{4} h^{-2} \tilde{g}^{km} B_m B_k - \frac{1}{2} h^{-2} E G + \frac{1}{4} h^{-4} G^2 \\
& - \frac{1}{2} \tilde{g}^{km} C_m D_k + \frac{1}{4} h^{-2} \tilde{g}^{km} B_m D_k + \frac{1}{2} h^{-2} E H - \frac{1}{4} h^{-4} G H \\
& + \left(\tilde{g}^{lm} h^2 C_m - \frac{1}{2} \tilde{g}^{lm} B_m - A^l E + \frac{1}{2} h^{-2} A^l G \right) \\
& \cdot \left(\frac{1}{2} h^{-2} A^k \partial_k A_l + \frac{1}{2} h^{-2} A^k \partial_l A_k + \tilde{\Gamma}^k_{kl} - h^{-2} A^k A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} \right) \\
& + \left(-A^l C_k + \frac{1}{2} h^{-2} A^l B_k + \frac{1}{2} \tilde{g}^{ln} F_{kn} - \frac{1}{2} h^{-2} A^l D_k \right) \\
& \cdot \left(A^k C_l - \frac{1}{2} h^{-2} A^k B_l - \frac{1}{2} \tilde{g}^{km} F_{lm} + \frac{1}{2} h^{-2} A^k D_l \right)
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
& R_{00} \\
= \ & (\partial_k \tilde{g}^{km}) h^2 C_m + \|\nabla_{\tilde{g}} h\|_{\tilde{g}}^2 + \tilde{g}^{km} h (\partial_k \partial_m h) - \frac{1}{2}(\partial_k \tilde{g}^{km}) B_m - \frac{1}{2}\tilde{g}^{km}(\partial_k B_m) \\
& -(\partial_k A^k) E - A^k (\partial_k A^m) C_m - A^k A^m (\partial_k C_m) \\
& +\frac{1}{2} h^{-2} (\partial_k A^k) G + \frac{1}{2} h^{-2} A^k (\partial_k A^m) B_m + \frac{1}{2} h^{-2} A^k A^m (\partial_k B_m) \\
& +\frac{1}{2} E \tilde{g}^{kn} F_{kn} - \frac{1}{4} h^{-2} G \tilde{g}^{kn} F_{kn} - h^2 \tilde{g}^{km} C_k C_m + \tilde{g}^{km} C_k B_m - h^{-2} E G \\
& -\frac{1}{4} h^{-2} \tilde{g}^{km} B_m B_k - \frac{1}{2} \tilde{g}^{km} C_m D_k + \frac{1}{4} h^{-2} \tilde{g}^{km} B_m D_k \\
& +(\tilde{g}^{lm} h^2 C_m) \cdot \left(\frac{1}{2} h^{-2} A^k \partial_k A_l + \frac{1}{2} h^{-2} A^k \partial_l A_k + \tilde{\Gamma}^k_{kl} - h^{-2} A^k A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} \right) \\
& +(\frac{1}{2} \tilde{g}^{lm} B_m) \cdot \left(-\frac{1}{2} h^{-2} A^k \partial_k A_l - \frac{1}{2} h^{-2} A^k \partial_l A_k - \tilde{\Gamma}^k_{kl} + h^{-2} A^k A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} \right) \\
& +(A^l E) \cdot \left(-\frac{1}{2} h^{-2} A^k \partial_k A_l - \frac{1}{2} h^{-2} A^k \partial_l A_k - \tilde{\Gamma}^k_{kl} + h^{-2} A^k A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} \right) \\
& +(\frac{1}{2} h^{-2} A^l G) \cdot \left(\frac{1}{2} h^{-2} A^k \partial_k A_l + \frac{1}{2} h^{-2} A^k \partial_l A_k + \tilde{\Gamma}^k_{kl} - h^{-2} A^k A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} \right) \\
& + \left(-A^l C_k + \frac{1}{2} h^{-2} A^l B_k + \frac{1}{2} \tilde{g}^{ln} F_{kn} - \frac{1}{2} h^{-2} A^l D_k \right) \\
& \cdot \left(A^k C_l - \frac{1}{2} h^{-2} A^k B_l - \frac{1}{2} \tilde{g}^{km} F_{lm} + \frac{1}{2} h^{-2} A^k D_l \right)
\end{aligned}
$$

Donc :

$$\begin{aligned}
& R_{00} \\
= \; & (\partial_k \tilde{g}^{km}) h^2 C_m + \|\nabla_{\tilde{g}} h\|_{\tilde{g}}^2 + \tilde{g}^{km} h (\partial_k \partial_m h) - \frac{1}{2}(\partial_k \tilde{g}^{km}) B_m - \frac{1}{2}\tilde{g}^{km}(\partial_k B_m) \\
& -(\partial_k A^k) E - A^k (\partial_k A^m) C_m - A^k A^m (\partial_k C_m) \\
& +\frac{1}{2} h^{-2} (\partial_k A^k) G + \frac{1}{2} h^{-2} A^k (\partial_k A^m) B_m + \frac{1}{2} h^{-2} A^k A^m (\partial_k B_m) \\
& +\frac{1}{2} E \tilde{g}^{kn} F_{kn} - \frac{1}{4} h^{-2} G \tilde{g}^{kn} F_{kn} - h^2 \tilde{g}^{km} C_k C_m + \tilde{g}^{km} C_k B_m - h^{-2} E G \\
& -\frac{1}{4} h^{-2} \tilde{g}^{km} B_m B_k - \frac{1}{2} \tilde{g}^{km} C_m D_k + \frac{1}{4} h^{-2} \tilde{g}^{km} B_m D_k \\
& +\frac{1}{2} A^k (\partial_k A_l) \tilde{g}^{lm} C_m + \frac{1}{2} A^k (\partial_l A_k) \tilde{g}^{lm} C_m + \tilde{\Gamma}^k_{kl} \tilde{g}^{lm} h^2 C_m - A^k A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} \tilde{g}^{lm} C_m \\
& -\frac{1}{4} h^{-2} A^k (\partial_k A_l) \tilde{g}^{lm} B_m - \frac{1}{4} h^{-2} A^k (\partial_l A_k) \tilde{g}^{lm} B_m - \frac{1}{2} \tilde{\Gamma}^k_{kl} \tilde{g}^{lm} B_m + \frac{1}{2} h^{-2} A^k A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} \tilde{g}^{lm} B_m \\
& -h^{-2} A^k A^l (\partial_k A_l) E - A^l \tilde{\Gamma}^k_{kl} E + h^{-2} A^k A^l A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} E \\
& +\frac{1}{2} h^{-4} A^k A^l (\partial_k A_l) G + \frac{1}{2} h^{-2} A^l \tilde{\Gamma}^k_{kl} G - \frac{1}{2} h^{-4} A^k A^l A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} G \\
& + \left(-A^l C_k + \frac{1}{2} h^{-2} A^l B_k + \frac{1}{2} \tilde{g}^{ln} F_{kn} - \frac{1}{2} h^{-2} A^l D_k \right) \\
& \cdot \left(A^k C_l - \frac{1}{2} h^{-2} A^k B_l - \frac{1}{2} \tilde{g}^{km} F_{lm} + \frac{1}{2} h^{-2} A^k D_l \right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
& R_{00} \\
= \; & (\partial_k \tilde{g}^{km}) h^2 C_m + \|\nabla_{\tilde{g}} h\|^2_{\tilde{g}} + \tilde{g}^{km} h (\partial_k \partial_m h) - \frac{1}{2}(\partial_k \tilde{g}^{km}) B_m - \frac{1}{2}\tilde{g}^{km}(\partial_k B_m) \\
& -(\partial_k A^k) E - A^k (\partial_k A^m) C_m - A^k A^m (\partial_k C_m) \\
& +\frac{1}{2} h^{-2} (\partial_k A^k) G + \frac{1}{2} h^{-2} A^k (\partial_k A^m) B_m + \frac{1}{2} h^{-2} A^k A^m (\partial_k B_m) \\
& +\frac{1}{2} E \tilde{g}^{kn} F_{kn} - \frac{1}{4} h^{-2} G \tilde{g}^{kn} F_{kn} - h^2 \tilde{g}^{km} C_k C_m + \tilde{g}^{km} C_k B_m - h^{-2} E G \\
& -\frac{1}{4} h^{-2} \tilde{g}^{km} B_m B_k - \frac{1}{2} \tilde{g}^{km} C_m D_k + \frac{1}{4} h^{-2} \tilde{g}^{km} B_m D_k \\
& +\frac{1}{2} A^k (\partial_k A_l) \tilde{g}^{lm} C_m + \frac{1}{2} A^k (\partial_l A_k) \tilde{g}^{lm} C_m + \tilde{\Gamma}^k_{kl} \tilde{g}^{lm} h^2 C_m - A^k A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} \tilde{g}^{lm} C_m \\
& -\frac{1}{4} h^{-2} A^k (\partial_k A_l) \tilde{g}^{lm} B_m - \frac{1}{4} h^{-2} A^k (\partial_l A_k) \tilde{g}^{lm} B_m - \frac{1}{2} \tilde{\Gamma}^k_{kl} \tilde{g}^{lm} B_m + \frac{1}{2} h^{-2} A^k A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} \tilde{g}^{lm} B_m \\
& -h^{-2} A^k A^l (\partial_k A_l) E - A^l \tilde{\Gamma}^k_{kl} E + h^{-2} A^k A^l A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} E \\
& +\frac{1}{2} h^{-4} A^k A^l (\partial_k A_l) G + \frac{1}{2} h^{-2} A^l \tilde{\Gamma}^k_{kl} G - \frac{1}{2} h^{-4} A^k A^l A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} G \\
& + - E^2 + \frac{1}{2} h^{-2} E G + \frac{1}{2} \tilde{g}^{km} D_m C_k - \frac{1}{2} h^{-2} E H \\
& +\frac{1}{2} h^{-2} E G - \frac{1}{4} h^{-4} G^2 - \frac{1}{4} h^{-2} \tilde{g}^{km} B_k D_m + \frac{1}{4} h^{-4} G H \\
& +\frac{1}{2} \tilde{g}^{ln} C_l D_n - \frac{1}{4} h^{-2} \tilde{g}^{ln} B_l D_n - \frac{1}{4} \tilde{g}^{km} \tilde{g}^{ln} F_{lm} F_{kn} + \frac{1}{4} h^{-2} D_n D_l \tilde{g}^{ln} \\
& -\frac{1}{2} h^{-2} E H + \frac{1}{4} h^{-4} G H + \frac{1}{4} h^{-2} \tilde{g}^{km} D_m D_k - \frac{1}{4} h^{-4} H^2
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
& R_{00} \\
= \;& (\partial_k \tilde{g}^{km}) h^2 C_m + \|\nabla_{\tilde{g}} h\|_{\tilde{g}}^2 + \tilde{g}^{km} h (\partial_k \partial_m h) - \frac{1}{2}(\partial_k \tilde{g}^{km}) B_m - \frac{1}{2}\tilde{g}^{km}(\partial_k B_m) \\
& -(\partial_k A^k) E - A^k (\partial_k A^m) C_m - A^k A^m (\partial_k C_m) \\
& +\frac{1}{2} h^{-2} (\partial_k A^k) G + \frac{1}{2} h^{-2} A^k (\partial_k A^m) B_m + \frac{1}{2} h^{-2} A^k A^m (\partial_k B_m) \\
& +\frac{1}{2} E \tilde{g}^{kn} F_{kn} - \frac{1}{4} h^{-2} G \tilde{g}^{kn} F_{kn} - h^2 \tilde{g}^{km} C_k C_m + \tilde{g}^{km} C_k B_m - h^{-2} E G \\
& -\frac{1}{4} h^{-2} \tilde{g}^{km} B_m B_k - \frac{1}{2}\tilde{g}^{km} C_m D_k + \frac{1}{4} h^{-2} \tilde{g}^{km} B_m D_k \\
& +\frac{1}{2} A^k (\partial_k A_l) \tilde{g}^{lm} C_m + \frac{1}{2} A^k (\partial_l A_k) \tilde{g}^{lm} C_m + \tilde{\Gamma}^k_{kl} \tilde{g}^{lm} h^2 C_m - A^k A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} \tilde{g}^{lm} C_m \\
& -\frac{1}{4} h^{-2} A^k (\partial_k A_l) \tilde{g}^{lm} B_m - \frac{1}{4} h^{-2} A^k (\partial_l A_k) \tilde{g}^{lm} B_m - \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}^k_{kl} \tilde{g}^{lm} B_m + \frac{1}{2} h^{-2} A^k A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} \tilde{g}^{lm} B_m \\
& -h^{-2} A^k A^l (\partial_k A_l) E - A^l \tilde{\Gamma}^k_{kl} E + h^{-2} A^k A^l A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} E \\
& +\frac{1}{2} h^{-4} A^k A^l (\partial_k A_l) G + \frac{1}{2} h^{-2} A^l \tilde{\Gamma}^k_{kl} G - \frac{1}{2} h^{-4} A^k A^l A_m \tilde{\Gamma}^m_{kl} G \\
& -E^2 + h^{-2} E G + \tilde{g}^{km} D_m C_k - h^{-2} E H - \frac{1}{4} h^{-4} G^2 - \frac{1}{2} h^{-2} \tilde{g}^{km} B_k D_m + \frac{1}{2} h^{-4} G H \\
& -\frac{1}{4}\tilde{g}^{km}\tilde{g}^{ln} F_{lm} F_{kn} + \frac{1}{2} h^{-2} \tilde{g}^{ln} D_n D_l - \frac{1}{4} h^{-4} H^2
\end{aligned}
$$

En utilisant g^{ij} symétrique et F_{ij} antisymétrique on a $g^{ij}F_{ij} = 0$. Donc :

$$\begin{aligned}
& R_{00} \\
= \; & (\partial_k \tilde{g}^{km})h^2 C_m + \|\nabla_{\tilde{g}} h\|_{\tilde{g}}^2 + \tilde{g}^{km} h(\partial_k \partial_m h) - \frac{1}{2}(\partial_k \tilde{g}^{km})B_m - \frac{1}{2}\tilde{g}^{km}(\partial_k B_m) \\
& -(\partial_k \tilde{g}^{kl})A_l E - \tilde{g}^{kl}(\partial_k A_l)E - (\partial_k \tilde{g}^{ml})A^k A_l C_m - \tilde{g}^{ml} A^k (\partial_k A_l) C_m - A^k A^m (\partial_k C_m) \\
& +\frac{1}{2}h^{-2}(\partial_k \tilde{g}^{kl})A_l G + \frac{1}{2}h^{-2}\tilde{g}^{kl}(\partial_k A_l)G + \frac{1}{2}h^{-2}(\partial_k \tilde{g}^{ml})A^k A_l B_m \\
& +\frac{1}{2}h^{-2}\tilde{g}^{ml}A^k(\partial_k A_l)B_m + \frac{1}{2}h^{-2}A^k A^m(\partial_k B_m) \\
& -h^2 \tilde{g}^{km} C_k C_m + \tilde{g}^{km} C_k B_m - \frac{1}{4}h^{-2}\tilde{g}^{km} B_m B_k \\
& +\frac{1}{2}A^k(\partial_k A_l)\tilde{g}^{lm} C_m + \frac{1}{2}A^k(\partial_l A_k)\tilde{g}^{lm} C_m + \tilde{\Gamma}_{kl}^k \tilde{g}^{lm} h^2 C_m - A^k A_m \tilde{\Gamma}_{kl}^m \tilde{g}^{lm} C_m \\
& -\frac{1}{4}h^{-2}A^k(\partial_k A_l)\tilde{g}^{lm} B_m - \frac{1}{4}h^{-2}\tilde{g}^{lm}A^k(\partial_l A_k)B_m - \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}_{kl}^k \tilde{g}^{lm} B_m + \frac{1}{2}h^{-2}A^k A_m \tilde{\Gamma}_{kl}^m \tilde{g}^{lm} B_m \\
& -h^{-2}A^k A^l(\partial_k A_l)E - A^l \tilde{\Gamma}_{kl}^k E + h^{-2}A^k A^l A_m \tilde{\Gamma}_{kl}^m E \\
& +\frac{1}{2}h^{-4}A^k A^l(\partial_k A_l)G + \frac{1}{2}h^{-2}A^l \tilde{\Gamma}_{kl}^k G - \frac{1}{2}h^{-4}A^k A^l A_m \tilde{\Gamma}_{kl}^m G \\
& -E^2 + \frac{1}{2}\tilde{g}^{km} D_m C_k - h^{-2}EH - \frac{1}{4}h^{-4}G^2 - \frac{1}{4}h^{-2}\tilde{g}^{km} B_k D_m + \frac{1}{2}h^{-4}GH \\
& +\frac{1}{2}h^{-2}\tilde{g}^{ln} D_n D_l - \frac{1}{4}h^{-4}H^2 - \frac{1}{4}\tilde{g}^{km}\tilde{g}^{ln} F_{lm} F_{kn}
\end{aligned}$$